4. Übung zur Vorlesung „Steuer- und Regelungstechnik“

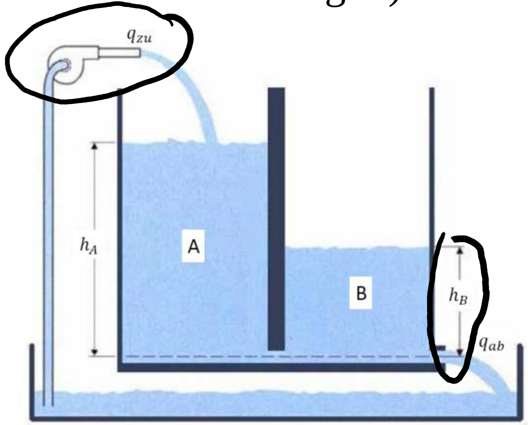
Laplace-Transformation

Felix Goßmann M.Sc.

Institut für Steuer- und Regelungstechnik
Fakultät für Luft- und Raumfahrttechnik
Universität der Bundeswehr München

Aufgabe 1: Tankbehälter

Gegeben ist der dargestellte Tankbehälter aus Übung 3.)



In der vorherigen Übung 3.) wurden die folgenden linearisierten Differentialgleichungen in der Ruhelage des Systems bei einem konstanten Zufluss $q_{zu,0} > 0$ bestimmt. Die Δ in der linearisierten Differentialgleichung wurden aus Gründen der Übersichtlichkeit weggelassen

$$\dot{h}_A = k_q \cdot q_{zu} + k_{A,1} \cdot h_A + k_{B,1} \cdot h_B$$
$$\dot{h}_B = k_{A,2} \cdot h_A + k_{B,2} \cdot h_B$$

Aufgabe 1: Tankbehälter

In der vorherigen Übung 3.) wurden die folgenden linearisierten Differentialgleichungen in der Ruhelage des Systems bei einem konstanten Zufluss $q_{zu,0} > 0$ bestimmt. Die Δ in der linearisierten Differentialgleichung wurden aus Gründen der Übersichtlichkeit weggelassen

$$\dot{h}_A = k_q \cdot q_{zu} + k_{A,1} \cdot h_A + k_{B,1} \cdot h_B$$
$$\dot{h}_B = k_{A,2} \cdot h_A + k_{B,2} \cdot h_B$$

Aufgaben:

a) Geben Sie eine Differentialgleichung an, die den Füllstand h_B in Abhängigkeit vom Zufluss q_{zu} beschreibt.

b) Transformieren Sie beide gegebenen Differentialgleichungen in den Laplace-Bereich. Geben Sie einen Ausdruck für den Füllstand $H_B(s)$ in Abhängigkeit des Zuflusses an.

Aufgabe 1: Tankbehälter

Aufgabe: a) Geben Sie eine Differentialgleichung an, die den Füllstand h_B in Abhängigkeit vom Zufluss q_{zu} beschreibt.

$$\dot{h}_B = K_{A,2} \cdot h_A + K_{B,2} \cdot h_B$$

$$\ddot{h}_B = K_{A,2} \cdot \dot{h}_A + K_{B,2} \cdot \dot{h}_B$$

$$\dot{h}_A = K_q \cdot q_{zu} + K_{A,1} \cdot h_A + K_{B,1} \cdot h_B$$

$$\ddot{h}_B = K_{A,2} K_q \, q_{zu} + K_{A,2} K_{A,1} \, h_A + K_{A,2} K_{B,1} \cdot h_B + K_{B,2} \cdot \dot{h}_B$$

Aufgabe 1: Tankbehälter

Aufgabe: a) Geben Sie eine Differentialgleichung an, die den Füllstand h_B in Abhängigkeit vom Zufluss q_{zu} beschreibt.

