3. Übung zur Vorlesung „Steuer- und Regelungstechnik“

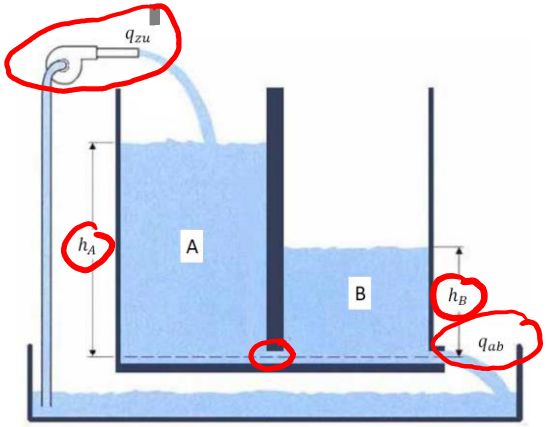
Linearisierung

Felix Goßmann M.Sc.

Institut für Steuer- und Regelungstechnik
Fakultät für Luft- und Raumfahrttechnik
Universität der Bundeswehr München

Aufgabe 4.1: Tankbehälter

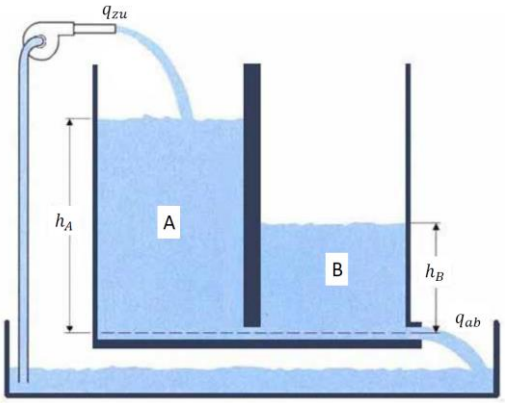
Gegeben ist der folgende Tankbehälter.



Er besteht aus den beiden baugleichen Zylindersäulen ***A*** und ***B*** mit einem konstanten Querschnitt Q. Der Behälter ***A*** wird durch den Zufluss q_{zu} gespeist und der Tankinhalt aus Behälter ***B*** fließt mit dem Volumenstrom q_{ab} ab. Die beiden zeitabhängigen Füllstände der Wassersäulen werden mit $h_A(t)$ und $h_B(t)$ bezeichnet.

Aufgabe 1: Tankbehälter

Gegeben ist der folgende Tankbehälter.



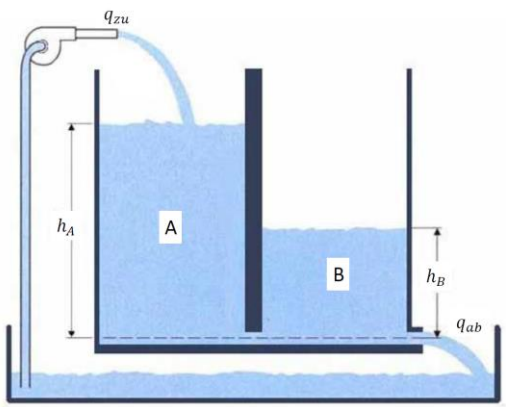
Aufgaben:

a) Bestimmen Sie die Differentialgleichungen, die die beiden Füllstände der Wassersäulen $h_A(t)$ und $h_B(t)$ beschreiben und linearisieren Sie diese um deren Ruhelage für einen konstanten Zufluss $q_{zu,0} \geq 0$.

b) Stellen Sie das linearisierte System in Form eines Blockschaltbildes dar.

Aufgabe 1: Tankbehälter

Aufgabe: a) Bestimmen Sie die Differentialgleichungen, die die beiden Füllstände der Wassersäulen $h_A(t)$ und $h_B(t)$ beschreiben und linearisieren Sie diese um deren Ruhelage für einen konstanten Zufluss $q_{zu,0} \geq 0$.



$$q_{ab,A} = q_{zu,B} \qquad q_{ab} = a \cdot \sqrt{2gh}$$

$$q_{ab,A} = q_{zu,B} = a \cdot \sqrt{2g\left(h_A(t) - h_B(t)\right)}$$

$$Q \qquad V(t) = Q \cdot h(t) \rightarrow \dot{V}(t) = Q\,\dot{h}(t)$$

$$\dot{V}(t) = q_{zu}(t) - q_{ab}(t)$$

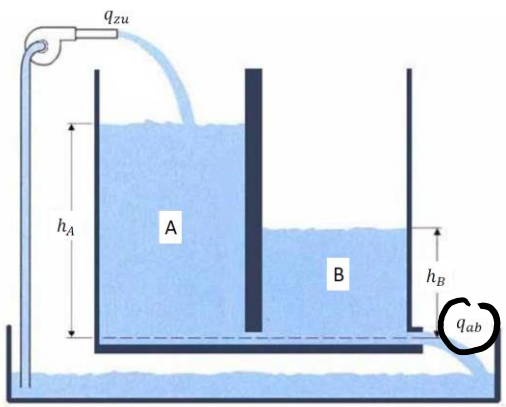
$$\dot{h}(t) = \frac{1}{Q}\left(q_{zu} - q_{ab}\right)$$

