# 5. Übung zur Vorlesung „Steuer- und Regelungstechnik“

## Übertragungsfunktionen, Blockschaltbild-Algebra

**Felix Goßmann M.Sc.**

Institut für Steuer- und Regelungstechnik
Fakultät für Luft- und Raumfahrttechnik
Universität der Bundeswehr München

## Rückblick auf Übung 4.)

Gegeben ist die folgende Differentialgleichung

$$\dddot{y}(t) + 6 \cdot \ddot{y}(t) + 11 \cdot \dot{y}(t) + 6 \cdot y(t) = 2 \cdot u(t)$$

mit den Anfangswerten

$$y(t=0) = y_0,$$
$$\dot{y}(t=0) = \dot{y}_0,$$
$$\ddot{y}(t=0) = \ddot{y}_0.$$

**Aufgaben**:

a) Berechnen Sie die vollständige Laplace-Transformierte Y(s).

b) Teilen Sie die Laplace-Transformierte in die Übertragungsfunktion $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$ und dem Verhalten infolge der Anfangswerte auf.

# Rückblick auf Übung 4.)

Gegeben ist die folgende Differentialgleichung

$$\dddot{y}(t) + 6 \cdot \ddot{y}(t) + 11 \cdot \dot{y}(t) + 6 \cdot y(t) = 2 \cdot u(t)$$

mit den Anfangswerten
$$y(t=0) = y_0,$$
$$\dot{y}(t=0) = \dot{y}_0,$$
$$\ddot{y}(t=0) = \ddot{y}_0.$$

$$Y(s) = \underbrace{\frac{2}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6} \cdot U(s)}_{\text{partikuläre Lsg.}} + \underbrace{\frac{y_0 s^2 + (6y_0 + \dot{y}_0)s + (11y_0 + 6\dot{y}_0 + \ddot{y}_0)}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}}_{\text{Verhalten infolge Anfangswerte}}$$

homogene Lsg

$$Y(s) = \underbrace{G(s)}_{\text{Übertragungsfkt.}} U(s)$$

## Übertragungsfunktion - Anwendung in der Regelungstechnik

- Anwendung auf die bisher behandelten lin. Differentialgleichungen
- $a_n y^{(n)} + \cdots + a_2 \ddot{y} + a_1 \dot{y} + a_0 y = b_0 u + b_1 \dot{u} + \cdots + b_m u^{(m)}$ ; $\underline{m \leq n}$

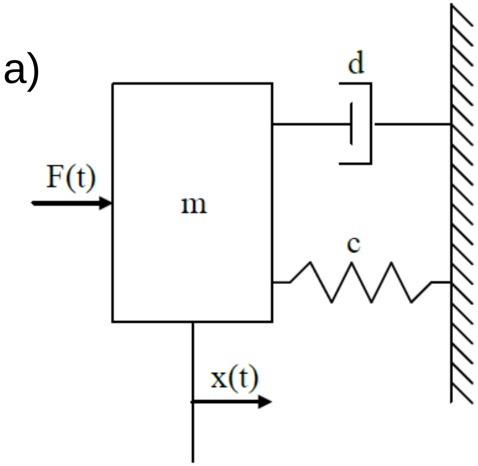
- Anfangsbedingungen werden alle zu Null angenommen (eingeschwungen)
- $y(0) = \dot{y}(0) = \ddot{y}(0) = \cdots = y^{(n)}(0) = 0$

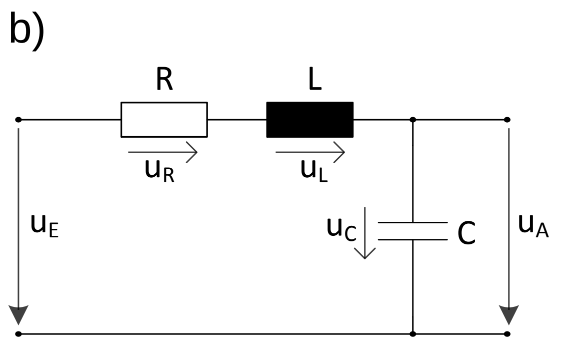
- Anwendung des Differentiationssatzes:
- $[s^n a_n + \cdots + s^2 a_2 + s a_1 + a_o] \cdot Y(s) = [b_0 + s b_1 + \cdots + s^m b_m] \cdot U(s)$

- Verhältnis von Ein- und Ausgangsgrößen ergibt **Übertragungsfunktion**
- $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \boxed{\frac{b_0 + b_1 \cdot s + \cdots + b_m \cdot s^m}{a_0 + a_1 \cdot s + a_2 \cdot s^2 + \cdots + a_n \cdot s^n}}$

# Aufgabe 1: Übertragungsfunktionen linearer Systeme

Gegeben sind die beiden linearen Systeme aus vorherigen Übungen




mit den Differentialgleichungen:

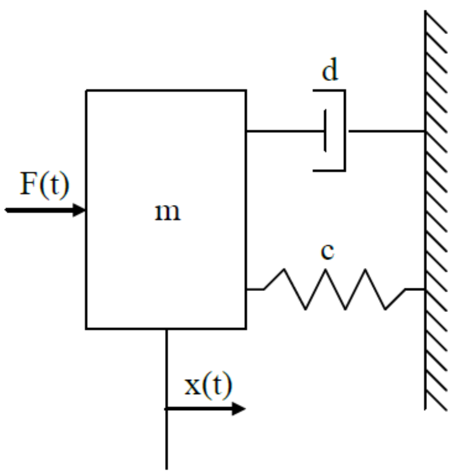
a) $m \cdot \ddot{x}(t) + d \cdot \dot{x}(t) + c \cdot x(t) = F(t)$ (1)

b) $L \cdot C \cdot \ddot{u}_A(t) + R \cdot C \cdot \dot{u}_A(t) + u_A(t) = u_E(t)$ (2)

