6. Übung zur Vorlesung
„Steuer- und Regelungstechnik“

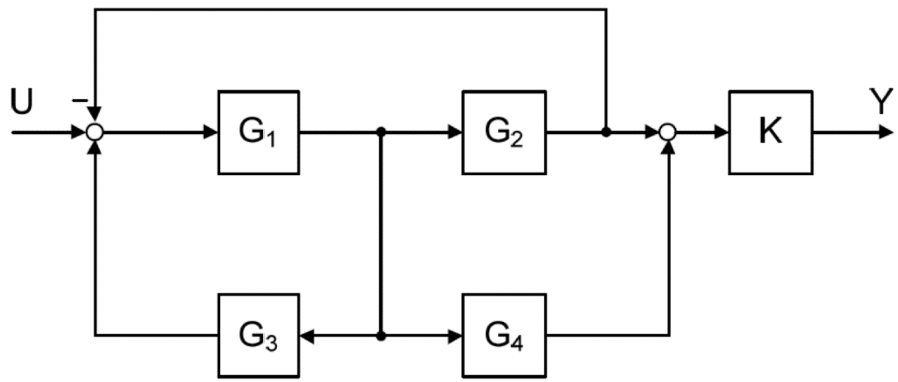
Stabilität, künstliche Stabilisierung

Felix Goßmann M.Sc.

Institut für Steuer- und Regelungstechnik
Fakultät für Luft- und Raumfahrttechnik
Universität der Bundeswehr München

Nachtrag aus Übung 5.

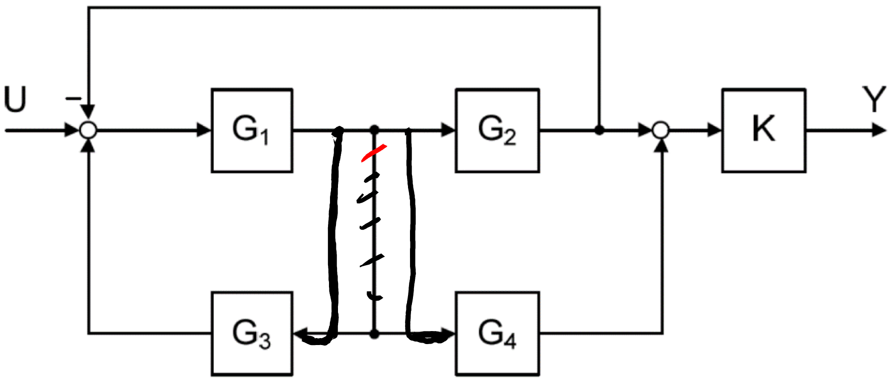
Gegeben ist das folgende Blockschaltbild

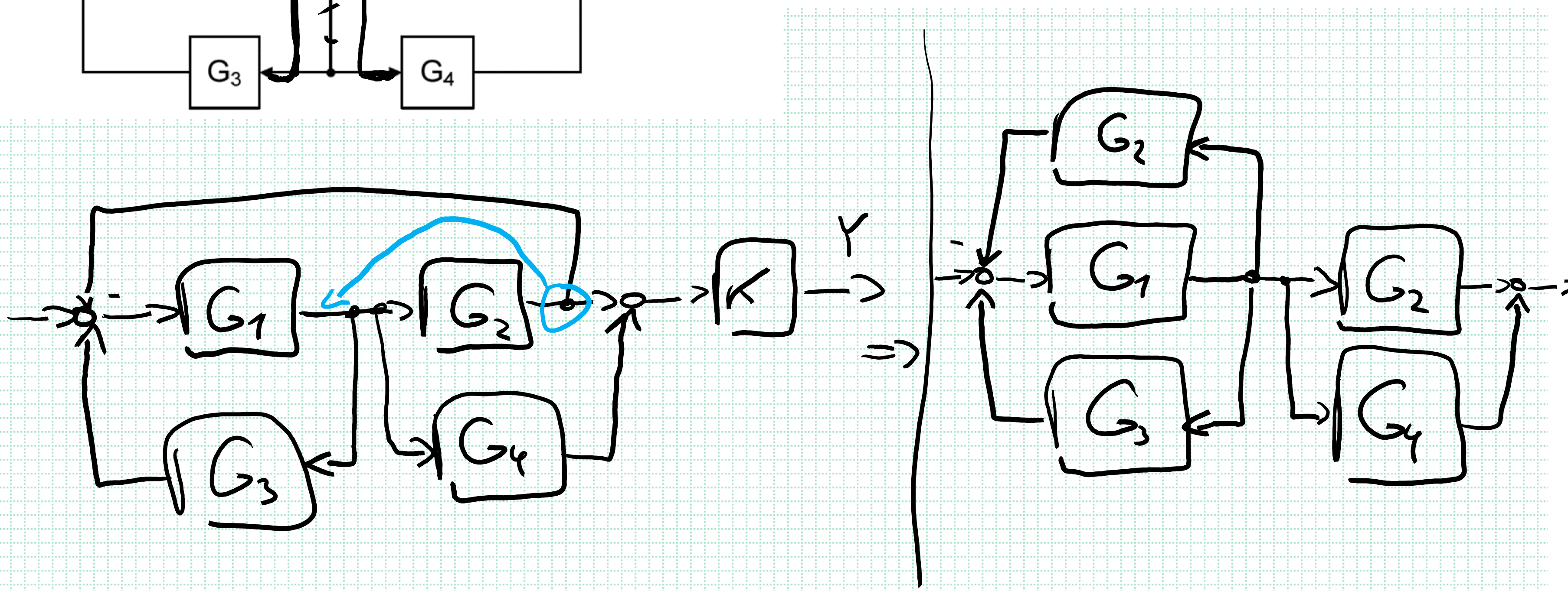


mit den allgemeinen Übertragungsfunktionen $G_1(s) - G_4(s)$ sowie $K(s)$

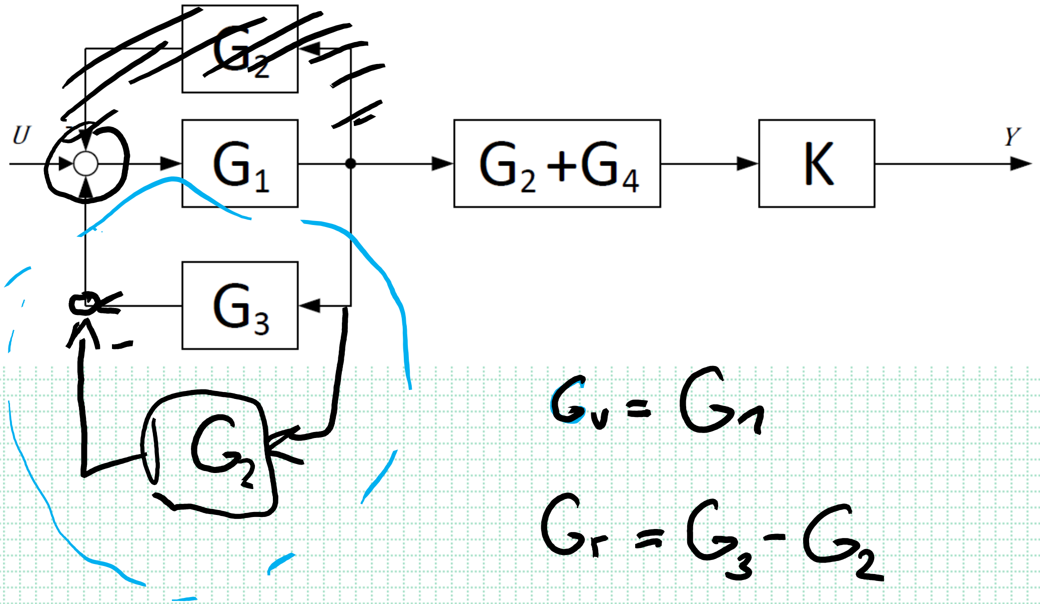
Aufgabe: Fassen Sie das oben aufgeführte System zu einer Übertragungsfunktion $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$ zusammen.