$$h_A = \frac{1}{K_{A,2}} \cdot \dot{h}_B - \frac{K_{B,2}}{K_{A,2}} \cdot h_B$$

$$\ddot{h}_B = (K_{A,1} + K_{B,2}) \cdot \dot{h}_B + (K_{A,2} K_{B,1} - K_{A,1} K_{B,2}) \, h_B + K_{A,2} \cdot K_q \cdot q_{zu}$$

Laplace-Transformation

- Ordnet einer Zeitfunktion $f(t)$ eine andere Funktion $F(s)$ im Bildbereich zu
- Eindeutig und umkehrbar

Laplace-Bereich

- Anwendbar bei **linearen** Differentialgleichungen
    - Konstante Koeffizienten
    - Vorgegebene Anfangswerte und Eingangsgrößen
    - $f(t) = 0$ für $t < 0$

- Differentiation und Integration gehen in algebraische Operationen über
- Abbilder von Differentialgleichungen ergeben algebraische Gleichungen
- Einfacheres Umformen und Verknüpfen

Transformation

- Zusammenhang zwischen Zeit- und Bildfunktion
- $F(s) = \int_0^\infty f(t) \cdot e^{-st} dt = \mathrm{L}\{f(t)\}$
- $f(t) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi j} \cdot \int_{\alpha - j\infty}^{\alpha + j\infty} F(s) \cdot e^{st} ds & für\ t \geq 0 \\ 0 & für\ t < 0 \end{cases} = \mathrm{L}^{-1}\{f(t)\}$
- Komplexe Frequenz $\boxed{s = \sigma + j\omega}$ mit positivem Realteil
- s ist dimensionslos
- Schreibweise der Verknüpfung: $f(t)$ ○—● $F(s)$ bzw. $F(s)$ ●—○ $f(t)$

Anwendung der Transformation

- Bildfunktion des Einheitssprunges $f(t) = 1(t)$
- Anwendung der vorgestellten Transformation:

- $F(s) = \int_0^\infty 1(\mathrm{t}) \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{st}} \mathrm{dt} = \left[-\frac{1}{s} \cdot e^{-st}\right] = -\frac{1}{s}(0-1) = \frac{1}{s}$

- Bildfunktion der Exponentialfunktion $f(t) = e^{at}$

- $F(s) = \int_0^\infty e^{at} \cdot e^{-st} dt = \int_0^\infty e^{-t(s-a)} dt = \left[-\frac{1}{s-a} \cdot e^{-t(s-a)}\right] = \frac{1}{s-a}$

Laplace-Korrespondenzen

- Zahlreiche häufig vorkommende Funktionen liegen in Korrespondenztafeln vor
- Vereinfacht Anwendung in der Praxis, keine Transformation notwendig

Nr.	Zeitfunktion	Transformierte
1	$1(t)$	$\frac{1}{s}$
2	$t^n \cdot 1(t)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
3	$e^{-at} \cdot 1(t)$	$\frac{1}{s+a}$
4	$\frac{1}{T} e^{-\frac{t}{T}} \cdot 1(t)$	$\frac{1}{1+sT}$
5	$\frac{1}{a}\left(1-e^{-at}\right) \cdot 1(t)$	$\frac{1}{s(s+a)}$
6	$\left(1-e^{-t/T}\right) \cdot 1(t)$	$\frac{1}{s(1+sT)}$
7	$\frac{1}{b-a}\left(e^{-at}-e^{-bt}\right) \cdot 1(t)$	$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$

- Auszug
- Vollständige Tabelle als Hilfsblatt auf Homepage

Eigenschaften der Laplace-Transformation

- Linearität: $a \cdot f(t) ∘\!\!-\!\!\bullet\ a \cdot F(s)\ ;\ a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t) ∘\!\!-\!\!\bullet\ a_1 F_1(s) + a_2 F_2(s)$
- Verschiebung: $f(t - T_t)\ ∘\!\!-\!\!\bullet\ F(s) \cdot e^{-sT_t}\quad (T_t \geq 0)$
- Differentiation: $\dot{f}(t)\ ∘\!\!-\!\!\bullet\ s \cdot F(s) - f(0)$

