7. Übung zur Vorlesung „Steuer- und Regelungstechnik“

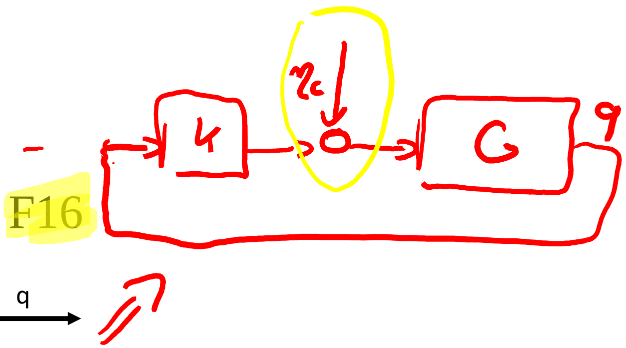
Aktive Beeinflussung von Systemverhalten, Sprungantworten

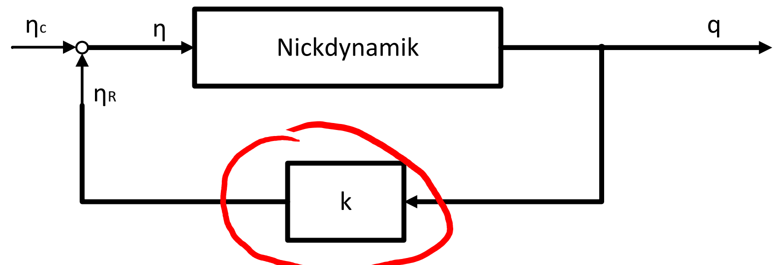
Felix Goßmann M.Sc.

Institut für Steuer- und Regelungstechnik
Fakultät für Luft- und Raumfahrttechnik
Universität der Bundeswehr München

Aufgabe 1: Nickdämpfer

Gegeben ist das Blockschaltbild eines Nickdämpfers einer F16





Zur besseren Dämpfung einer Anstellwinkelschwingung werden Flugzeuge üblicherweise mit einem oben dargestellten Nickdämpfer versehen. Der Einfluss dieser Schaltung auf die Eigenschaften der Nickdynamik soll im Folgenden untersucht werden.

Der erforderliche Teil der Nickdynamik einer F16 kann dabei näherungsweise mit der Übertragungsfunktion beschrieben werden.

$$G_{q\eta}(s) = \frac{q(s)}{\eta(s)} = \frac{-0{,}1137s - 0{,}0705}{s^2 + 1{,}5189s + 2{,}1303}$$

Aufgabe 1: Nickdämpfer

- Allgemeines zur Anstellwinkelschwingung (auch alpha-Schwingung)
- Schnelle Hub-Nick-Schwingung (Schwingung um y-Achse)

- Tritt als Antwort auf Höhenrudereingaben und äußeren Störungen um die y-Achse auf (vertikale Böen beispielsweise)
- Äußerst sich besonders stark in der Nickrate q

- Durch Regelung lässt sich diese Schwingung künstlich beeinflussen
- Aktive Beeinflussung von Systemeigenschaften (Regelung)

- Rückkopplung der Nickrate auf das Höhenruder
- Proportionale Rückführung (P-Regler)

Aufgabe 1: Nickdämpfer

Aufgaben:

a) Berechnen Sie die Pol- und Nullstellen der gegebenen Übertragungsfunktion, sowie deren Eigenfrequenz und Dämpfungsgrad.

b) Berechnen Sie die Eigenfrequenz und den Dämpfungsgrad des in der Aufgabe in Form eines Blockschaltbildes dargestellten Nickdämpfers in Abhängigkeit der Verstärkung k.

c) Der Verstärkungsfaktor k wird auf den Wert 5 gesetzt. Berechnen sie die Polstellen des Systems und vergleichen Sie diese, sowie dessen Frequenz und Dämpfungsgrad mit der ursprünglichen Nickdynamik.

d) Berechnen sie den stationären Endwert beider Systeme bei einem Höhenrudersprung von $\eta(t) = 1(t)$ und vergleichen Sie beide miteinander.

Aufgabe 1: Nickdämpfer

Aufgabe: a) Berechnen Sie die Pol- und Nullstellen der gegebenen Übertragungsfunktion, sowie deren Eigenfrequenz und Dämpfungsgrad.

$$G_{q\eta}(s) = \frac{q(s)}{\eta(s)} = \frac{-0{,}1137s - 0{,}0705}{s^2 + 1{,}5189s + 2{,}1303}$$