Aufgabe 4: Zusammenfassen von Blockschaltbildern





Aufgabe 4: Zusammenfassen von Blockschaltbildern

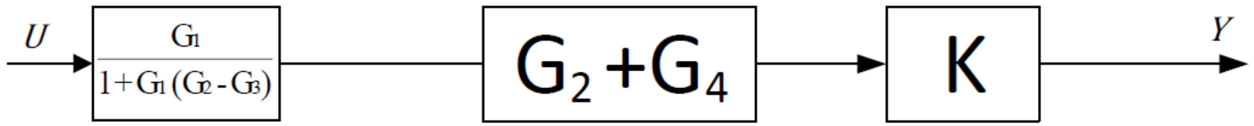


$$G_v = G_1$$

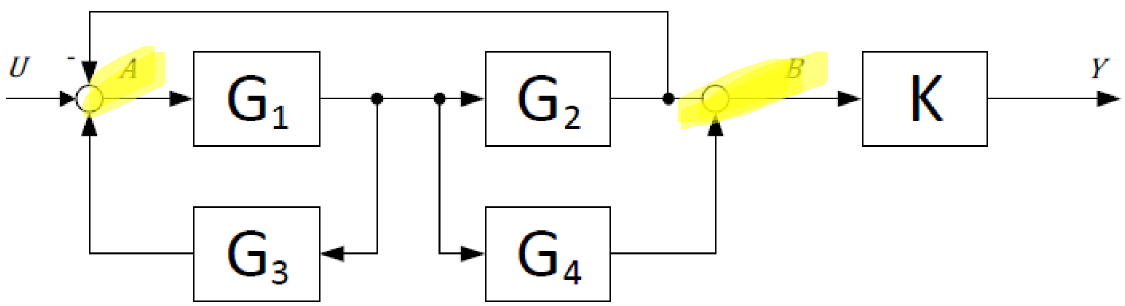
$$G_r = G_3 - G_2$$

$$G = \frac{G_1}{1 - G_1(G_3 - G_2)}$$

Aufgabe 4: Zusammenfassen von Blockschaltbildern



Aufgabe 4: Zusammenfassen von Blockschaltbildern



$$Y = K \cdot B$$

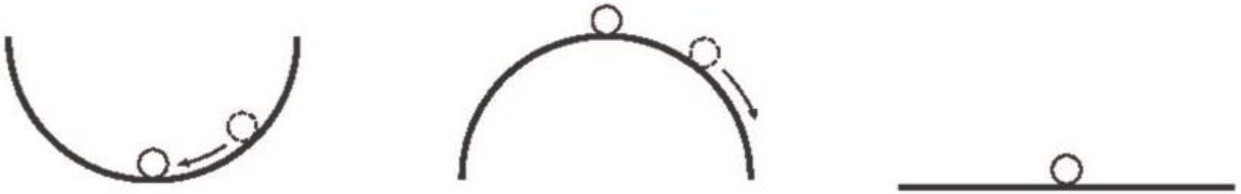
$$B = A \cdot G_1 (G_2 + G_4)$$

$$A = U + A G_3 - A G_1 \cdot G_2$$

Stabilität

Definition 3.1 (*Stabilität*)

i) Eine **Ruhelage** eines dynamischen Systems heißt (*asymptotisch*) **stabil**, wenn das System nach Auslenkung aus der Ruhelage selbsttätig in die Ruhelage zurückkehrt (Bild 3.2).



a) b) c)

Bild 3.2: Stabilität von Ruhelagen
a) stabile Ruhelage b) instabile Ruhelage c) indifferente Ruhelage

Stabilität

- Bezogen auf lineare Übertragungssysteme folgt daraus:

- Ein lineares Übertragungssystem ist genau dann asymptotisch stabil, wenn für die Wurzeln seiner charakteristischen Gleichung gilt:

$$Re\,\{p_i\} < 0, \qquad i = 1, \dots, n$$

- Wurzel der char. Gleichung entsprechen den Polstellen der ÜF
- **Realteile** aller Polstellen müssen negativ sein

Aufgabe 1 – Stabilität von Übertragungsfunktionen

Gegeben sind die beiden Übertragungsfunktionen

$$G_1(s) = \frac{1}{s^2 + 5s + 6}$$

$$G_2(s) = \frac{1}{s^2 + s - 6}$$

Aufgaben:

a) Berechnen Sie die Polstellen der beiden Übertragungsfunktionen

b) Betrachten Sie beide Übertragungsfunktionen jeweils in einem Standardregelkreis mit einem P-Regler $G_R(s) = K_R$. Bestimmen Sie jeweils die Übertragungsfunktion des geschlossenen Regelkreises und deren Polstellen in Abhängigkeit von K_R.

c) Beschreiben Sie jeweils den Einfluss der Reglerverstärkung K_R auf die Lage der Polstellen und die Stabilität des geschlossenen Regelkreises.

Aufgabe 1 – Stabilität von Übertragungsfunktionen

Aufgaben: a) Berechnen Sie die Polstellen der beiden Übertragungsfunktionen

$$G_1(s) = \frac{1}{s^2+5s+6}$$

$$N(s) = s^2 + 5s + 6$$

$$s = -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - 6}$$

$$= -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}}$$

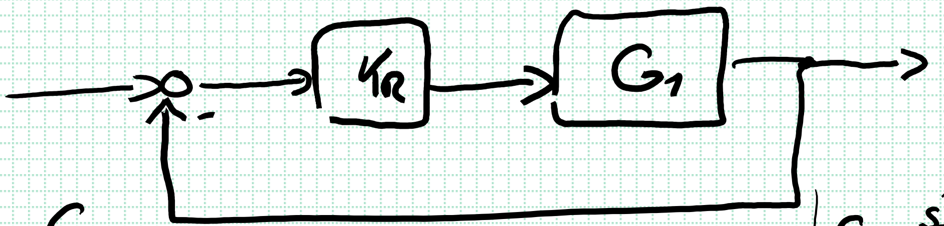
$$s = -\frac{4}{2} = \underline{\underline{-2}}$$

$$s = -\frac{6}{2} = \underline{\underline{-3}}$$

Aufgabe 1 – Stabilität von Übertragungsfunktionen

Aufgaben: b) Betrachten Sie beide Übertragungsfunktionen jeweils in einem Standardregelkreis mit einem P-Regler $G_R(s) = K_R$. Bestimmen Sie jeweils die Übertragungsfunktion des geschlossenen Regelkreises und deren Polstellen in Abhängigkeit von K_R.