  $\ddot{f}(t)\ ∘\!\!-\!\!\bullet\ s^2 \cdot F(s) - s \cdot f(0) - \dot{f}(0)$

  $f^{(n)}(t)\ ∘\!\!-\!\!\bullet\ s^n \cdot F(s) - \sum_{k=1}^{n} s^{n-k} \cdot f^{(k-1)}(0)$
- Integration: $\int_0^t f(\tau)d\tau\ ∘\!\!-\!\!\bullet\ \frac{1}{s} \cdot F(s)$
- Anfangswert: $\lim_{t\to 0} f(t)\ ∘\!\!-\!\!\bullet\ \lim_{s\to\infty} s \cdot F(s)$
- Endwert: $\lim_{t\to\infty} f(t)\ ∘\!\!-\!\!\bullet\ \lim_{s\to 0} s \cdot F(s)$

Aufgabe 1: Tankbehälter

Aufgabe: b) Transformieren Sie beide gegebenen Differentialgleichungen in den Laplace-Bereich. Geben Sie einen Ausdruck für den Füllstand $H_B(s)$ in Abhängigkeit des Zuflusses an.

$$\dot h_A = K_q \; q_{zu} + K_{A,1} \; h_A + K_{B,1} \; h_B \qquad \dot h_B = K_{A,2} \cdot h_A + K_{B,2} \cdot h_B$$

$$\dot h_A(t) : \; s \cdot H_A(s) - h_{A,0} \qquad \dot h_B(t) : \; s \, H_B(s) - h_{B,0}$$

$$h_A(t) : \; H_A(s) \qquad h_B(t) : \; H_B(s)$$

$$q_{zu}(t) : \; Q_{zu}(s)$$

$$\boxed{s \cdot H_B(s) - h_{B,0} = K_{A,2} \, H_A(s) + K_{B,2} \, H_B(s)}$$

$$\boxed{s \cdot H_A(s) - h_{A,0} = K_q \cdot Q_{zu}(s) + K_{A,1} \cdot H_A(s) + K_{B,1} \cdot H_B(s)}$$

Aufgabe 1: Tankbehälter

Aufgabe: b) Transformieren Sie beide gegebenen Differentialgleichungen in den Laplace-Bereich. Geben Sie einen Ausdruck für den Füllstand $H_B(s)$ in Abhängigkeit des Zuflusses an.

$$H_A(s)\,(s - k_{A,1}) = k_q \cdot Q_{zu}(s) + k_{B,1} \cdot H_B(s) + h_{A,0}$$

$$H_A(s) = \frac{k_q}{(s - k_{A,1})} Q_{zu}(s) + \frac{k_{B,1}}{(s - k_{A,1})} H_B(s) + \frac{h_{A,0}}{(s - k_{A,1})}$$

$$H_B(s)\,(s - k_{B,2}) = k_{A,2}\, H_A(s) + h_{B,0}$$

$$\Rightarrow H_B(s)\,(s - k_{B,2}) = \frac{k_{A,2}\, k_q}{(s - k_{A,1})} Q_{zu}(s) + \frac{k_{A,2}\, k_{B,1}}{(s - k_{A,1})} H_B(s) + \frac{h_{A,0}\, k_{A,2}}{(s - k_{A,1})} + h_{B,0}$$

Aufgabe 1: Tankbehälter

Aufgabe: b) Transformieren Sie beide gegebenen Differentialgleichungen in den Laplace-Bereich. Geben Sie einen Ausdruck für den Füllstand $H_B(s)$ in Abhängigkeit des Zuflusses an.