**Aufgabe:** Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion der beiden Systeme im eingeschwungenen Zustand.

# Aufgabe 1: Übertragungsfunktionen linearer Systeme

**Aufgabe:** Stellen Sie die Übertragungsfunktion des mechanischen Systems auf




$$\ddot{x}(t) : s^2 \cdot X(s) - s \cdot \cancel{x_0}^{\to 0} - \cancel{\dot{x}_0}^{\to 0} = s^2 X(s)$$

$$\dot{x}(t) : s \cdot X(s) - \cancel{x_0}^{\to 0} = s \cdot X(s)$$

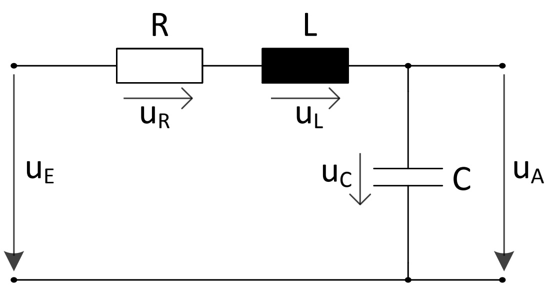
$$x(t) : X(s) \qquad F(t) : F(s)$$

$$m \cdot s^2 X(s) + d \cdot s X(s) + c \cdot X(s) = F(s)$$

$$X(s) = \underbrace{\frac{1}{m s^2 + d s + c}}_{G(s)} \cdot F(s)$$

# Aufgabe 1: Übertragungsfunktionen linearer Systeme

**Aufgabe:** Stellen Sie die Übertragungsfunktion des elektrischen Netzwerkes auf




$\ddot{u}_A(t) : s^2 \cdot U_A(s)$ $\qquad$ $u_A(t) : U_A(s)$

$\dot{u}_A(t) : s \cdot U_A(s)$ $\qquad$ $u_E(t) : U_E(s)$

$$LC \cdot s^2 U_A(s) + RC \cdot s \cdot U_A(s) + U_A(s) = U_E(s)$$

$$U_A(s) = \underbrace{\frac{1}{LC\, s^2 + RC \cdot s + 1}}_{G(s)} \cdot U_E(s)$$

$\underline{PT_2}$

## Aufgabe 2: Lineare Übertragungsglieder

Gegeben sind die folgenden Differentialgleichungen:

- $T_1 \cdot \dot{y}(t) + y(t) = K \cdot u(t)$
- $\ddot{y}(t) + 2D\omega_0 \cdot \dot{y}(t) + \omega_0^2 \cdot y(t) = K \cdot u(t)$
- $T_1 \cdot \ddot{y}(t) + \dot{y}(t) = K \cdot u(t)$
- $T_1 \cdot \ddot{y}(t) + T_2 \cdot \dot{y}(t) + y(t) = K(u(t) + T_D \cdot \dot{u}(t))$

**Aufgabe:** Stellen Sie die Übertragungsfunktionen der vier Differentialgleichungen im eingeschwungenen Zustand mit Hilfe der Laplace-Transformation auf. Klassifizieren Sie anschließend deren Übertragungsverhalten.

# Aufgabe 2: Lineare Übertragungsglieder

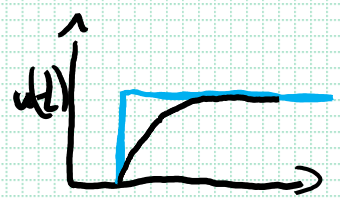
**Aufgabe:** Stellen Sie die Übertragungsfunktion der folgenden Differentialgleichung auf

$$T_1 \cdot \dot{y}(t) + y(t) = K \cdot u(t)$$

$$T_1 \cdot s \cdot Y(s) + Y(s) = K \cdot U(s)$$

$$Y(s)\left[T_1 \cdot s + 1\right] = K \cdot U(s)$$

$$Y(s) = \underbrace{\frac{K}{T_1 s + 1}}_{G(s)} \cdot U(s)$$




$PT_1$ : Proportionales Verzögerungsverhalten 1. Ordnung

## Aufgabe 2: Lineare Übertragungsglieder

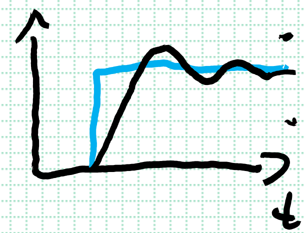
**Aufgabe:** Stellen Sie die Übertragungsfunktion der folgenden Differentialgleichung auf

$$\ddot{y}(t) + 2D\omega_0 \cdot \dot{y}(t) + \omega_0^2 \cdot y(t) = K \cdot u(t)$$

$$s^2 \cdot Y(s) + 2D\omega_0 \cdot s \cdot Y(s) + \omega_0^2 \cdot Y(s) = K \cdot U(s)$$

$$\vdots$$

$$Y(s) = \underbrace{\frac{K}{s^2 + 2D\omega_0 \cdot s + \omega_0^2}}_{G} \cdot U(s)$$



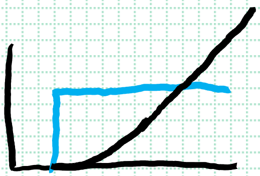

$PT_2$ (schwingungsfähig)

# Aufgabe 2: Lineare Übertragungsglieder

**Aufgabe:** Stellen Sie die Übertragungsfunktion der folgenden Differentialgleichung auf

$$T_1 \cdot \ddot{y}(t) + \dot{y}(t) = K \cdot u(t)$$

$$T_1 \cdot s^2 \, Y(s) + s \cdot Y(s) = K \cdot U(s)$$



$$Y(s) = \frac{K}{T_1 s^2 + s} = \underbrace{\overbrace{\frac{1}{s}}^{I} \cdot \overbrace{\frac{K}{1 + T_1 \cdot s}}^{PT_1}}_{G(s)} \cdot U(s)$$

$IT_1$

# Aufgabe 2: Lineare Übertragungsglieder

**Aufgabe:** Stellen Sie die Übertragungsfunktion der folgenden Differentialgleichung auf

$$T_1 \cdot \ddot{y}(t) + T_2 \cdot \dot{y}(t) + y(t) = K(u(t) + T_D \cdot \dot{u}(t))$$

$$T_1 \cdot s^2 \cdot Y(s) + T_2 \cdot s \cdot Y(s) + Y(s) = K\left[U(s) + T_D \cdot s \cdot U(s)\right]$$

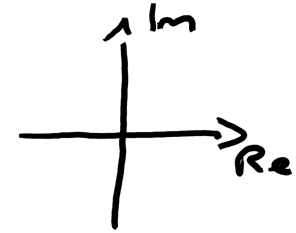
$$\Leftrightarrow Y(s)\left[T_1 \cdot s^2 + T_2 \cdot s + 1\right] = U(s) \; K\left[1 + T_D \, s\right]$$