$s^2 + 2D\omega_0 \cdot s + \omega_0^2$

Polstellen: $s^2 + 1{,}5189s + 2{,}1303 = 0$

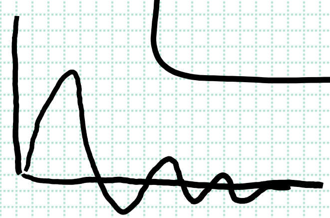
$$s = -\frac{1{,}5189}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1{,}5189}{2}\right)^2 - 2{,}1303}$$

$$\underbrace{\boxed{s = -0{,}7594 \pm j \cdot 1{,}2464}}_{\text{stabil}}$$

Nullstellen:

$-0{,}1137s - 0{,}0705 = 0$

$s = -0{,}6201$



Aufgabe 1: Nickdämpfer

Aufgabe: a) Berechnen Sie die Pol- und Nullstellen der gegebenen Übertragungsfunktion, sowie deren Eigenfrequenz und Dämpfungsgrad.

$$G_{q\eta}(s) = \frac{q(s)}{\eta(s)} = \frac{-0{,}1137s - 0{,}0705}{s^2 + \underbrace{1{,}5189}_{2D\omega_0}s + \underbrace{2{,}1303}_{\omega_0^2}}$$

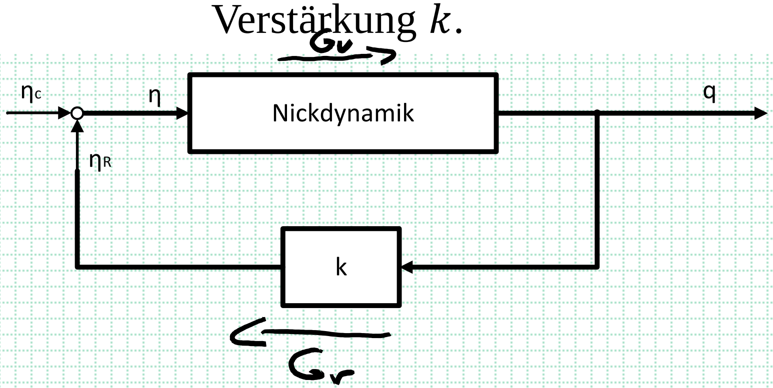
$s^2 + 2D\omega_0 + \omega_0^2$

$\omega_0 = \sqrt{2{,}1303} = \underline{\underline{1{,}4596 \text{ rad/s}}}$

$2D\omega_0 = 1{,}5189 \Rightarrow D = \frac{1{,}5189}{2\omega_0} = \underline{\underline{0{,}52}}$

Aufgabe 1: Nickdämpfer

Aufgabe: b) Berechnen Sie die Eigenfrequenz und den Dämpfungsgrad des in der Aufgabe in Form eines Blockschaltbildes dargestellten Nickdämpfers in Abhängigkeit der Verstärkung k.



$$G_o(s) = G_v(s) \cdot G_r(s)$$

$$= k \cdot \frac{-0{,}1137\, s - 0{,}0705}{s^2 + 1{,}5189\, s + 2{,}1303}$$

$$G(s) = \frac{G_v}{1 - G_o(s)}$$

$$1 - G_o(s) = 1 - \frac{-0{,}1137k \cdot s - 0{,}0705k}{s^2 + 1{,}5189s + 2{,}1303}$$

$$= \frac{s^2 + (1{,}5189 + 0{,}1137k)s + (2{,}1303 + 0{,}0705k)}{s^2 + 1{,}5189s + 2{,}1303}$$

Aufgabe 1: Nickdämpfer

Aufgabe: b) Berechnen Sie die Eigenfrequenz und den Dämpfungsgrad des in der Aufgabe in Form eines Blockschaltbildes dargestellten Nickdämpfers in Abhängigkeit der Verstärkung k.

$$G(s) = \underbrace{\frac{-0{,}1137s - 0{,}0705}{\cancel{s^2 + 1{,}5189s + 2{,}1303}}}_{G_v(s)} \cdot \underbrace{\frac{\cancel{s^2 + 1{,}5189s + 2{,}1303}}{s^2 + (1{,}5189 + 0{,}1137k)s + (2{,}1303 + 0{,}0705k)}}_{\frac{1}{1 - G_o(s)}}$$

$$\boxed{= \frac{-0{,}1137s - 0{,}0705}{s^2 + (1{,}5189 + 0{,}1137k)s + (2{,}1303 + 0{,}0705k)}}$$

Aufgabe 1: Nickdämpfer

Aufgabe: b) Berechnen Sie die Eigenfrequenz und den Dämpfungsgrad des in der Aufgabe in Form eines Blockschaltbildes dargestellten Nickdämpfers in Abhängigkeit der Verstärkung k.

$$N(s) = s^2 + \underbrace{(1{,}5189 + 0{,}1137k)}_{2D\omega_0} s + \underbrace{(2{,}1303 + 0{,}0705k)}_{\omega_0^2}$$

$$\omega_0 = \sqrt{2{,}1303 + 0{,}0705k}$$

$$D = \frac{1{,}5189 + 0{,}1137k}{2\omega_0} = \frac{1{,}5189 + 0{,}1137k}{2\sqrt{2{,}1303 + 0{,}0705k}}$$