$$H_B(s) = \frac{k_q k_{A,2}}{(s-k_{B,2})(s-k_{A,1}) - k_{B,1}k_{A,2}} \cdot \cancelto{0}{Q_{zu}(s)} \quad \Big] \text{ partikuläre Lösung}$$

$$+$$

$$+ \frac{h_{A,0}k_{A,2} + h_{B,0}(s-k_{A,1})}{(s-k_{B,2})(s-k_{A,1}) - k_{B,1}k_{A,2}} \quad \Big] \boxed{\text{homogene Lösung}}$$

– vollständige Lösung der DGL

Aufgabe 1: Tankbehälter

Es werden weiterhin die linearisierten Differentialgleichungen aus Übung 3.) betrachtet

$$\dot{h}_A = k_q \cdot q_{zu} + k_{A,1} \cdot h_A + k_{B,1} \cdot h_B$$
$$\dot{h}_B = k_{A,2} \cdot h_A + k_{B,2} \cdot h_B$$

<u>Hinweis</u>: *Im Folgenden gilt:* $k_{A,1} = k_{B,1} = 1,\ k_{A,2} = k_{B,2} = -2,\ \ h_{A,0} = 2,\ h_{B,0} = 1$

Aufgabe: c) Bestimmen Sie den zeitlichen Verlauf des <u>Füllstandes</u> $h_B(t)$ der aus den gegebenen Anfangswerten für $h_{A,0}$ und $h_{B,0}$ resultiert. Es wird angenommen, dass keine zusätzliche Flüssigkeit in den Tank A fließt ($q_{zu} = 0$).

Aufgabe 1: Tankbehälter

Aufgabe: c) Bestimmen Sie den zeitlichen Verlauf des Füllstandes $h_B(t)$ der aus den gegebenen Anfangswerten für $h_{A,0}$ und $h_{B,0}$ resultiert. Es wird angenommen, dass keine zusätzliche Flüssigkeit in den Tank A fließt ($q_{zu} = 0$).

$$H_B(s) = \frac{h_{A,0}\, k_{A,2} + h_{B,0}(s - k_{A,1})}{(s - k_{B,2})(s - k_{A,1}) - k_{B,1} k_{A,2}}$$

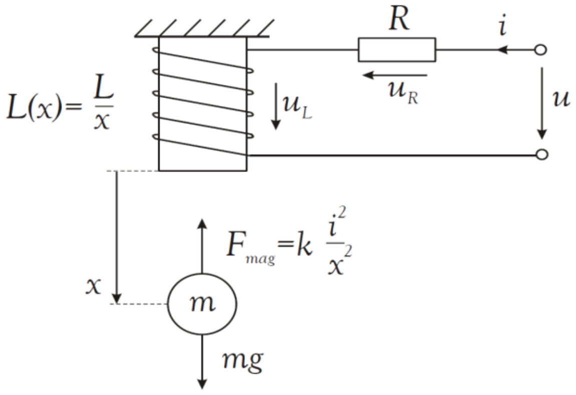
$$= \frac{2 \cdot 1 + 1 \cdot (s - (-2))}{(s-1)(s-(-2)) - (-2) \cdot 1} = \frac{s+4}{s^2+s} = \frac{s+4}{s(s+1)} \rightarrow \text{Nr. 11}$$

11	$\left(\frac{a}{b} + \frac{b-a}{b} \cdot e^{-bt}\right) \cdot 1(t)$	$\frac{(s+a)}{s(s+b)}$

$$H_B(s) = \frac{s+4}{s(s+1)} \longrightarrow h_B(t) = \frac{4}{1} + \frac{1-4}{1} e^{-1 \cdot t} = 4 - 3e^{-t}$$

Aufgabe 2: Elektrischer Hubmagnet

Gegeben sei das System des elektrischen Hubmagneten aus Übung 2.)