$$G_1(s) = \frac{1}{s^2+5s+6}$$



$$G_v = \frac{K_R}{s^2+5s+6} = G_o$$

$$G_r = 1$$

$$G = \frac{G_v}{1+G_o}$$

$$1+G_o = 1+\frac{K_R}{s^2+5s+6}$$

$$= \frac{s^2+5s+6+K_R}{s^2+5s+6}$$

$$G = \frac{\cancel{s^2+5s+6}}{s^2+5s+6+K_R} \cdot \frac{K_R}{\cancel{s^2+5s+6}}$$

$$G = \frac{K_R}{s^2+5s+6+K_R}$$

Aufgabe 1 – Stabilität von Übertragungsfunktionen

Aufgaben: b) Betrachten Sie beide Übertragungsfunktionen jeweils in einem Standardregelkreis mit einem P-Regler $G_R(s) = K_R$. Bestimmen Sie jeweils die Übertragungsfunktion des geschlossenen Regelkreises und deren Polstellen in Abhängigkeit von K_R.

$$\cancel{G_1(s) = \frac{1}{s^2+5s+6}}$$

$$N_G(s) = s^2 + 5s + 6 + K_R$$

$$s = -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - 6 - K_R}$$

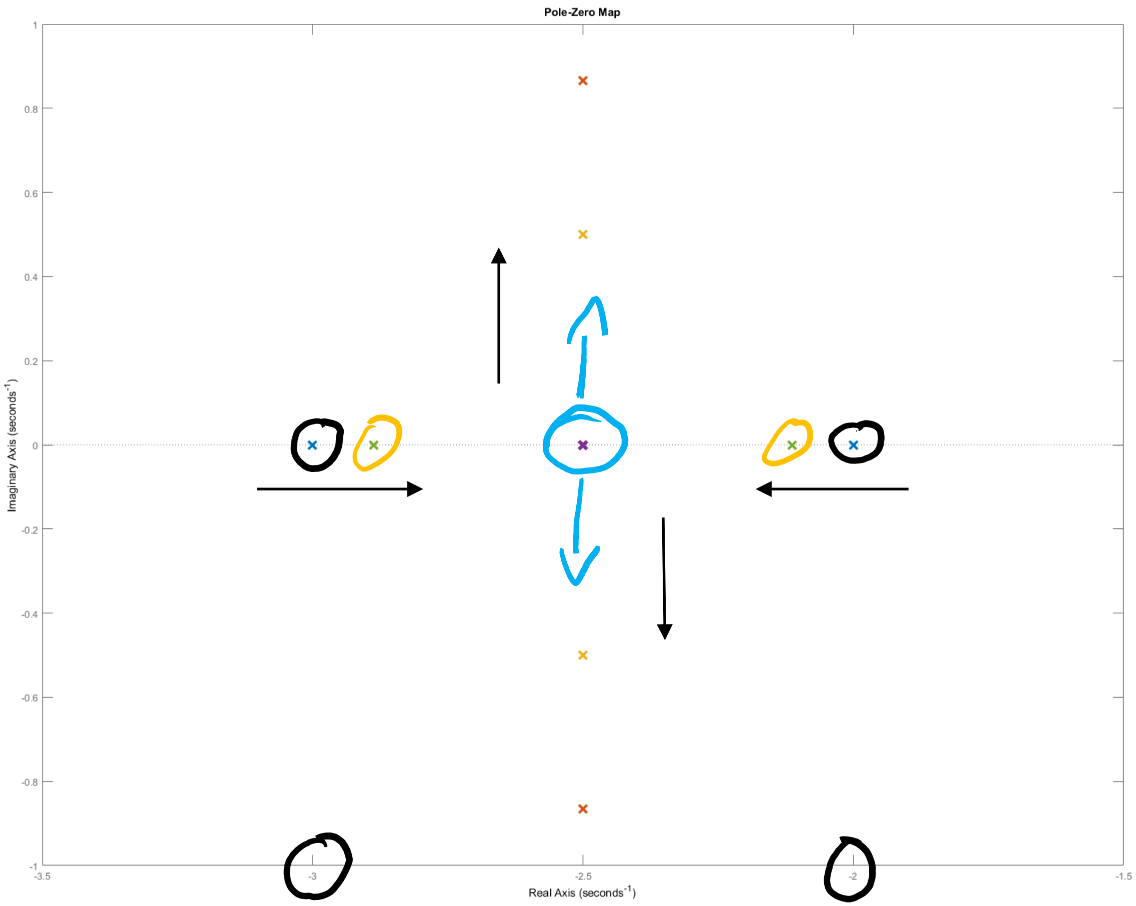
$$= -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{1-4K_R}{4}}$$

$$= \frac{-5 \pm \sqrt{1-4K_R}}{2}$$

$$1 - 4K_R = 0$$

$$K_R = \frac{1}{4}$$

Aufgabe 1 – Stabilität von Übertragungsfunktionen



Aufgabe 1 – Stabilität von Übertragungsfunktionen

Aufgaben: a) Berechnen Sie die Polstellen der beiden Übertragungsfunktionen

$G_2(s) = \frac{1}{s^2+s-6}$

$N(s) = s^2 + s - 6$

$$s = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 6}$$

$$= -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}}$$

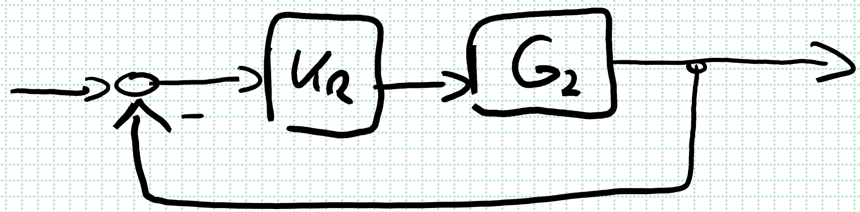
$$= -\frac{1}{2} \pm \frac{5}{2}$$

$s = 2 \quad \vee \quad s = -3$

Aufgabe 1 – Stabilität von Übertragungsfunktionen

Aufgaben: b) Betrachten Sie beide Übertragungsfunktionen jeweils in einem Standardregelkreis mit einem P-Regler $G_R(s) = K_R$. Bestimmen Sie jeweils die Übertragungsfunktion des geschlossenen Regelkreises und deren Polstellen in Abhängigkeit von K_R.

$$G_2(s) = \frac{1}{s^2+s-6}$$



$$G_v = \frac{K_R}{s^2+s-6} = G_0$$

$$1+G_0 = 1+\frac{K_R}{s^2+s-6} = \frac{s^2+s-6+K_R}{s^2+s-6}$$

$$G = \frac{\cancel{s^2+s-6}}{s^2+s-6+K_R} \cdot \frac{K_R}{\cancel{s^2+s-6}} \rightarrow \frac{K_R}{s^2+s-6+K_R}$$