Aufgabe 1: Nickdämpfer

Aufgabe: c) Der Verstärkungsfaktor *k* wird auf den Wert 5 gesetzt. Berechnen sie die Polstellen des Systems und vergleichen Sie diese, sowie dessen Frequenz und Dämpfungsgrad mit der ursprünglichen Nickdynamik.

$$N(s) = s^2 + (1{,}5189 + 0{,}1137 \cdot 5)\, s + (2{,}1303 + 0{,}0705 \cdot 5)$$

$$\Rightarrow \quad s^2 + 2{,}0874 s + 2{,}4828 = 0$$

vorher: $s = -0{,}7594 \pm j\,1{,}2464$

$$\boxed{s = -1{,}043 \pm j \cdot 1{,}1805}$$

Aufgabe 1: Nickdämpfer

Aufgabe: c) Der Verstärkungsfaktor k wird auf den Wert 5 gesetzt. Berechnen sie die Polstellen des Systems und vergleichen Sie diese, sowie dessen Frequenz und Dämpfungsgrad mit der ursprünglichen Nickdynamik.

$$D = \frac{1{,}5189 + 0{,}1137 \cdot 5}{2\sqrt{2{,}1303 + 0{,}0705 \cdot 5}} = 0{,}66$$

$$\omega_0 = \;..\; \approx 1{,}5757 \;\mathrm{rad/s}$$

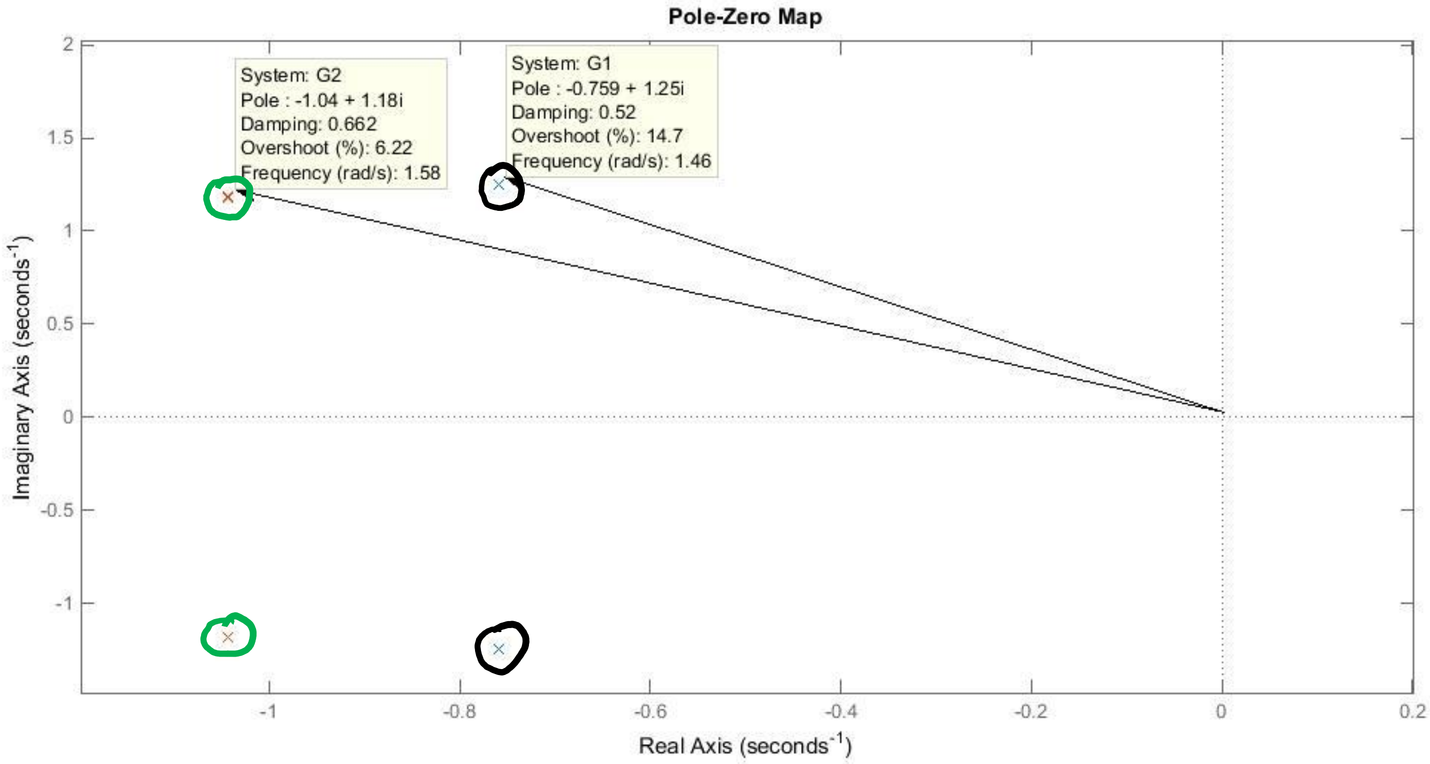
vorher

$$D = 0{,}52$$

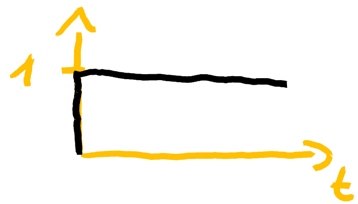
$$\omega_0 = 1{,}4596 \;\mathrm{rad/s}$$