Aufgabe 1: Tankbehälter

Aufgabe: a) Bestimmen Sie die Differentialgleichungen, die die beiden Füllstände der Wassersäulen $h_A(t)$ und $h_B(t)$ beschreiben und linearisieren Sie diese um deren Ruhelage für einen konstanten Zufluss $q_{zu,0} \geq 0$.

$$\dot{h}_A(t) = \frac{1}{Q}\overbrace{\left(q_{zu} - a\cdot\sqrt{2g(h_A(t) - h_B(t))}\right)}^{f_1}$$

$$\dot{h}_B(t) = \frac{1}{Q}\underbrace{\left(a\cdot\sqrt{2g(h_A(t) - h_B(t))} - a\cdot\sqrt{2g\,h_B(t)}\right)}_{f_2}$$



Aufgabe 1: Tankbehälter

Aufgabe: a) Bestimmen Sie die Differentialgleichungen, die die beiden Füllstände der Wassersäulen $h_A(t)$ und $h_B(t)$ beschreiben und linearisieren Sie diese um deren Ruhelage für einen konstanten Zufluss $q_{zu,0} \geq 0$.

Ruhelage

$$0 = q_{zu,0} - a\sqrt{2g(h_{A,0} - h_{B,0})} \qquad (1)$$

$$0 = \cancel{a}\sqrt{2g(h_{A,0} - h_{B,0})} - \cancel{a}\sqrt{2g h_{B,0}} \qquad (2)$$

aus (2):

$$\cancel{a}\cancel{\sqrt{2g}}\, h_{B,0} = \cancel{a}\cancel{\sqrt{2g}}(h_{A,0} - h_{B,0})$$

$$\boxed{\frac{1}{2} h_{A,0} = h_{B,0}}$$

aus (1):

$$q_{zu,0}^2 = a^2 2g(h_{A,0} - h_{B,0})$$

$$h_{B,0} = h_{A,0} - \frac{q_{zu,0}^2}{2a^2 g}$$

$$\boxed{h_{A,0} = \frac{q_{zu,0}^2}{a^2 g} \qquad h_{B,0} = \frac{q_{zu,0}^2}{2a^2 g}}$$

Aufgabe 1: Tankbehälter

Aufgabe: a) Bestimmen Sie die Differentialgleichungen, die die beiden Füllstände der Wassersäulen $h_A(t)$ und $h_B(t)$ beschreiben und linearisieren Sie diese um deren Ruhelage für einen konstanten Zufluss $q_{zu,0} \geq 0$.

$$\cancel{\dot{h}_{A_0}}^{\,0} + \Delta\dot{h}_A = \frac{1}{Q}\underbrace{\left((q_{zu,0} + \Delta q_{zu}) - a\cdot\sqrt{2g\left[(h_{A,0} + \Delta h_A) - (h_{B,0} + \Delta h_B)\right]}\right)}_{f_1(x_0 + \Delta x)}$$

$$\left.\frac{\partial f_1}{\partial q_{zu}}\right|_0 = 1$$

$$\left.\frac{\partial f_1}{\partial h_A}\right|_0 = -\frac{a\cdot g}{\sqrt{2g(h_{A,0} - h_{B,0})}} = K_{h_A,1}$$

$$\left.\frac{\partial f_1}{\partial h_B}\right|_0 = +\frac{a\cdot g}{\sqrt{2g(h_{A,0} - h_{B,0})}} = K_{h_B,1}$$

Aufgabe 1: Tankbehälter

Aufgabe: a) Bestimmen Sie die Differentialgleichungen, die die beiden Füllstände der Wassersäulen $h_A(t)$ und $h_B(t)$ beschreiben und linearisieren Sie diese um deren Ruhelage für einen konstanten Zufluss $q_{zu,0} \geq 0$.

$$\Delta \dot{h}_A = \frac{1}{Q}\left[1 \cdot \Delta q_{zu} + k_{hA,1} \cdot \Delta h_A + k_{hB,1} \cdot \Delta h_B\right] \left(+ \underbrace{f(x_0)}_{=0} \right)$$

$$= \underbrace{\frac{1}{Q}}_{k_q} \Delta q_{zu} + \underbrace{\frac{k_{hA,1}}{Q}}_{k_{A,1}} \Delta h_A + \underbrace{\frac{k_{hB,1}}{Q}}_{k_{B,1}} \Delta h_B$$