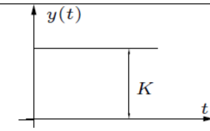
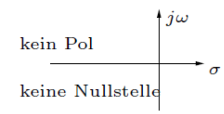
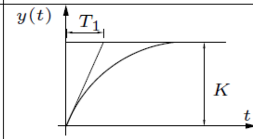
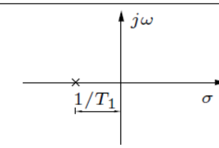
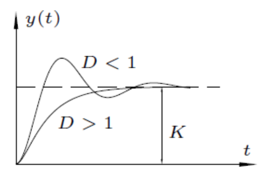
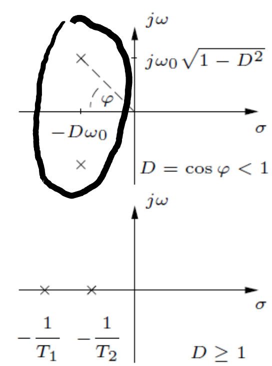
$$Y(s) = \frac{K\left[1 + T_D \, s\right]}{T_1 \, s^2 + T_2 \, s + 1} \, U(s) \qquad \boxed{PDT_2}$$

$$= \underbrace{\overbrace{\left[1 + T_D \cdot s\right]}^{D} \cdot \overbrace{\frac{K}{T_1 s^2 + T_2 \cdot s + 1}}^{PT_2}}_{G(s)} \cdot U(s)$$

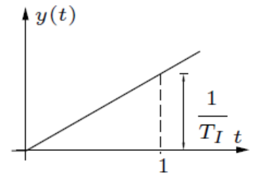
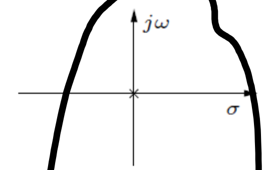
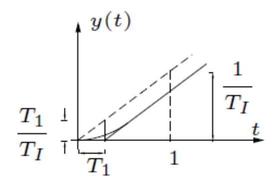
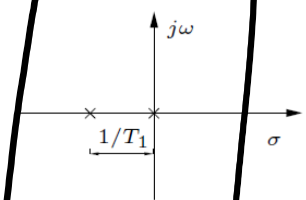
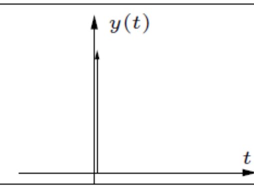
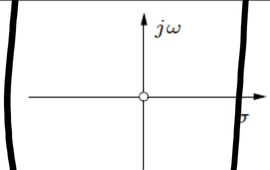
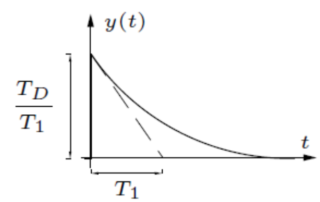
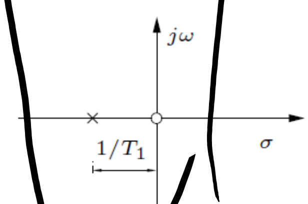
# Lineare Übertragungsglieder

→ Sprungantwort




| System | Zeitbereich<br>Bildbereich (Übertragungsfkt.) | Übergangsfunktion | s–Ebene<br>× Pol ○ Nullstelle |
|---|---|---|---|
| → $P$ | $y(t) = K\,u(t)$<br>$G(s) = K$ |  |  |
| → $PT_1$ | $T_1\,\dot{y}(t) + y(t) = K\,u(t)$<br>$G(s) = K\dfrac{1}{1 + T_1\,s}$ |  |  |
| $PT_2$ | $\dfrac{1}{\omega_0^2}\ddot{y}(t) + \dfrac{2\,D}{\omega_0}\dot{y}(t) + y(t)$<br>$= K\,u(t)$<br>$G(s) = K\dfrac{1}{\frac{1}{\omega_0^2}s^2 + \frac{2\,D}{\omega_0}s + 1}$<br>$D < 1$ : konjugiert komplexe Wurzeln der char. Gleichung<br>$\lambda_{1,2} = -\omega_0(D \pm j\sqrt{1 - D^2})$<br>$D \geq 1$ : reelle Wurzeln der char. Gleichung<br>$\lambda_{1,2} = -\omega_0(D \pm \sqrt{D^2 - 1}) = -1/T_{1,2}$ |  |  |

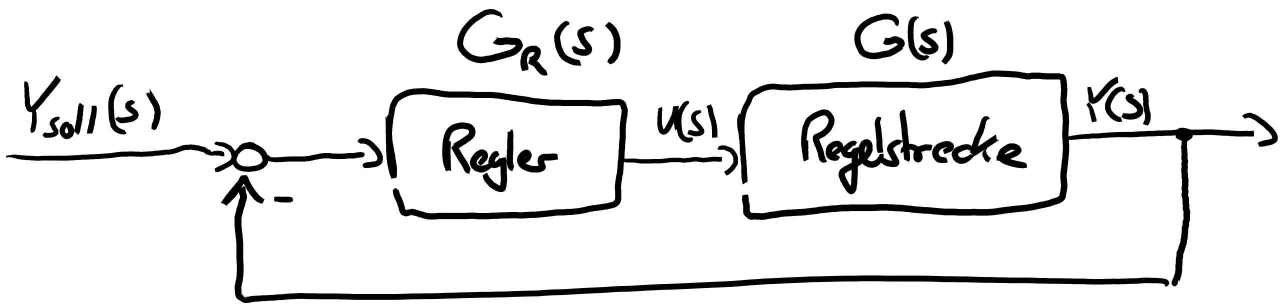
# Lineare Übertragungsglieder

| | | | |
|---|---|---|---|
| $I$ | $y(t) = \frac{1}{T_I}\int u \mathrm{d}t$<br>$G(s) = \frac{1}{T_I\, s}$ |  |  |
| $IT_1$ | $T_1\,\dot{y}(t) + y(t) =$<br>$\frac{1}{T_I}\int u(t)\mathrm{d}t$<br>$G(s) = \frac{1}{T_I\, s(1+T_1\, s)}$ |  |  |
| $D$ | $y(t) = T_D \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$<br>$G(s) = T_D\, s$ |  |  |
| $DT_1$ | $T_1\dot{y}(t) + y(t) = T_D \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$<br>$G(s) = T_D \frac{s}{1+T_1\, s}$ |  |  |