Aufgabe 1: Nickdämpfer

Wanderung der Polstellen durch die Regelung



Sprungantwort



- Antwort einer Differentialgleichung auf einen Einheitssprung zum Zeitpunkt $t = 0$

$$\boxed{u(t) = 1(t)} \rightarrow \boxed{U(s) = \frac{1}{s}}$$

- Gebräuchliche Größe zur Bewertung von Regelstrecken oder Regelkreisen
- Bewertung des Folgeverhaltens eines Systems (Einstellen eines Sollwertes)
  - wie schnell
  - welches Verhalten
  - welche Abweichung

- Kann auch zur Darstellung von modifiziertem Systemverhalten verwendet werden
  - Effekte von künstlicher Stabilisierung auf System
  - Modifikation von Systemverhalten

Aufgabe 1: Nickdämpfer

Aufgabe: d) Berechnen sie den stationären Endwert beider Systeme bei einem Höhenrudersprung von $\eta(t) = 1(t)$ und vergleichen Sie beide miteinander.

$U(s) = \frac{1}{s}$

$H(s) = Y(s) = G(s) \cdot U(s)$

$\Rightarrow Y(s) = \frac{1}{s} \cdot G(s)$

stabil

$$\boxed{y_\infty = \lim_{t \to \infty} y(t) = \lim_{s \to 0} s \cdot Y(s)}$$

ungeregelten Fall

$$\lim_{s \to 0} \cancel{s} \cdot \frac{1}{\cancel{s}} \cdot \frac{\overset{\to 0}{\cancel{-0{,}1137 s}} - 0{,}0705}{\underset{\to 0}{\cancel{s^2}} + \cancel{1{,}5189 s} + 2{,}1303} = -0{,}0331$$

Aufgabe 1: Nickdämpfer

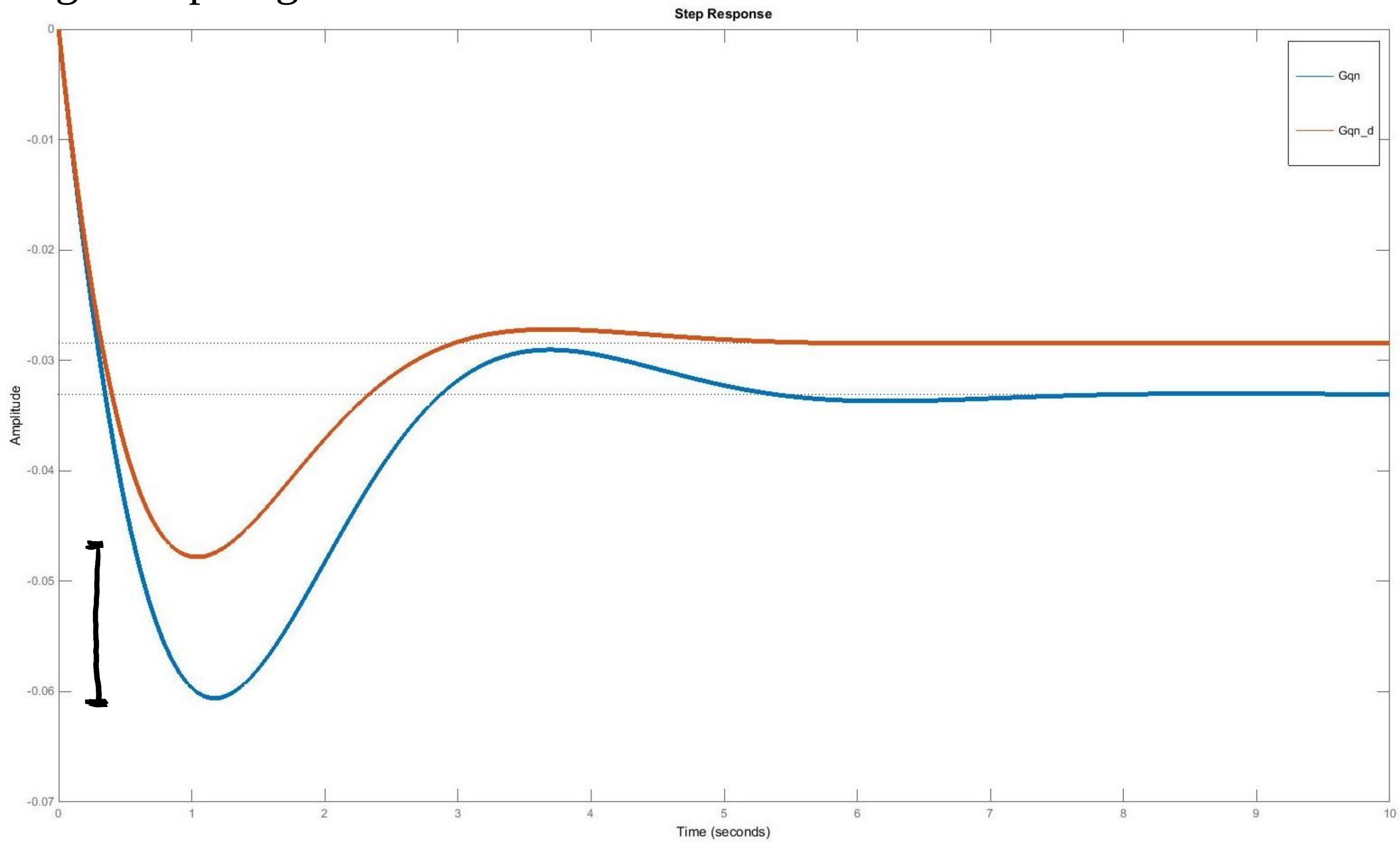
Aufgabe: d) Berechnen sie den stationären Endwert beider Systeme bei einem Höhenrudersprung von $\eta(t) = 1(t)$ und vergleichen Sie beide miteinander.