Aufgabe 1: Tankbehälter

Aufgabe: a) Bestimmen Sie die Differentialgleichungen, die die beiden Füllstände der Wassersäulen $h_A(t)$ und $h_B(t)$ beschreiben und linearisieren Sie diese um deren Ruhelage für einen konstanten Zufluss $q_{zu,0} \geq 0$.

$$\left.\frac{\partial f_2}{\partial h_A}\right|_0 = \frac{a\,g}{\sqrt{2g(h_{A,0}-h_{B,0})}} = k_{hA,2}$$

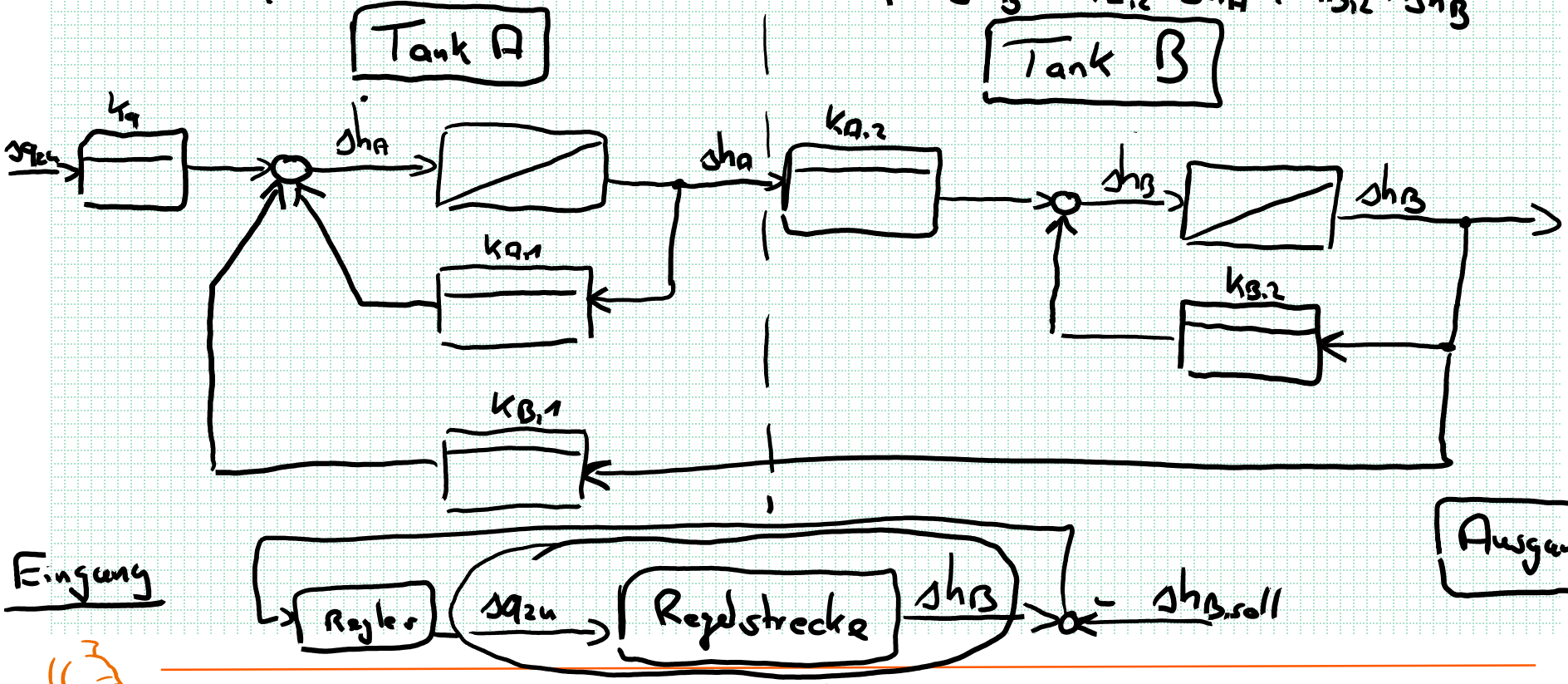
$$\left.\frac{\partial f_2}{\partial h_B}\right|_0 = -\frac{a\cdot g}{\sqrt{2g(h_{A,0}-h_{B,0})}} - \frac{a\cdot g}{\sqrt{2g\,h_{B,0}}} = k_{hB,2}$$

$$\Delta\dot{h}_B = \frac{1}{Q}\left[k_{hA,2}\cdot\Delta h_A + k_{hB,2}\cdot\Delta h_B\right] = \underbrace{\frac{k_{hA,2}}{Q}}_{k_{A,2}}\Delta h_A + \underbrace{\frac{k_{hB,2}}{Q}}_{k_{B,2}}\cdot\Delta h_B$$