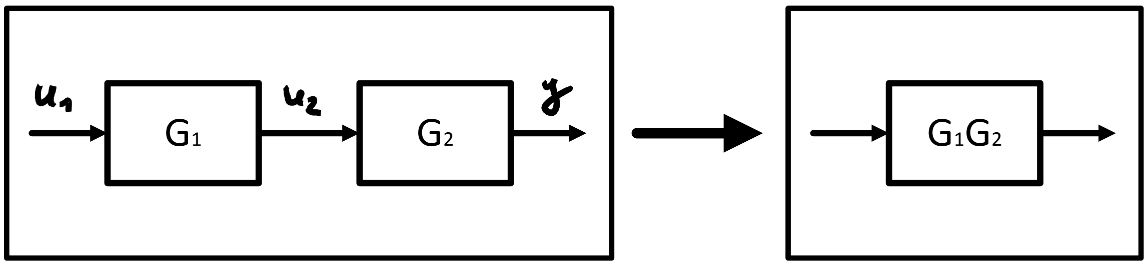
u.v.m.

## Zusammenfassen von Blockschaltbildern

- Technische Sachverhalte in der Regelungstechnik häufig mit Blockschaltbildern beschrieben (Standard-Regelkreis)
- Jeder Block beschreibt ein dynamisches Verhalten (Übertragungsfunktion)
- Zur Bestimmung des Gesamtverhaltens müssen alle Dynamiken zusammengefasst werden
- Neben dem „logischen" Zusammenfassen der Schaltbilder existieren Rechenregeln
- Gestalten sich ähnlich wie Widerstände in el. Schaltkreisen



## Reihenschaltung



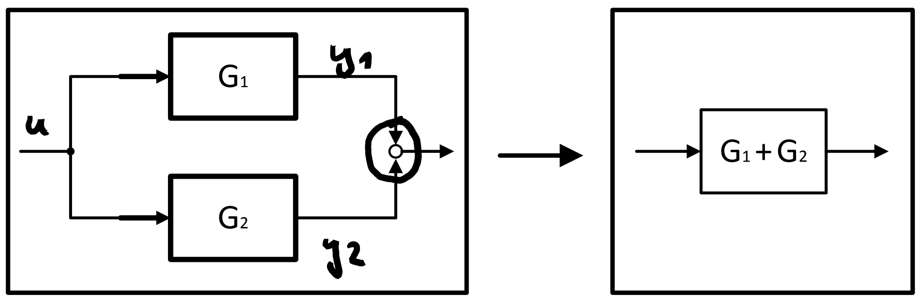

- Reihenschaltung zweier Übertragungsglieder
- Zusammenfassung ist Produkt aus beiden Elementen
- $\boxed{G(s) = G_1(s) \cdot G_2(s)}$

$y = G_2 \cdot u_2$

$u_2 = G_1 u_1$

$y = \underbrace{G_2 \cdot G_1}\, u_1$

## Parallelschaltung




- Parallelschaltung zweier Übertragungsglieder
- Zusammenfassung ist Summe aus beiden Elementen
- $\boxed{G(s) = G_1(s) + G_2(s)}$

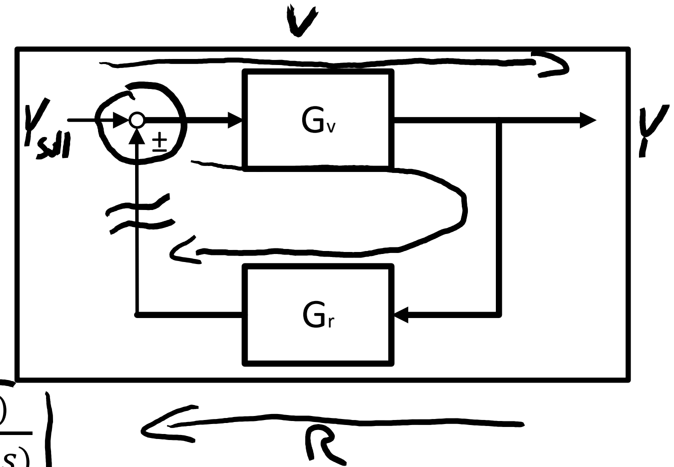
$$y = y_1 + y_2$$

$$y = u \cdot G_1 + u \cdot G_2$$

$$= u(G_1 + G_2)$$

## Rückkopplung


- Rückkopplung als besondere Schaltung zweier Übertragungsglieder in der Regelungstechnik
- Charakterisiert durch einen Vorwärtszweig $G_v(s)$ und Rückführung $G_r(s)$



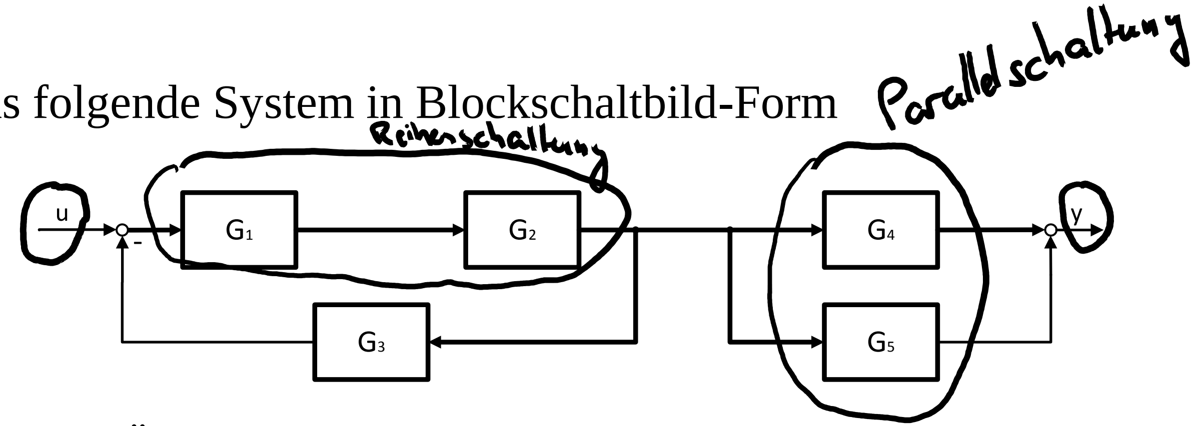

- Zusammenfassung wie folgt:
- Positive Rückführung: $G(s) = \frac{G_v(s)}{1-G_v(s)G_r(s)} = \frac{G_v(s)}{1-G_0(s)}$
- Negative Rückführung: $G(s) = \frac{G_v(s)}{1+G_v(s)G_r(s)} = \frac{G_v(s)}{1+G_0(s)}$