Aufgabe 1 – Stabilität von Übertragungsfunktionen

Aufgaben: b) Betrachten Sie beide Übertragungsfunktionen jeweils in einem Standardregelkreis mit einem P-Regler $G_R(s) = K_R$. Bestimmen Sie jeweils die Übertragungsfunktion des geschlossenen Regelkreises und deren Polstellen in Abhängigkeit von K_R.

$$\cancel{G_2(s) = \frac{1}{s^2+s-6}}$$

$$N(s) = s^2 + s - 6 + K_R$$

$$s = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 6 - K_R}$$

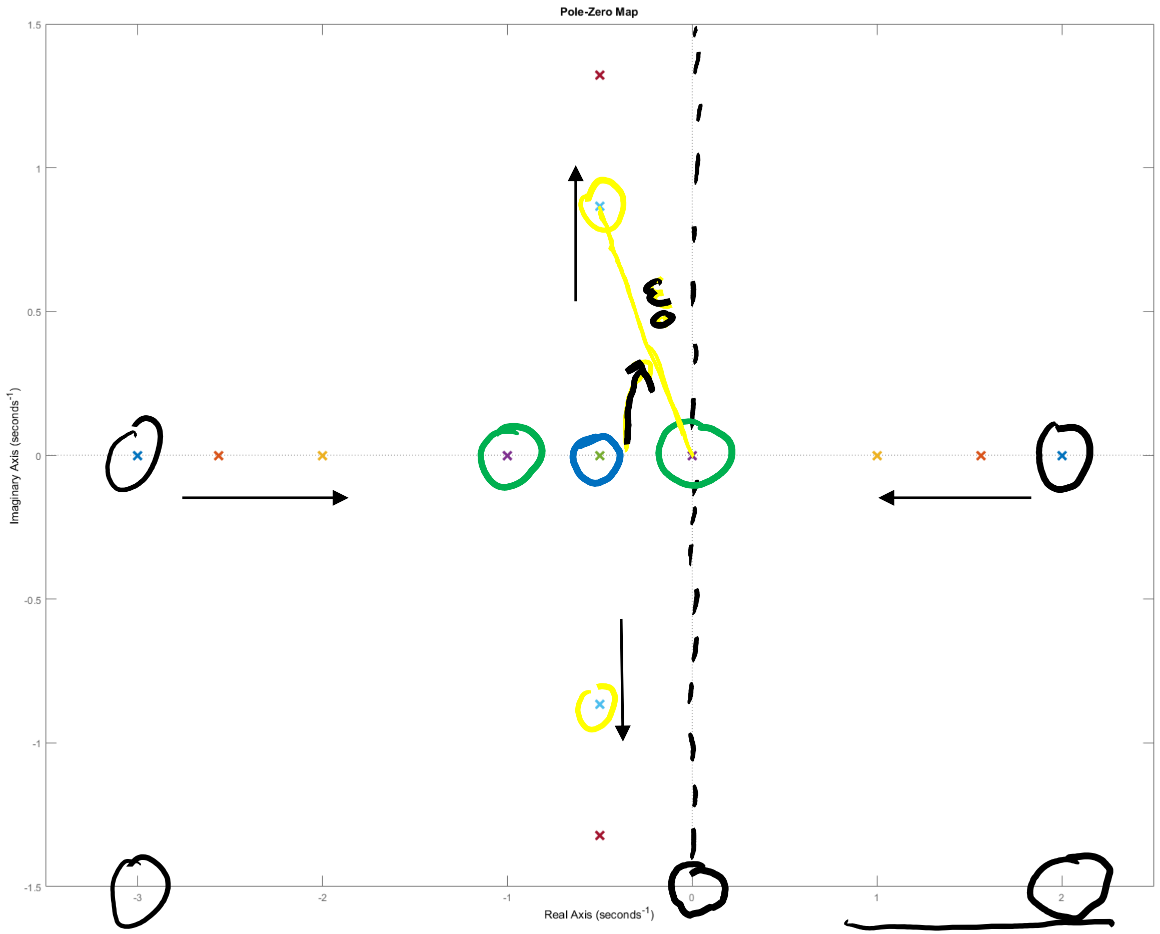
$$= -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{25-4K_R}{4}}$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{25-4K_R}}{2}$$

$$25 - 4K_R = 0$$

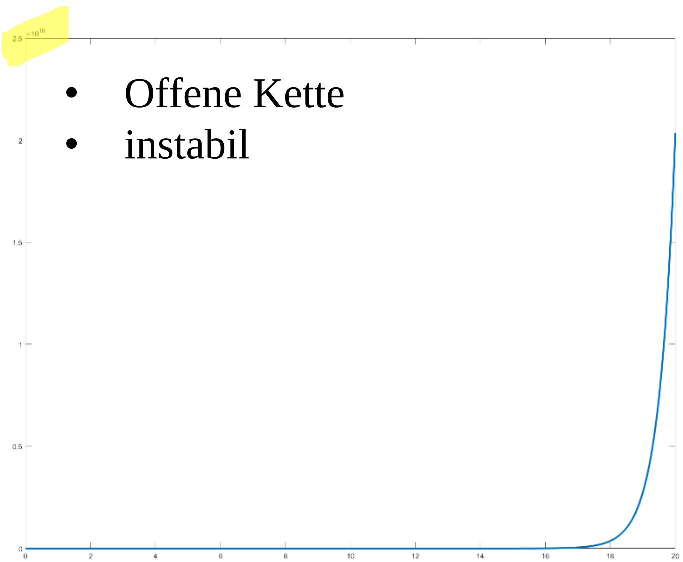
$$K_R = 6{,}25$$

Aufgabe 1 – Stabilität von Übertragungsfunktionen

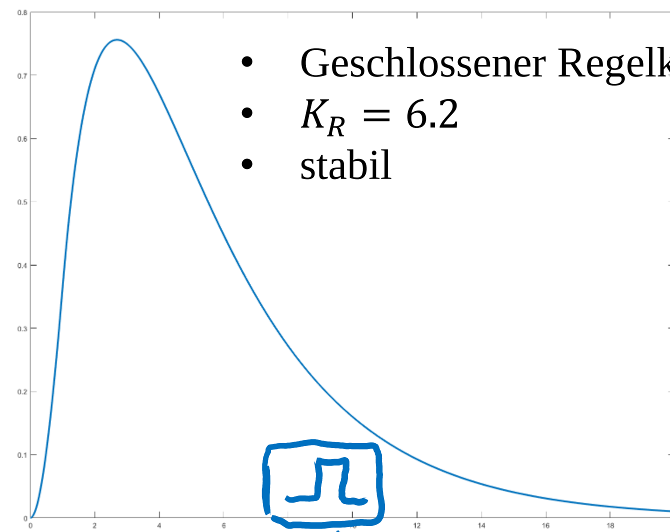


Aufgabe 1 – Stabilität von Übertragungsfunktionen

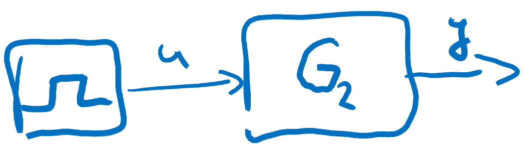
- Was bewirkt das Verschieben der Pole in einen stabilen Bereich (ÜF 2)