geregelten Fall

$$\lim_{s \to 0} \cancel{s} \, \frac{1}{\cancel{s}} \, \frac{-0{,}1137 s \xrightarrow{} 0 - 0{,}0705}{s^2 + 2{,}0879 s + 2{,}4828} = \underline{\underline{-0{,}0284}}$$

Aufgabe 1: Nickdämpfer

Veränderung der Sprungantworten



Aufgabe 2: Sprungantwort eines Systems

Gegeben ist die folgende Differentialgleichung

$$\dddot{y}(t) + 6 \cdot \ddot{y}(t) + 11 \cdot \dot{y}(t) + 6 \cdot y(t) = 2 \cdot u(t)$$

aus Übung 4). Die Laplace-Transformierte der DGL wurde bereits zu

$$Y(s) = \frac{2}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6} \cdot U(s) + \frac{s^2 + 6s + 11}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$$

bestimmt. Zusätzlich wurden die Lösungen der charakteristischen Gleichung zu

$$s_1 = -2 \;\vee\; s_2 = -3 \;\vee\; s_3 = -1$$

bestimmt.

Aufgabe 2: Sprungantwort eines Systems

Die Laplace-Transformierte der DGL wurde bereits zu

$$Y(s) = \frac{2}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6} \cdot U(s) + \frac{s^2 + 6s + 11}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$$

bestimmt. Zusätzlich wurden die Lösungen der charakteristischen Gleichung zu

$$s_1 = -2 \;\vee\; s_2 = -3 \;\vee\; s_3 = -1$$

bestimmt.

Aufgaben:

a) Ermitteln Sie die Sprungantwort des Systems im eingeschwungenen Zustand und transformieren Sie diese in den Zeitbereich.
b) Berechnen sie den stationären Endwert der in a) ermittelten Sprungantwort.

Aufgabe 2: Sprungantwort eines Systems

Aufgaben: a) Ermitteln Sie die Sprungantwort des Systems im eingeschwungenen Zustand und transformieren Sie diese in den Zeitbereich.

$$Y(s) = \underbrace{\frac{2}{s^3+6s^2+11s+6}}_{G(s)} \cdot U(s)$$

keine Korrespondenz

$$H(s) = \frac{1}{s} \cdot G(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{2}{s^3+6s^2+11s+6} = \frac{2}{s(s^3+6s^2+11s+6)}$$

$$= \frac{2}{s(s+1)(s+2)(s+3)} = \underbrace{\frac{A}{s}}_{Nr.\,1} + \underbrace{\frac{B}{s+1} + \frac{C}{s+2} + \frac{D}{s+3}}_{Nr.\,3}$$

Aufgabe 2: Sprungantwort eines Systems

Aufgaben: a) Ermitteln Sie die Sprungantwort des Systems im eingeschwungenen Zustand und transformieren Sie diese in den Zeitbereich.