$G_v \cdot G_r = G_o$

- Die Übertragungsfunktion $G_o(s)$ wird auch als **offener RK** bezeichnet

## Aufgabe 3: Zusammenfassen von Blockschaltbildern

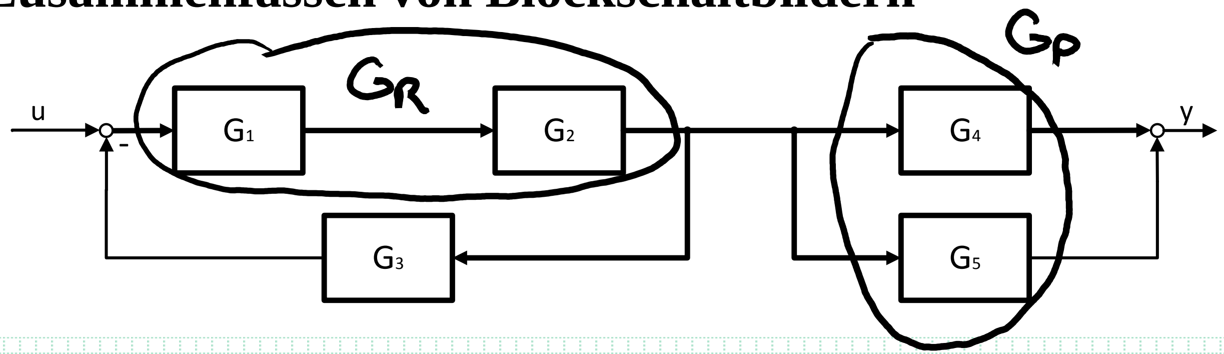
Gegeben ist das folgende System in Blockschaltbild-Form




mit den allgemeinen Übertragungsfunktionen $G_1(s) - G_5(s)$

**Aufgabe**: Fassen Sie das oben aufgeführte System zu einer Übertragungsfunktion $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$ zusammen. Verwenden Sie hierzu die Gesetze zum Zusammenfassen von Reihen- und Parallelschaltungen sowie Rückkopplungen.

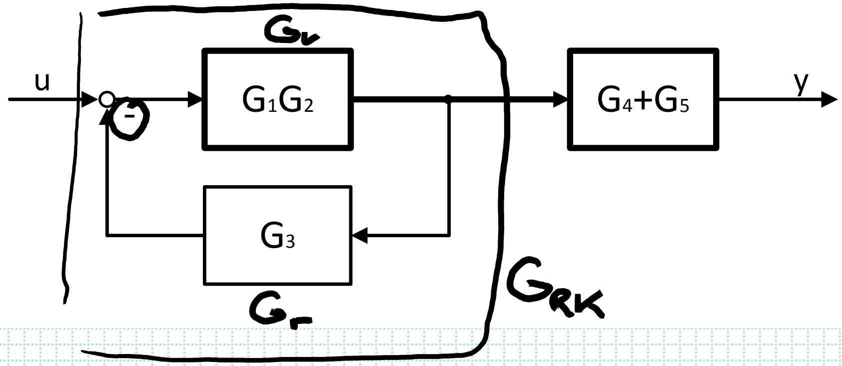
# Aufgabe 3: Zusammenfassen von Blockschaltbildern




$$G_R(s) = G_1(s) \cdot G_2(s)$$

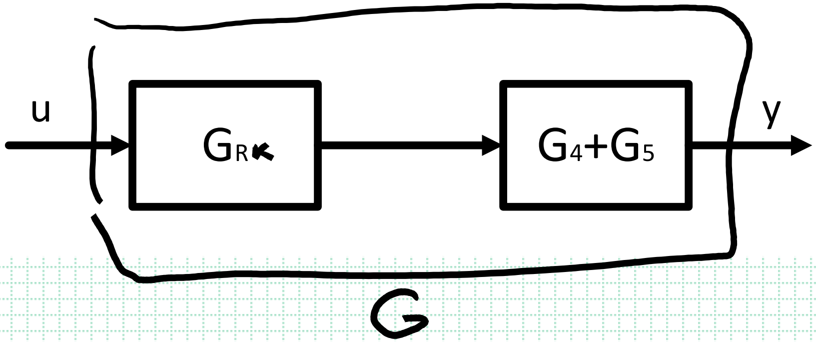
$$G_P(s) = G_4(s) + G_5(s)$$

# Aufgabe 3: Zusammenfassen von Blockschaltbildern



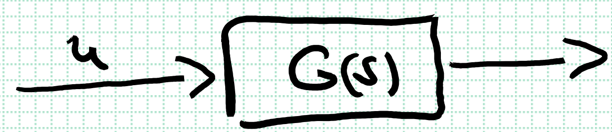

$$G_{RK}(s) = \frac{G_1(s) \cdot G_2(s)}{1 + G_1(s)\, G_2(s)\, G_3(s)}$$

# Aufgabe 3: Zusammenfassen von Blockschaltbildern



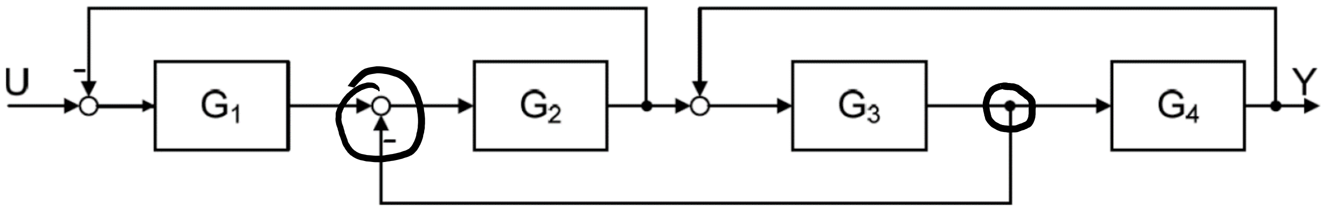

$$G(s) = G_{RK}(s) \left( G_4(s) + G_5(s) \right)$$

$$= \boxed{\frac{G_1(s)\, G_2(s) \left( G_4(s) + G_5(s) \right)}{1 + G_1(s)\, G_2(s)\, G_3(s)}}$$