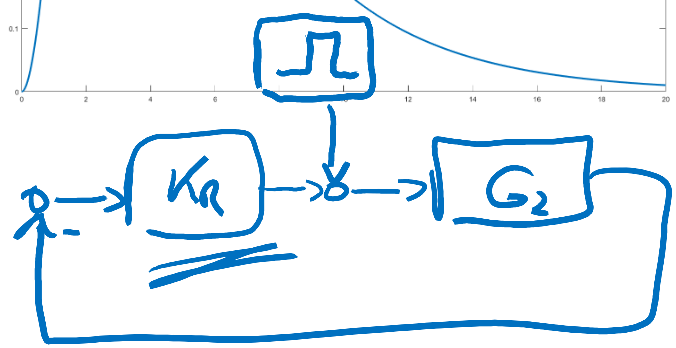


- Offene Kette
- instabil



- Geschlossener Regelkreis
- $K_R = 6.2$
- stabil





Stabilität

- Bezogen auf lineare Übertragungssysteme folgt daraus:

- Ein lineares Übertragungssystem ist genau dann asymptotisch stabil, wenn für die Wurzeln seiner charakteristischen Gleichung gilt:

$$Re\,\{p_i\} < 0, \qquad i = 1, \dots, n$$

- Wurzel der char. Gleichung entsprechen den Polstellen der ÜF
- Realteile aller Polstellen müssen negativ sein

- Berechnung der Polstellen für $n > 2$ aufwendig und für $n \geq 4$ i.A. nur noch numerisch möglich
  → Algebraische Stabilitätskriterien um Stabilitätsbed. zu prüfen

Algebraische Stabilitätskriterien

- Ermöglichen Aussage über Lage der Polstellen, ohne diese zu berechnen
- Ein Polynom

$$P(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0$$

dessen Polstellen alle einen negativen Realteil haben, werden Hurwitz-Polynome genannt

- Ein System ist also asymptotisch stabil, wenn sein charakteristisches Polynom ein Hurwitz-Polynom ist

Hurwitz-Kriterium

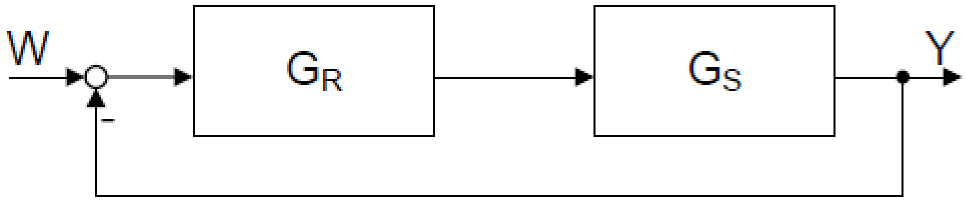
- Ein Polynom ist Hurtwitz-Polynom wenn:
- <u>notwendige Bedingung:</u> alle $a_i\ , i = 0, \dots, n$ sind vorhanden und haben das gleiche Vorzeichen
- <u>hinreichende Bedingung:</u> Hurwitzdet. H_{n-1} sowie alle ihre Hauptdet. $H_i, i = 1, \dots, n-2$ sind positiv

hinreichend

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccccc} H_1 & H_2 & H_3 & & & & \end{array} \\
H_{n-1} = & \begin{vmatrix}
a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\
a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\
0 & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots & \cdots & \vdots \\
0 & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots & \cdots & \vdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & a_1 & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_2 & a_0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_5 & a_3 & a_1
\end{vmatrix}
\end{array}
\quad (3.30)
$$

Aufgabe 2 – Algebraische Stabilitätskriterien

Gegeben ist folgendes Blockschaltbild



mit den Streckenübertragungsfunktionen

1. $G_s(s) = \frac{10}{(s+1)\cdot(s+2)\cdot(s+3)}$ 2. $G_s(s) = \frac{10\cdot(s+5)}{(s+1)\cdot(s+2)\cdot(s+3)}$

Aufgabe: Der Regelkreis wird mit einem P-Regler $G_R(s) = K_R$ geschlossen. Überprüfen Sie für beide Übertragungsfunktionen mit dem Hurwitz-Kriterium für welche K_R der Regelkreis stabil ist.

Aufgabe 2 – Algebraische Stabilitätskriterien

Aufgabe: Der Regelkreis wird mit einem P-Regler $G_R(s) = K_R$ geschlossen. Überprüfen Sie für beide Übertragungsfunktionen mit dem Hurwitz-Kriterium für welche K_R der Regelkreis stabil ist.

1. $G_s(s) = \frac{10}{(s+1)\cdot(s+2)\cdot(s+3)}$

$$G_0 = G_v = \frac{10K_R}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

$$G = \frac{G_v}{1+G_0}$$

$$1+G_0 = \frac{(s+1)(s+2)(s+3)+10K_R}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

$$G = \frac{\cancel{(s+1)(s+2)(s+3)}}{(s+1)(s+2)(s+3)+10K_R} \cdot \frac{10K_R}{\cancel{(s+1)(s+2)(s+3)}} = \frac{10K_R}{\underbrace{(s+1)(s+2)(s+3)+10K_R}_{N(s)}}$$

Aufgabe 2 – Algebraische Stabilitätskriterien

Aufgabe: Der Regelkreis wird mit einem P-Regler $G_R(s) = K_R$ geschlossen. Überprüfen Sie für beide Übertragungsfunktionen mit dem Hurwitz-Kriterium für welche K_R der Regelkreis stabil ist.

$$N(s) = (s+1)(s+2)(s+3) + 10K_R = \underbrace{1}_{a_3} \cdot s^3 + \underbrace{6}_{a_2} \cdot s^2 + \underbrace{11}_{a_1} s + \underbrace{(6+10K_R)}_{a_0}$$

not. Bed.: $a_0 > 0$

$$6 + 10K_R > 0$$

$$K_R > -\frac{6}{10}$$

$$\underline{\underline{K_R > -0{,}6}}$$

Aufgabe 2 – Algebraische Stabilitätskriterien

Aufgabe: Der Regelkreis wird mit einem P-Regler $G_R(s) = K_R$ geschlossen. Überprüfen Sie für beide Übertragungsfunktionen mit dem Hurwitz-Kriterium für welche K_R der Regelkreis stabil ist.

hin Bed.