Es gelten die gleichen Angaben wie in Übung 2.). Außerdem sind aus der Übung die folgenden linearisierten Differentialgleichungen in einer Ruhelage mit der konstanten Spannung $u_0 \geq 0$ bekannt:

$$\frac{\partial i}{\partial t} = k_{i,1} \cdot i + k_u \cdot u \qquad (1)$$

$$\ddot{x} = k_x \cdot x - k_{i,2} \cdot i \qquad (2)$$

Aufgabe 2: Elektrischer Hubmagnet

Es gelten die gleichen Angaben wie in Übung 2.). Außerdem sind aus der Übung die folgenden linearisierten Differentialgleichungen in einer Ruhelage mit der konstanten Spannung $u_0 \geq 0$ bekannt:

$$\frac{\partial i}{\partial t} = k_{i,1} \cdot i + k_u \cdot u \quad (1)$$

$$\ddot{x} = k_x \cdot x - k_{i,2} \cdot i \quad (2)$$

<u>Hinweis</u>: Die Δ wurden in der Gleichung aus Gründen der Übersichtlichkeit weggelassen

Aufgaben: a) Transformieren Sie die beiden Differentialgleichungen mit Hilfe der Laplace-Transformation in den Bildbereich

b) Geben Sie die vollständige Laplace-Transformierte des Systems mit dem Eingang $U(s)$ und dem Ausgang $Y(s)$ an

Aufgabe 2: Elektrischer Hubmagnet

Aufgabe: a) Transformieren Sie die beiden Differentialgleichungen mit Hilfe der Laplace-Transformation in den Bildbereich

$\frac{\partial i(t)}{\partial t}$: $s \cdot I(s) - i_0$

$i(t)$: $I(s)$

$u(t)$: $U(s)$

$\Rightarrow$

$$s \cdot I(s) - i_0 = k_{i,1} \cdot I(s) + k_u \cdot U(s)$$

$$I(s)(s - k_{i,1}) = k_u \cdot U(s) + i_0$$

$$I(s) = \frac{k_u}{(s - k_{i,1})} U(s) + \frac{i_0}{(s - k_{i,1})}$$

Aufgabe 2: Elektrischer Hubmagnet

Aufgabe: a) Transformieren Sie die beiden Differentialgleichungen mit Hilfe der Laplace-Transformation in den Bildbereich

$\ddot{x}(t)$: $\quad s^2 X(s) - s \cdot x_0 - \dot{x}_0$

$x(t)$: $\quad X(s)$

$i(t)$: $\quad I(s)$

$$\hookrightarrow \quad s^2 \cdot X(s) - s \cdot x_0 - \dot{x}_0 = k_x \cdot X(s) - k_{i,2} \cdot I(s)$$

$$X(s)\left(s^2 - k_x\right) = -k_{i,2}\, I(s) + s \cdot x_0 + \dot{x}_0$$

$$X(s) = \frac{-k_{i,2}}{(s^2 - k_x)}\, I(s) + \frac{s \cdot x_0 + \dot{x}_0}{(s^2 - k_x)}$$

Aufgabe 2: Elektrischer Hubmagnet

Aufgabe: b) Geben Sie die vollständige Laplace-Transformierte des Systems mit dem Eingang $U(s)$ und dem Ausgang $Y(s)$ an

$$X(s) = \frac{s \cdot x_0 + \dot{x}_0}{s^2 - k_x} - \frac{k_{i,2}}{s^2 - k_x} \underbrace{\left(\frac{k_u}{s - k_{i,1}} U(s) + \frac{i_0}{s - k_{i,1}} \right)}_{I(s)}$$

$$\vdots$$

$$X(s) = \left(\underbrace{\frac{(s \cdot x_0 + \dot{x}_0)(s - k_{i,1}) - k_{i,2} i_0}{(s^2 - k_x)(s - k_{i,1})}}_{\text{Eigenverhalten}} \right) + \underbrace{\frac{-k_{i,2} k_u}{(s^2 - k_x)(s - k_{i,1})}}_{\text{Übertragungsfunktion}} \cdot U(s)$$