# Aufgabe 4: Zusammenfassen von Blockschaltbildern

Gegeben ist das folgende Blockschaltbild

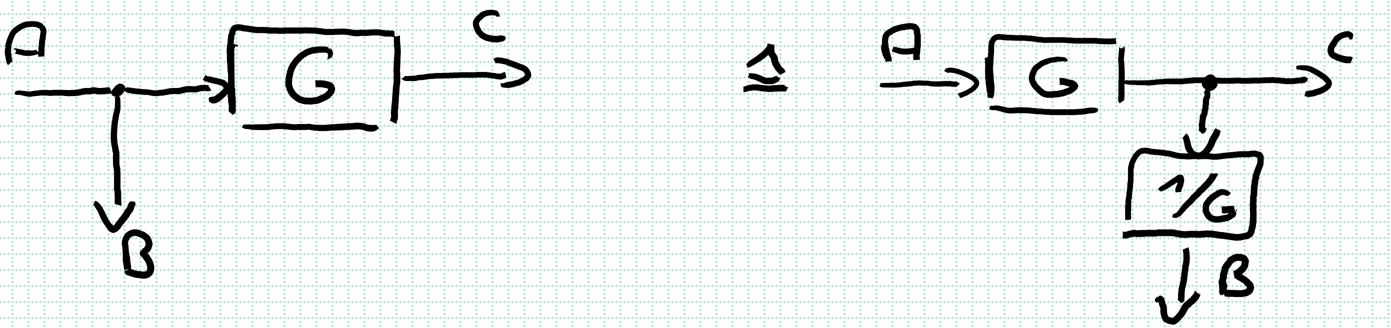


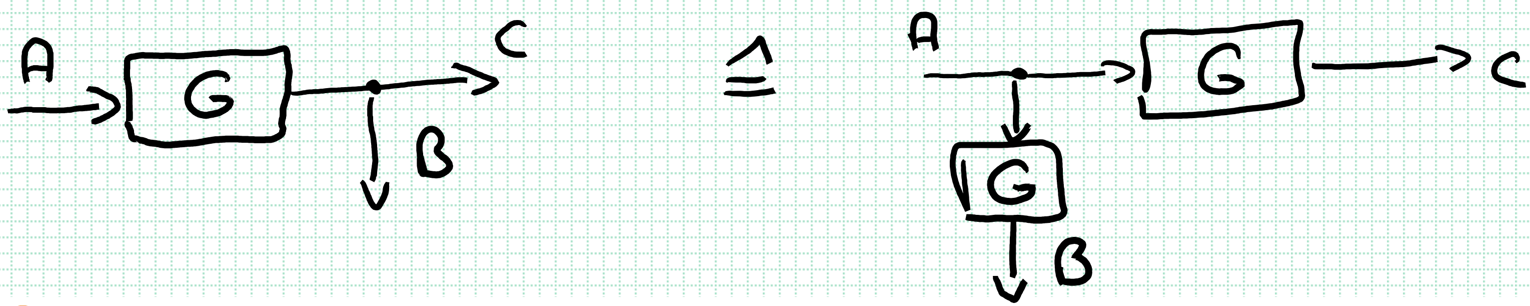

mit den allgemeinen Übertragungsfunktionen $G_1(s) - G_4(s)$

**Aufgabe**: Fassen Sie das oben aufgeführte System zu einer Übertragungsfunktion $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$ zusammen.