Gleicher Nenner

$$\frac{2}{s(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{A(s+1)(s+2)(s+3) + Bs(s+2)(s+3) + Cs(s+1)(s+3) + Ds(s+1)(s+2)}{s(s+1)(s+2)(s+3)}$$

$s=0$: $\quad 2 = A(1 \cdot 2 \cdot 3) \Leftrightarrow 2 = 6A \quad \Rightarrow \underline{\underline{A = \frac{1}{3}}}$

$s=-1$: $\quad 2 = B(-1)\underbrace{(-1+2)}_{1}\underbrace{(-1+3)}_{2} \Leftrightarrow 2 = -2B \quad \Rightarrow \underline{\underline{B = -1}}$

$s=-2$: $\quad 2 = C(-2)\underbrace{(-2+1)}_{-1}\underbrace{(-2+3)}_{1} \Leftrightarrow 2 = 2C \quad \Rightarrow \underline{\underline{C = +1}}$

$s=-3$: $\quad 2 = D(-3)\underbrace{(-3+1)}_{(-2)}\underbrace{(-3+2)}_{(-1)} \Leftrightarrow 2 = -6D \quad \Rightarrow \underline{\underline{D = -\frac{1}{3}}}$

Aufgabe 2: Sprungantwort eines Systems

Aufgaben: a) Ermitteln Sie die Sprungantwort des Systems im eingeschwungenen Zustand und transformieren Sie diese in den Zeitbereich.

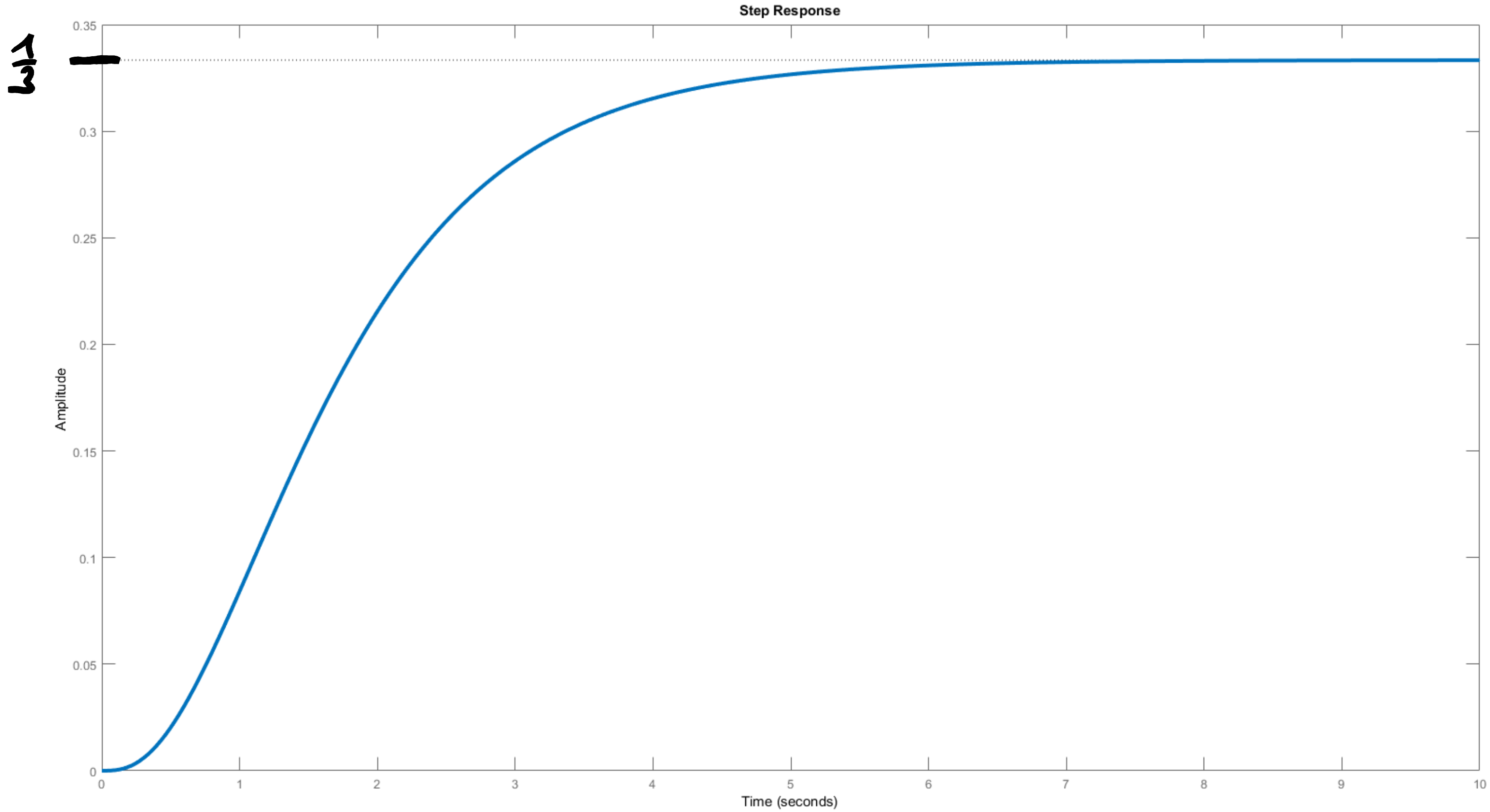
$$H(s) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{s+3}$$

$$\boxed{h(t) = \frac{1}{3} - e^{-t} + e^{-2t} - \frac{1}{3} e^{-3t}}$$

1	$1(t)$	$\frac{1}{s}$
3	$e^{-at} \cdot 1(t)$	$\frac{1}{s+a}$

Aufgabe 2: Sprungantwort eines Systems

Sprungantwort:



Aufgabe 2: Sprungantwort eines Systems

Aufgabe: b) Berechnen sie den stationären Endwert der in a) ermittelten Sprungantwort.

$$\lim_{s \to 0} s \cdot H(s) = \lim_{s \to 0} \cancel{s} \cdot \frac{1}{\cancel{s}} \cdot \frac{2}{\underset{\to 0}{s^3} + \underset{\to 0}{6s^2} + \underset{\to 0}{11s} + 6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Aufgabe 2: Sprungantwort eines Systems

Die Laplace-Transformierte der DGL wurde bereits zu

$$Y(s) = \frac{2}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6} \cdot U(s) + \frac{s^2 + 6s + 11}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$$

bestimmt.

Aufgaben:

c) Betrachten Sie für die Übertragungsfunktion des Systems einen Standardregelkreis mit einem P-Regler $G_R(s) = K_R$. Ermitteln Sie die Sprungantwort des geschlossenen Regelkreises.

d) Berechnen Sie den stationären Endwert des geschlossenen Regelkreises in Abhängigkeit von K_R und bewerten Sie das Ergebnis im Hinblick auf die stationäre Genauigkeit eines Regelkreises.

Sprungantwort

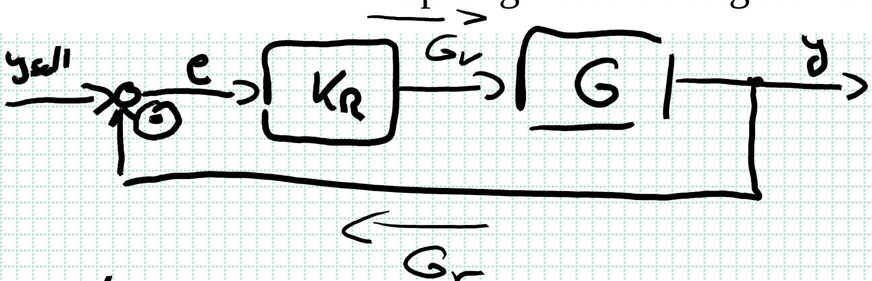
- Antwort einer Differentialgleichung auf einen Einheitssprung zum Zeitpunkt $t = 0$

$$u(t) = 1(t) \quad \rightarrow \quad U(s) = \frac{1}{s}$$

- Gebräuchliche Größe zur Bewertung von Regelstrecken oder Regelkreisen
- Bewertung des Folgeverhaltens eines Systems (Einstellen eines Sollwertes)
    - wie schnell
    - welches Verhalten
    - welche Abweichung
- Kann auch zur Darstellung von modifiziertem Systemverhalten verwendet werden
    - Effekte von künstlicher Stabilisierung auf System
    - Modifikation von Systemverhalten

Aufgabe 2: Sprungantwort eines Systems

Aufgaben: c) Betrachten Sie für die Übertragungsfunktion des Systems einen Standardregelkreis mit einem P-Regler $G_R(s) = K_R$. Ermitteln Sie die Sprungantwort des geschlossenen Regelkreises.



$$G_v = K_R \cdot \frac{2}{s^3+6s^2+11s+6} = G_0$$

$$G_r = 1$$

Nenner:

$$1 + G_0 = 1 + \frac{2K_R}{s^3+6s^2+11s+6} = \frac{s^3+6s^2+11s+6+2K_R}{s^3+6s^2+11s+6}$$

$$G(s) = \frac{G_0(s)}{1+G_0(s)} = \frac{2K_R}{\cancel{s^3+6s^2+11s+6}} \cdot \frac{\cancel{s^3+6s^2+11s+6}}{s^2+6s^2+11s+6+2K_R}$$