$$H_1 = a_2 = 6 > 0$$

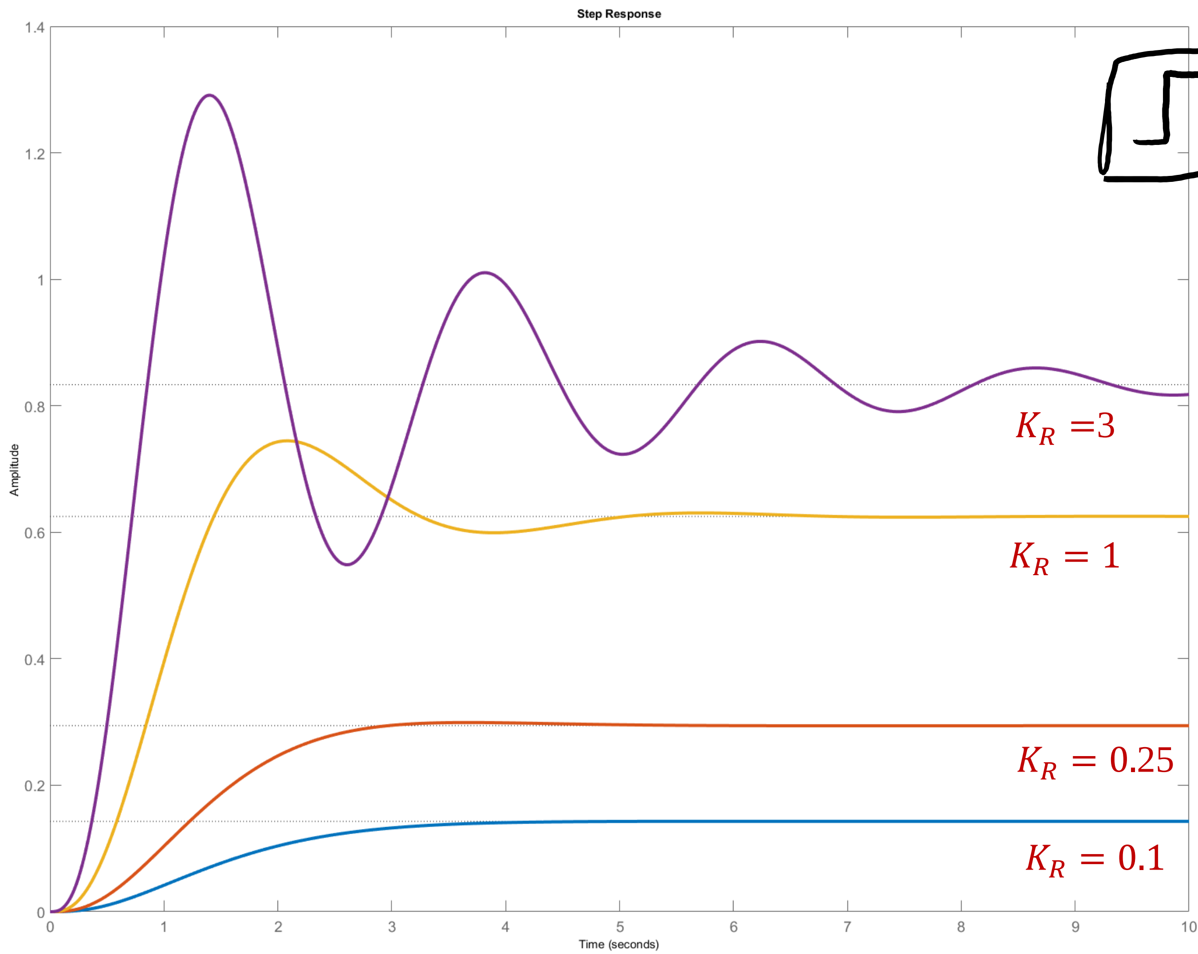
$$\boxed{-0{,}6 < K_R < 6}$$

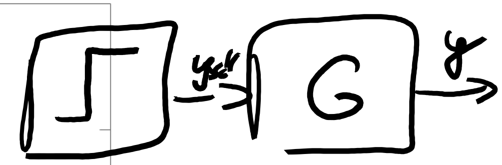
$$H_2 = \begin{vmatrix} a_2 & a_0 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 6+10K_R \\ 1 & 11 \end{vmatrix}$$