Aufgabe 3: Anwendung der Laplace-Transformation

Gegeben ist die folgende Differentialgleichung

$$\dddot{y}(t) + 6 \cdot \ddot{y}(t) + 11 \cdot \dot{y}(t) + 6 \cdot y(t) = 2 \cdot u(t)$$

mit den Anfangswerten

$$y(t = 0) = y_0,$$
$$\dot{y}(t = 0) = \dot{y}_0,$$
$$\ddot{y}(t = 0) = \ddot{y}_0.$$

Aufgaben:

a) Berechnen Sie die vollständige Laplace-Transformierte Y(s).

b) Teilen Sie die Laplace-Transformierte in die Übertragungsfunktion $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$ und dem Verhalten infolge der Anfangswerte auf.

Aufgabe 3: Anwendung der Laplace-Transformation

Aufgabe: a) Berechnen Sie die vollständige Laplace-Transformierte Y(s).

$$\left(s^3 Y(s) - s^2 y_0 - s\dot{y}_0 - \ddot{y}_0\right) + 6\left(s^2 Y(s) - s y_0 - \dot{y}_0\right) + 11\left(s Y(s) - y_0\right) + 6\,Y(s) = 2\,U(s)$$

$$\Leftrightarrow Y(s)\left(s^3 + 6s^2 + 11s + 6\right) - y_0 s^2 - \left(6y_0 + \dot{y}_0\right)s - \left(11y_0 + 6\dot{y}_0 + \ddot{y}_0\right) = 2\,U(s)$$

$$Y(s) = \underbrace{\frac{2}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}}_{\text{Übertragungsfkt.}} U(s) + \underbrace{\frac{y_0 s^2 + \left(6y_0 + \dot{y}_0\right)s + \left(11y_0 + 6\dot{y}_0 + \ddot{y}_0\right)}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}}_{\text{Eigenverhalten}}$$

Aufgabe 3: Anwendung der Laplace-Transformation

Gegeben ist die folgende Differentialgleichung

$$\dddot{y}(t) + 6 \cdot \ddot{y}(t) + 11 \cdot \dot{y}(t) + 6 \cdot y(t) = 2 \cdot u(t)$$

mit den Anfangswerten

$$y(t=0) = y_0,$$
$$\dot{y}(t=0) = \dot{y}_0,$$
$$\ddot{y}(t=0) = \ddot{y}_0.$$

Aufgaben:

c) Berechnen sie die Lösungen der charakteristischen Gleichung. Gegeben ist eine Lösung $s_1 = -2$

d) Ermitteln Sie die Eigenbewegungen infolge der Anfangsbedingungen im Zeitbereich für:

$$\ddot{y}_0 = \dot{y}_0 = 0;\ y_0 = 1$$

Aufgabe 3: Anwendung der Laplace-Transformation

Aufgabe: c) Berechnen sie die Lösungen der charakteristischen Gleichung. Gegeben ist eine Lösung $s_1 = -2$

$$s^3 + 6s^2 + 11s + 6 = (s+2)\underbrace{(s^2 + 4s + 3)}$$

$$-(s^3 + 2s^2)$$

$$4s^2 + 11s$$

$$-(4s^2 + 8s)$$

$$3s + 6$$

$$-(3s + 6)$$

$$0$$

$$s = -\frac{4}{2} \pm \sqrt{\frac{16}{4} - 3}$$

$$= -2 \pm 1$$

$$\underline{s = -3} \wedge \underline{s = -1}$$

$$s^3 + 6s^2 + 11s + 6 = \underline{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

Aufgabe 3: Anwendung der Laplace-Transformation

Aufgabe: d) Ermitteln Sie die Eigenbewegungen infolge der Anfangsbedingungen im Zeitbereich für: $\ddot{y}_0 = \dot{y}_0 = 0;\ y_0 = 1$

$$\frac{A}{(s+1)}$$

$$Y(s) = \frac{s^2 + (6+0)s + (11+0+0)}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6} = \frac{s^2 + 6s + 11}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

$$\frac{s^2 + 6s + 11}{(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{s+3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{s^2 + 6s + 11}{(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{A(s+2)(s+3) + B(s+1)(s+3) + C(s+1)(s+2)}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