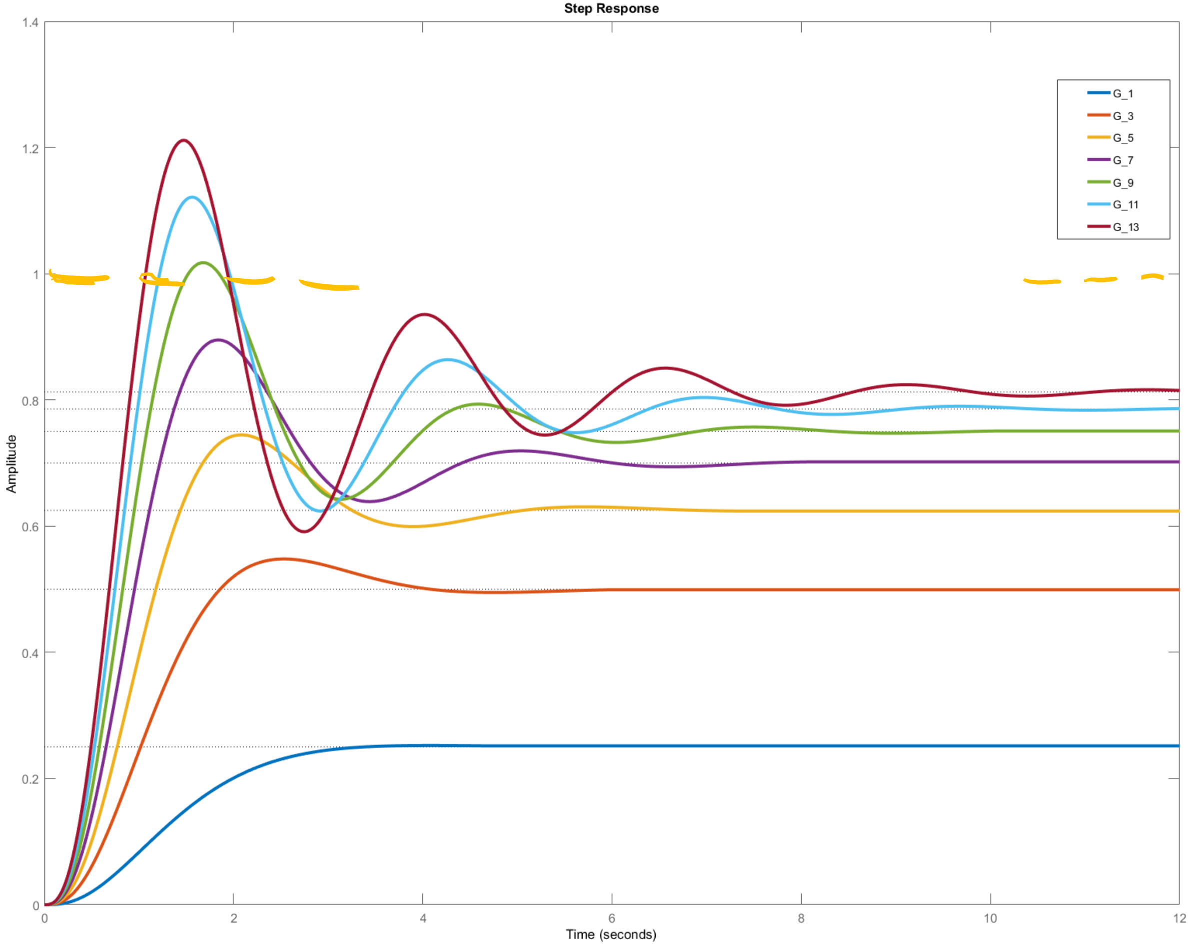
Aufgabe 2: Sprungantwort eines Systems

Aufgaben: c) Betrachten Sie für die Übertragungsfunktion des Systems einen Standardregelkreis mit einem P-Regler $G_R(s) = K_R$. Ermitteln Sie die Sprungantwort des geschlossenen Regelkreises.

$$G(s) = \frac{2K_R}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6 + 2K_R}$$

$$H(s) = \frac{1}{s}\, G(s) = \frac{2K_R}{s(s^3 + 6s^2 + 11s + 6 + 2K_R)}$$

Aufgabe 2: Sprungantwort eines Systems



$K_R = 1$

$K_R = 13$

Aufgabe 2: Sprungantwort eines Systems

Aufgaben: d) Berechnen Sie den stationären Endwert des geschlossenen Regelkreises in Abhängigkeit von K_R und bewerten Sie das Ergebnis im Hinblick auf die stationäre Genauigkeit eines Regelkreises.

$$\lim_{s\to 0} s \cdot H(s) = \lim_{s\to 0} \cancel{s} \cdot \frac{1}{\cancel{s}} \cdot G(s) = \lim_{s\to 0} \frac{2K_R}{\underbrace{s^3}_{\to 0} + \underbrace{6s^2}_{\to 0} + \underbrace{11s}_{\to 0} + 6 + 2K_R}$$

$$= \frac{2K_R}{6 + 2K_R} = \frac{K_R}{3 + K_R}$$

-> stationäre Genauigkeit ($y_{soll} = 1 \longrightarrow e = 0$) kann nicht erreicht werden

– P-Regler werden i.d.R. nur für künst. Stabilisierung oder Mod. von Systemeigensch. verwendet