$$\det H_2 = 60 - 10K_R > 0 \quad \Rightarrow \underline{\underline{K_R < 6}}$$

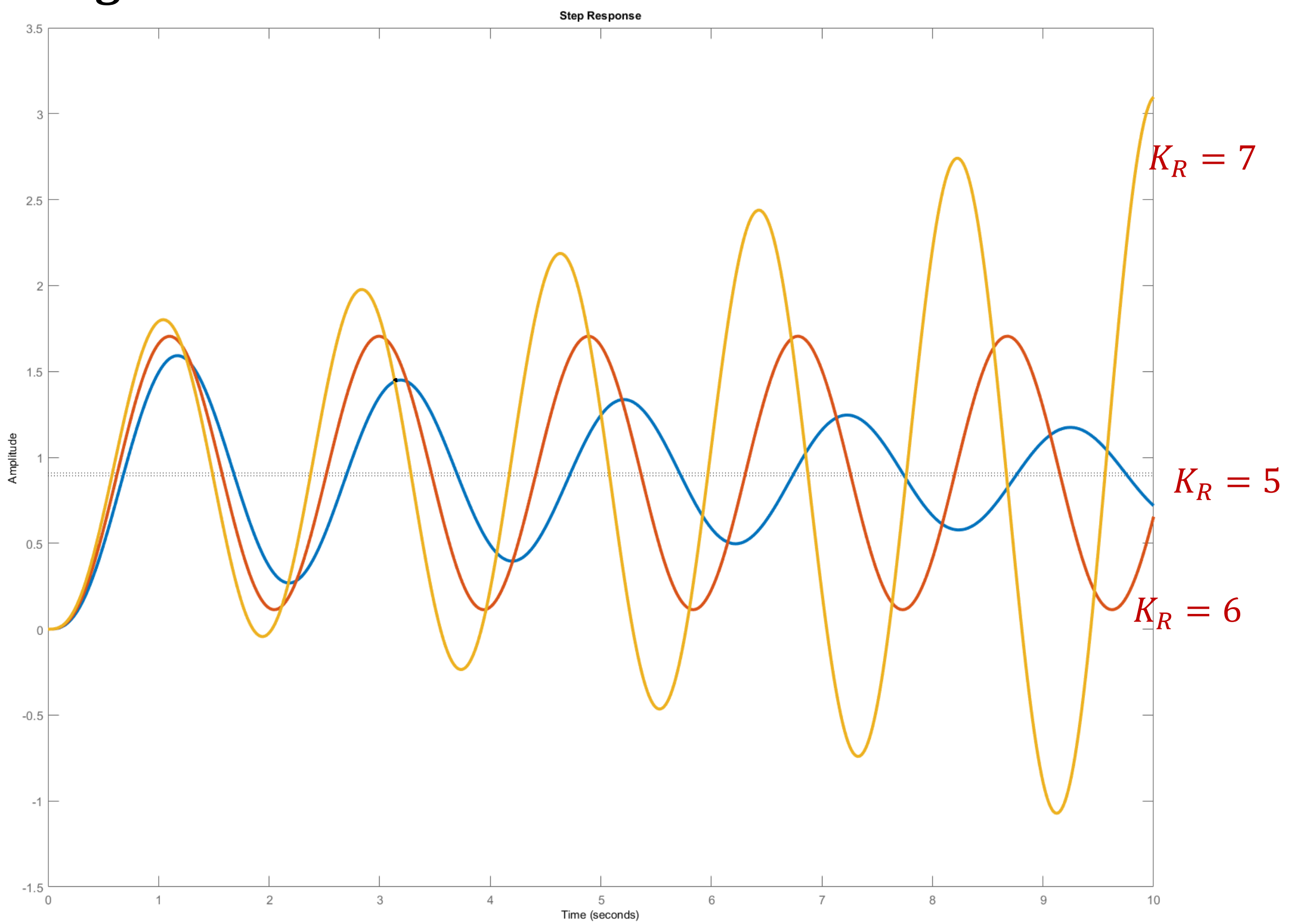
$$60 > 10K_R$$

Aufgabe 2 – Algebraische Stabilitätskriterien





Aufgabe 2 – Algebraische Stabilitätskriterien



Aufgabe 2 – Algebraische Stabilitätskriterien

Aufgabe: Der Regelkreis wird mit einem P-Regler $G_R(s) = K_R$ geschlossen. Überprüfen Sie für beide Übertragungsfunktionen mit dem Hurwitz-Kriterium für welche K_R der Regelkreis stabil ist.

2. $G_s(s) = \frac{10\cdot(s+5)}{(s+1)\cdot(s+2)\cdot(s+3)}$

$$G_v = \frac{10K_R(s+5)}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

$$G_r = 1$$

:

$$G = \frac{10K_R(s+5)}{\underbrace{(s+1)(s+2)(s+3) + 10K_R(s+5)}}$$

$$\rightarrow N(s) = \underbrace{1}_{a_3}\cdot s^3 + \underbrace{6}_{a_2}\cdot s^2 + \underbrace{(11+10K_R)}_{a_3} s + \underbrace{(6+50K_R)}_{a_4}$$

Durch Nullstelle
hat Regler auf
zwei Koeff.
Einfluss

Aufgabe 2 – Algebraische Stabilitätskriterien

Aufgabe: Der Regelkreis wird mit einem P-Regler $G_R(s) = K_R$ geschlossen. Überprüfen Sie für beide Übertragungsfunktionen mit dem Hurwitz-Kriterium für welche K_R der Regelkreis stabil ist.

not. Bed.: $a_3, a_2 > 0 \; (\checkmark)$

$a_1 > 0 \Rightarrow 11 + 10K_R > 0 \Rightarrow K_R > -\frac{11}{10} = \underline{\underline{-1{,}1}}$

$a_2 > 0 \Rightarrow 6 + 50K_R > 0 \Rightarrow K_R > -\frac{6}{50} = \underline{\underline{-0{,}12}}$

---

hin. Bed.: $H_1 = a_2 > 0 \quad (\checkmark)$

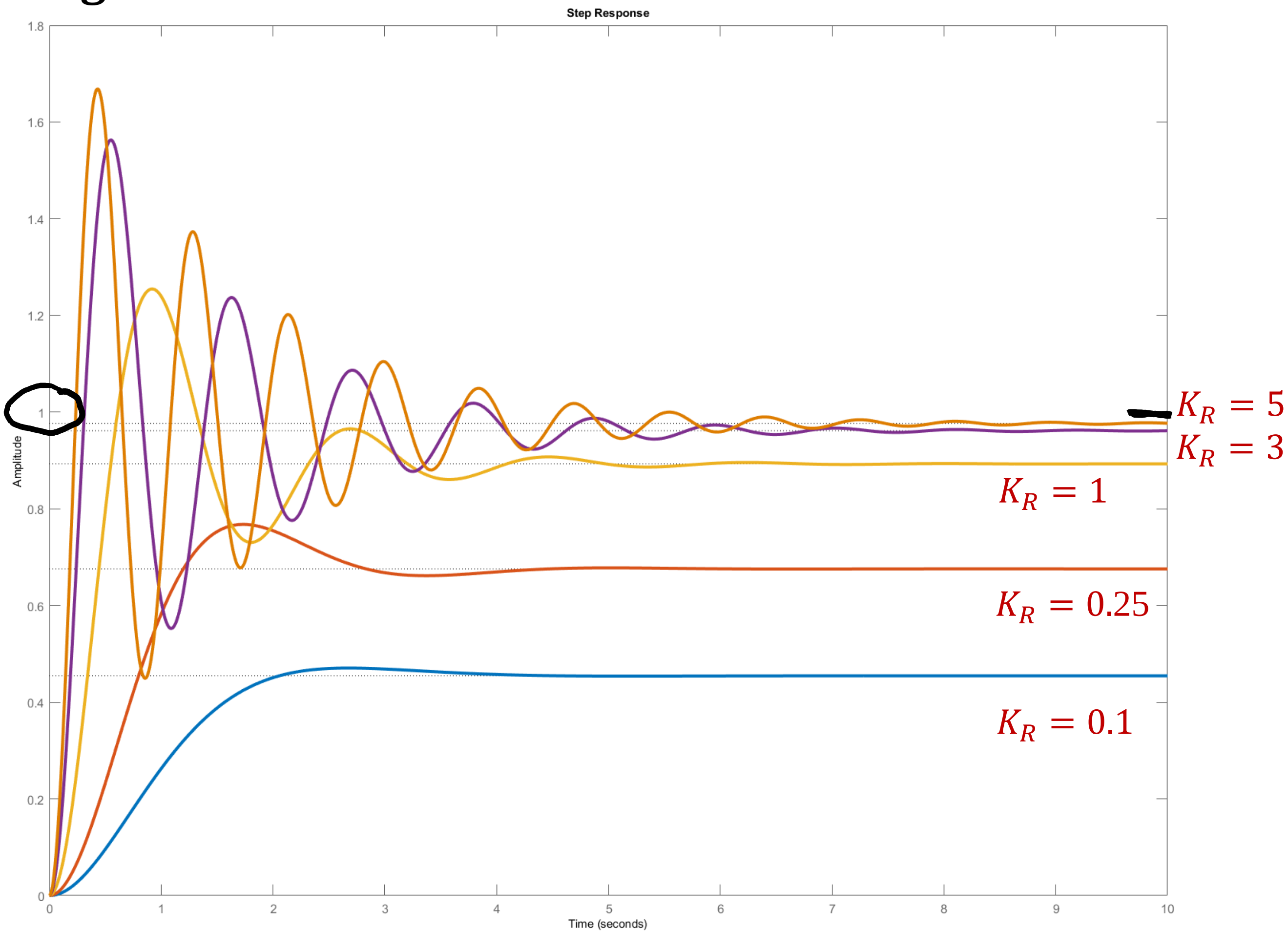
$$H_2 = \begin{vmatrix} 6 & 6 + 50K_R \\ 1 & 11 + 10K_R \end{vmatrix}$$