## Aufgabe 4: Tricks beim Zusammenfassen (Verschieben)

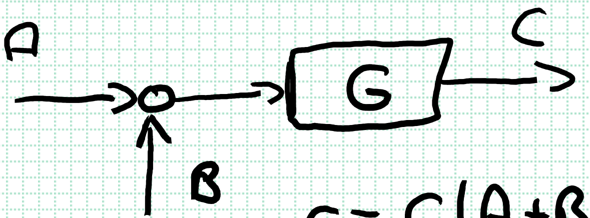
Verzweigungen



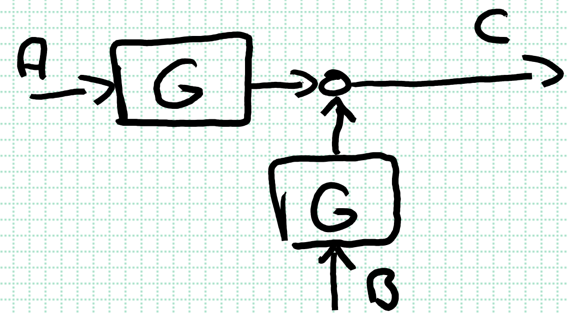



# Aufgabe 4: Tricks beim Zusammenfassen

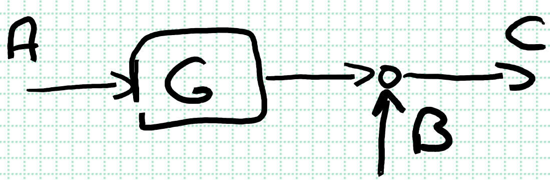
Summation



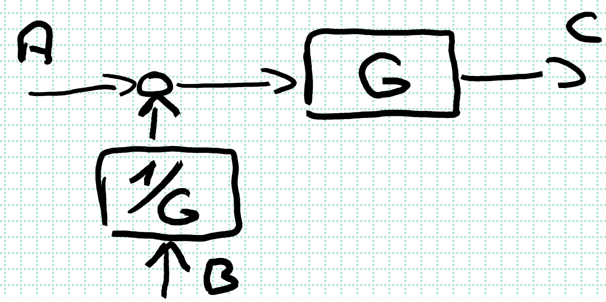

$\hat{=}$




$$C = G(A+B)$$
$$= GA + GB$$

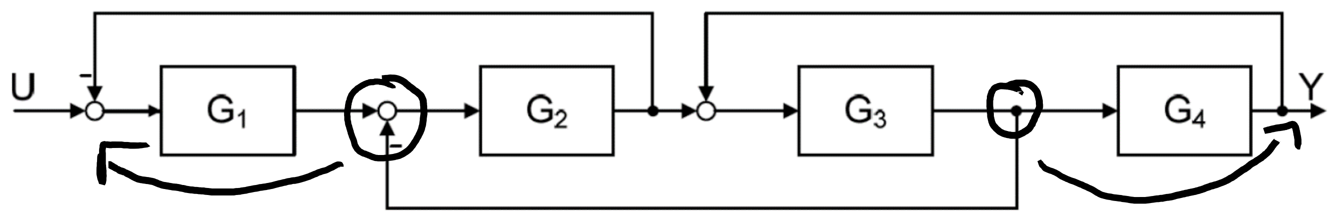


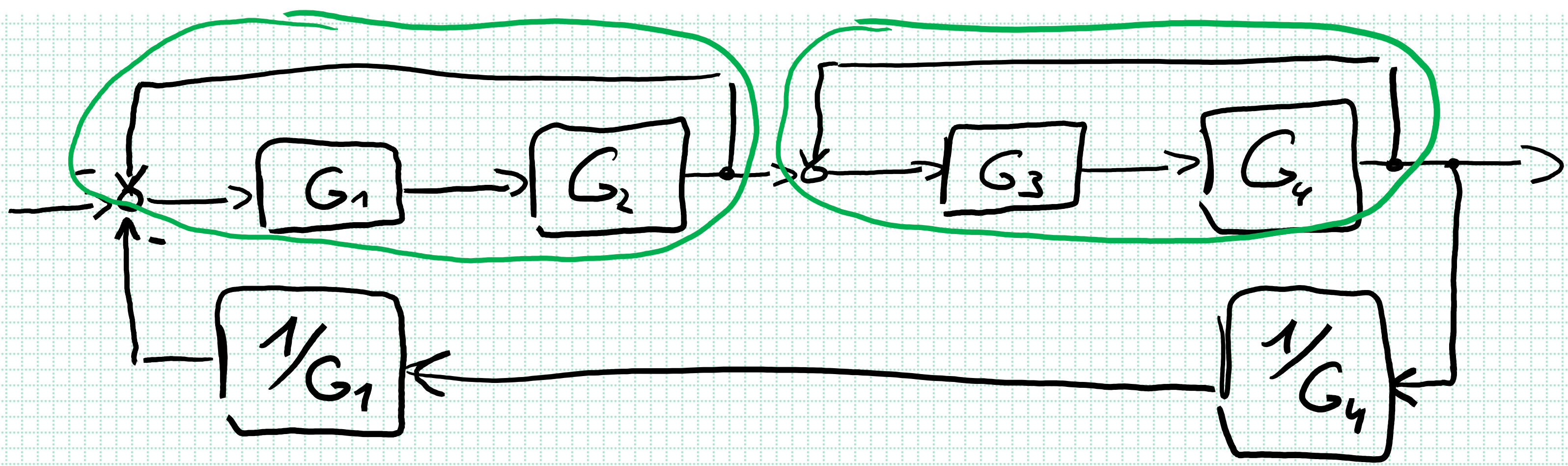

$\hat{=}$



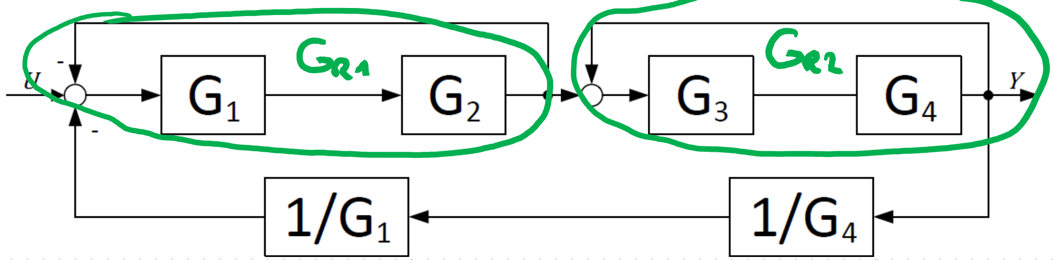

$$C = GA + B$$
$$C = G\left(A + \frac{1}{G}B\right)$$

# Aufgabe 4: Zusammenfassen von Blockschaltbildern



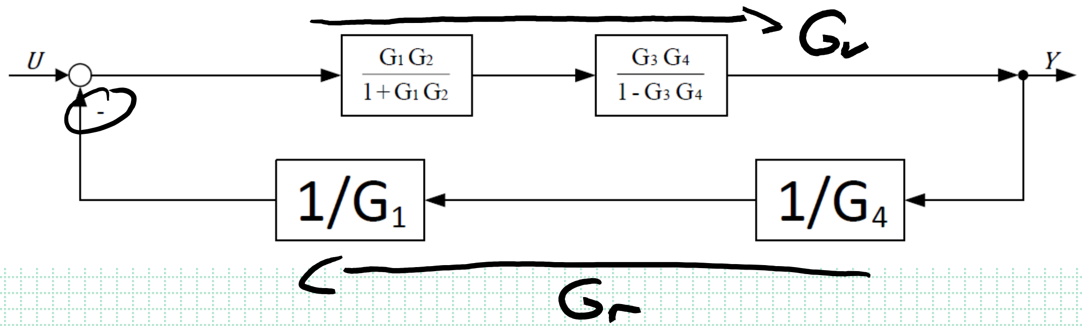
## Aufgabe 4: Zusammenfassen von Blockschaltbildern




$$G_{R1} = \frac{G_1 G_2}{1 + G_1 G_2}$$

$$G_{R2} = \frac{G_3 G_4}{1 - G_3 G_4}$$

## Aufgabe 4: Zusammenfassen von Blockschaltbildern

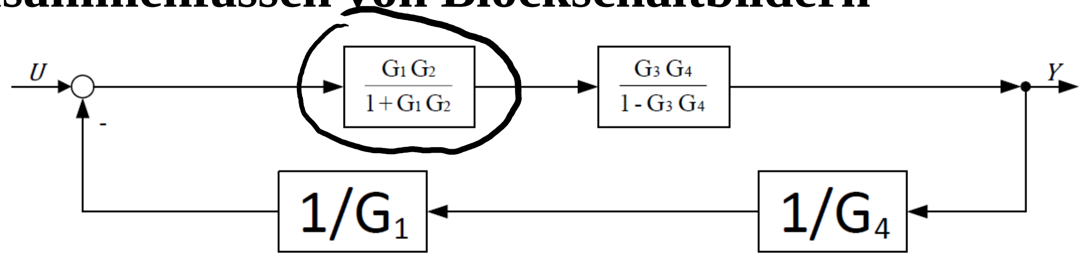



$$G_v = \frac{G_1 G_2 G_3 G_4}{(1 + G_1 G_2)(1 - G_3 G_4)} \qquad G_r = \frac{1}{G_1 \cdot G_4}$$

$$G_0 = G_v \cdot G_r = \frac{G_2 G_3}{(1 + G_1 G_2)(1 - G_3 G_4)}$$

$$1 + G_0 = \frac{(1 + G_1 G_2)(1 - G_3 G_4) + G_2 G_3}{(1 + G_1 G_2)(1 - G_3 G_4)}$$