3	$e^{-at} \cdot 1(t)$	$\frac{1}{s+a}$

Aufgabe 3: Anwendung der Laplace-Transformation

Aufgabe: d) Ermitteln Sie die Eigenbewegungen infolge der Anfangsbedingungen im Zeitbereich für: $\ddot{y}_0 = \dot{y}_0 = 0;\ y_0 = 1$

$$s^2 + 6s + 11 = A(s^2 + 5s + 6) + B(s^2 + 4s + 3) + C(s^2 + 3s + 2)$$

s^2: $1 = A + B + C$ (1) $\qquad \underline{A = 1 - B - C}$

s^1: $6 = 5A + 4B + 3C$ (2) $\qquad 6 = 5(1 - B - C) + 4B + 3C$

s^0: $11 = 6A + 3B + 2C$ (3) $\qquad \hookrightarrow \underline{B = -1 - 2C}$

$$11 = 6(1 - B - C) + 3(-1 - 2C) + 2C$$

$\vdots$

$C = 1 \qquad B = -3 \qquad A = 3$

Aufgabe 5.2: Anwendung der Laplace-Transformation

Aufgabe: d) Ermitteln Sie die Eigenbewegungen infolge der Anfangsbedingungen im Zeitbereich für: $\ddot{y}_0 = \dot{y}_0 = 0;\ y_0 = 1$

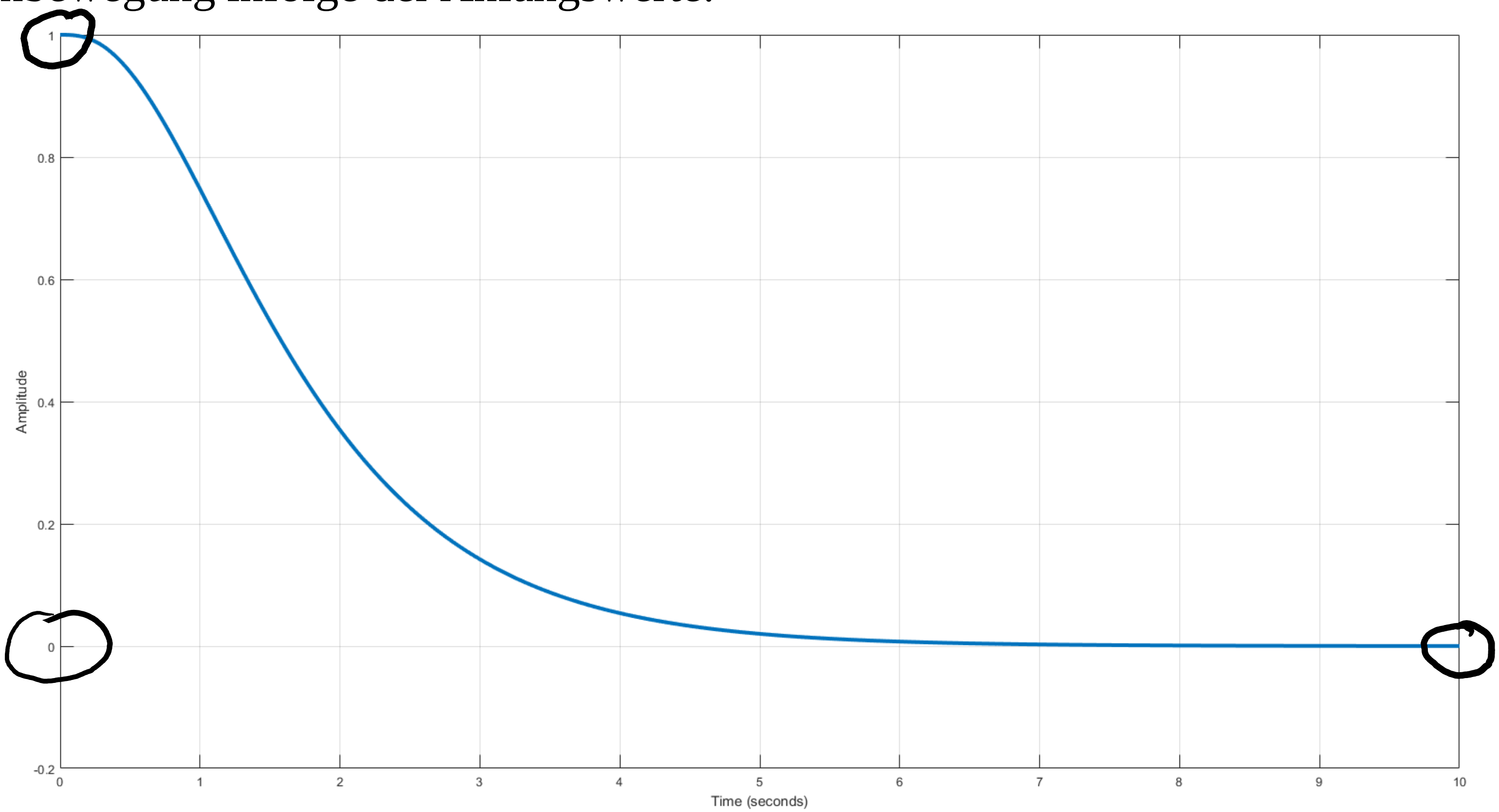
$$\frac{s^2+6s+11}{(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{3}{s+1} - \frac{3}{s+2} + \frac{1}{s+3}$$