$\det H_2 = 60 + 10K_R > 0$

$\Rightarrow K_R > -6$

Nur untere Grenze für $K_R \longrightarrow \boxed{-0{,}12 < K_R < \infty}$

Aufgabe 2 – Algebraische Stabilitätskriterien

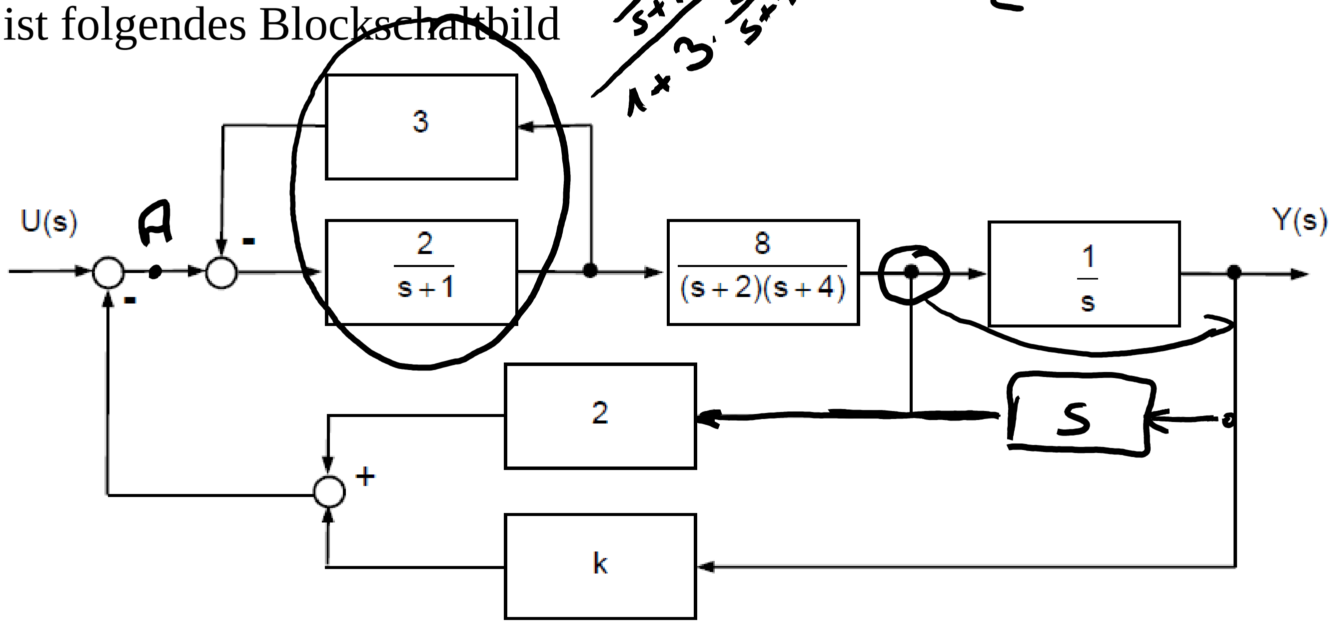


Aufgabe 3 - Stabilität

$$A = \left[U(s) - 2sY(s) - kY(s)\right]$$

Gegeben ist folgendes Blockschaltbild

$$\frac{\frac{2}{s+1}}{1+3\cdot\frac{2}{s+1}}$$



Aufgaben: a) Bestimmen sie die Übertragungsfunktion $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$ mit dem noch freien Parameter k

Aufgabe 3 - Stabilität

Aufgaben: a) Bestimmen sie die Übertragungsfunktion $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$ mit dem noch freien Parameter k

$$Y(s) = \frac{\frac{2}{s+1}}{1+3\frac{2}{s+1}} \cdot \frac{8}{(s+2)(s+4)} \cdot \frac{1}{s} \cdot A$$

$$Y(s) = \frac{8}{s(s+2)(s+4)} \cdot \frac{\frac{2}{s+1}}{1+3\frac{2}{s+1}} \cdot \left[U(s) - (2s+k)Y(s)\right]$$

$$\vdots$$

$$Y(s) = \underbrace{\frac{16}{s(s+2)(s+4)(s+7)+16(2s+k)}}_{G(s)} \cdot U(s)$$

Aufgabe 3 - Stabilität

Aufgaben: b) Ermitteln sie mit dem Hurwitz-Kriterium den k-Bereich, für den das System asymptotisch stabil ist.

c) Bestimmen Sie den stat. Endwert für den Fall $u(t) = 1(t)$ und $k = \frac{k_{max}}{4}$ mit dem in b) bzw. c) ermittelten k_{max}.
Was können sie bzg. des stat. Endwertes im Fall $k = 2k_{max}$ aussagen?

Aufgabe 3 - Stabilität

Aufgaben: b) Ermitteln sie mit dem Hurwitz-Kriterium den k-Bereich, für den das System asymptotisch stabil ist.

$$N(s) = \underbrace{1}_{a_4} \cdot s^4 + \underbrace{13}_{a_3} s^3 + \underbrace{50}_{a_2} s^2 + \underbrace{88}_{a_1} s + \underbrace{16k}_{a_0}$$

not. Bed.: $16k > 0 \Rightarrow \boxed{k > 0}$

$$H_3 = \left|\begin{matrix} a_3 & a_1 & 0 \\ a_4 & a_2 & a_0 \\ 0 & a_3 & a_1 \end{matrix}\right|$$

$$\det \left(\begin{matrix} 13 & 88 & 0 \\ 1 & 50 & 16k \\ 0 & 13 & 88 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 13 & 88 \\ 1 & 50 \\ 0 & 13 \end{matrix}$$

$$= 13 \cdot 50 \cdot 88 - 88^2 - 13^2 \cdot 16k > 0 \Rightarrow \boxed{k < 18{,}295}$$

Aufgabe 3 - Stabilität

Aufgaben: b) Ermitteln sie mit dem Hurwitz-Kriterium den k-Bereich, für den das System asymptotisch stabil ist.

$$H_2 = \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ a_4 & a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 13 & 88 \\ 1 & 50 \end{vmatrix}$$

$$\det \begin{vmatrix} 13 & 88 \\ 1 & 50 \end{vmatrix} = 13 \cdot 50 - 1 \cdot 88 = 562 > 0$$

$$H_1 = a_3 = 13 > 0$$

$$\boxed{0 < k < 18{,}295}$$

Aufgabe 3 - Stabilität

$u(s) = \frac{1}{s}$

Aufgaben: e) Bestimmen Sie den stat. Endwert für den Fall $u(t) = 1(t)$ und $\boxed{k = \frac{k_{max}}{4}}$ mit dem in b) bzw. c) ermittelten k_{max}. Was können sie bzg. des stat. Endwertes im Fall $k = 2k_{max}$ aussagen?

$$\boxed{y_\infty = \lim_{t \to \infty} y(t) \overset{\text{Stabilität}}{=} \lim_{s \to 0} s \cdot Y(s)}$$

$$y_\infty = \lim_{s \to 0} \cancel{s} \cdot G(s) \cdot \frac{1}{\cancel{s}} = \lim_{s \to 0} G(s) = \dots = \frac{1}{k}$$

$$k = \frac{k_{max}}{4} \longrightarrow y_\infty = \frac{4}{k_{max}} \approx 0{,}219$$

$$k = 2k_{max} \longrightarrow y_\infty = \cancel{\frac{1}{2k_{max}}} \longrightarrow \text{existiert nicht}$$