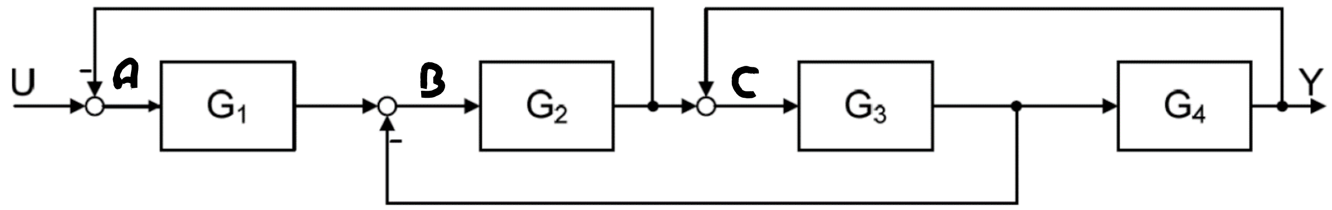
## Aufgabe 4: Zusammenfassen von Blockschaltbildern




$$G(s) = \frac{G_v}{1 + \underbrace{G_0}_{G_v G_r}} = \frac{\cancel{(1+G_1G_2)(1-G_3G_4)}}{(1+G_1G_2)(1-G_3G_4)+G_2G_3} \cdot \frac{G_1G_2G_3G_4}{\cancel{(1+G_1G_2)(1-G_3G_4)}}$$

$$= \frac{G_1G_2G_3G_4}{(1+G_1G_2)(1-G_3G_4)+G_2G_3}$$

# Aufgabe 4: Zusammenfassen von Blockschaltbildern




$$\boxed{Y = G_3 G_4 \cdot C} \qquad (1)$$

$$C = Y + G_2 B \qquad (2)$$

$$B = -G_3 C + G_1 A \qquad (3)$$

$$A = U - G_2 B \qquad (4)$$

(4) in (3): $B = -G_3 C + G_1 (U - G_2 B)$

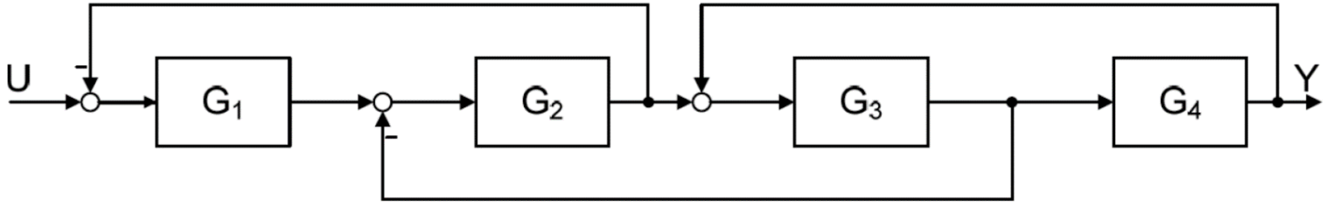
$\vdots$

$$\underline{B = -\frac{G_3}{1+G_1G_2} C + \frac{G_1}{1+G_1G_2} U}$$

in (2)

$$C = Y - \frac{G_2 G_3}{1+G_1G_2} C + \frac{G_2 G_1}{1+G_1G_2}$$

# Aufgabe 4: Zusammenfassen von Blockschaltbildern




$$C = \frac{1+G_1G_2}{1+G_1G_2+G_2G_3}\,Y + \frac{G_1G_2}{1+G_1G_2+G_2G_3}\,U$$

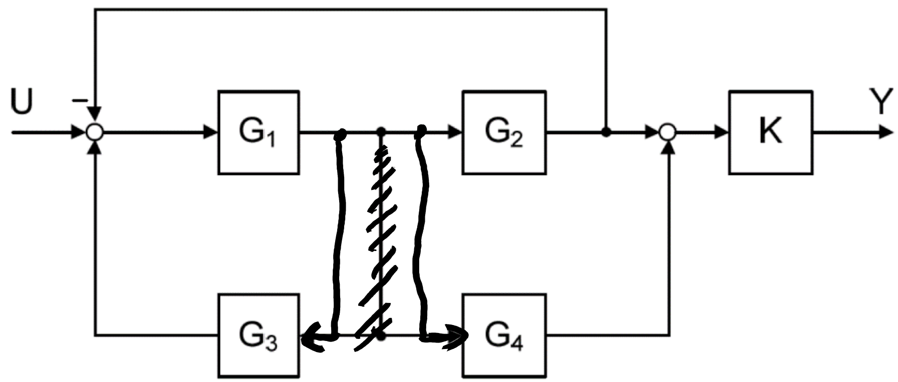
In (1), nach Y auflösen

$$Y = \frac{G_3G_4(1+G_1G_2)}{1+G_1G_2+G_2G_3}\,Y + \frac{G_1G_2G_3G_4}{1+G_1G_2+G_2G_3}\,U$$

$$Y = \frac{G_1G_2G_3G_4}{(1+G_1G_2)(1-G_3G_4)+G_2G_3}$$

# Aufgabe 4: Zusammenfassen von Blockschaltbildern

Gegeben ist das folgende Blockschaltbild




mit den allgemeinen Übertragungsfunktionen $G_1(s) - G_4(s)$ sowie $K(s)$

**Aufgabe**: Fassen Sie das oben aufgeführte System zu einer Übertragungsfunktion $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$ zusammen.