$$\frac{1}{s+a} \rightarrow e^{-at}$$

$$\boxed{y_h(t) = 3\cdot e^{-t} - 3\cdot e^{-2t} + e^{-3t}}$$

Aufgabe 5.2: Anwendung der Laplace-Transformation

Eigenbewegung infolge der Anfangswerte:



Aufgabe 3: Anwendung der Laplace-Transformation

Gegeben ist die folgende Differentialgleichung

$$\dddot{y}(t) + 6 \cdot \ddot{y}(t) + 11 \cdot \dot{y}(t) + 6 \cdot y(t) = 2 \cdot u(t)$$

mit den Anfangswerten

$$y(t=0) = y_0,$$
$$\dot{y}(t=0) = \dot{y}_0,$$
$$\ddot{y}(t=0) = \ddot{y}_0.$$

Aufgabe: e) Berechnen sie den stationären Anfangs- und Endwert der in d) betrachteten Eigenbewegung

Aufgabe 3: Anwendung der Laplace-Transformation

Aufgabe: e) Berechnen sie den stationären Anfangs- und Endwert der in d) betrachteten Eigenbewegung

Anfangswertsatz $\boxed{\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{s\to\infty} s\cdot F(s)}$

$$\lim_{s\to\infty} s\cdot\frac{s^2+6s+11}{s^3+6s^2+11s+6} = \lim_{s\to\infty}\frac{s^3+6s^2+11s}{s^3+6s^2+11s+6}$$

$$= \lim_{s\to\infty} \frac{\cancel{s^3}}{\cancel{s^3}}\cdot\frac{1+6\,1/s+11\,1/s^2}{1+6\,1/s+11\,1/s^2+6\,1/s^3} = 1$$

Aufgabe 3: Anwendung der Laplace-Transformation

Aufgabe: e) Berechnen sie den stationären Anfangs- und Endwert der in d) betrachteten Eigenbewegung

$$\boxed{\text{Endwertsatz} \quad \lim_{t \to \infty} f(t) = \lim_{s \to 0} s \cdot F(s)}$$

$$\lim_{s \to 0} s \cdot \frac{s^2 + 6s + 11}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6} = \lim_{s \to 0} \frac{s^3 + 6s^2 + 11s}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6} = 0$$