Aufgabe 1: Tankbehälter

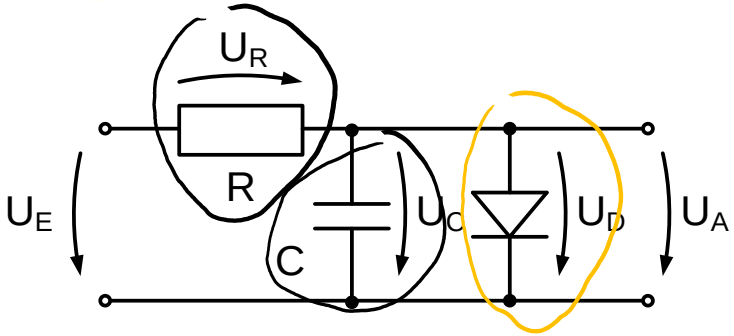
Aufgabe: b) Stellen Sie das linearisierte System in Form eines Blockschaltbildes dar.

$$\Delta h_A = k_q \cdot \Delta q_{zu} + k_{A,1} \cdot \Delta h_A + k_{B,1} \cdot \Delta h_B \quad \Big| \quad \Delta h_B = k_{A,2} \cdot \Delta h_A + k_{B,2} \cdot \Delta h_B$$



Aufgabe 2: Elektrischer Schaltkreis

Gegen ist das folgende elektrische System,



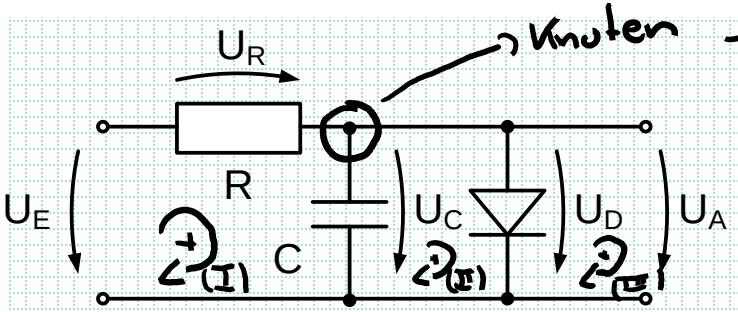
mit dem Widerstand R, dem Kondensator C und einer Diode, welche durch die nichtlineare Strom-Spannungs-Beziehung $i_D(U_D) = I_S \cdot (e^{k \cdot U_D} - 1)$ beschrieben wird.

Aufgaben: a) Stellen Sie die Maschen- und Knotensätze zur Beschreibung des elektrischen Systems auf.

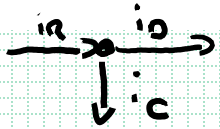
b) Geben Sie die nichtlineare Differenzialgleichung zur Beschreibung des Ein-Ausgangsverhaltens des Systems an und verwenden Sie dabei die Bezeichnung $y(t) = U_A(t)$ für den Systemausgang und $u(t) = U_E(t)$ für den Systemeingang.

Aufgabe 2: Elektrischer Schaltkreis

Aufgabe: a) Stellen Sie die Maschen- und Knotensätze zur Beschreibung des elektrischen Systems auf.



Knoten



$$i_R = i_D + i_C$$

$$\boxed{i_C = C \cdot \dot{u}_C}$$

$$i_D = I_S\left(e^{k \cdot u_D} - 1\right)$$

(I) $u_E = u_R + u_C$

(II) $u_C = u_D$

(III) $u_D = u_A$

$$\Rightarrow \boxed{u_C = u_A}$$

$$u_E = u_R + u_C = i_R \cdot R + u_C$$

$$= (i_D + i_C)R + u_C = R\left[C \cdot \dot{u}_C + I_S\left(e^{k \cdot u_D} - 1\right)\right] + u_C$$

$$\Leftrightarrow \quad u_E = R\left[C \cdot \dot{u}_A + I_S\left(e^{k\, u_A} - 1\right)\right] + u_A$$

Aufgabe 2: Elektrischer Schaltkreis

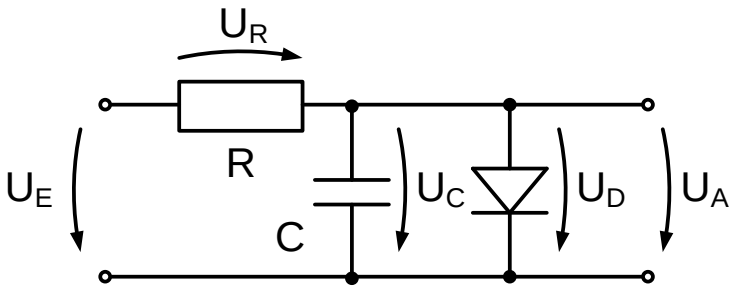
Aufgabe: b) Geben Sie die nichtlineare Differenzialgleichung zur Beschreibung des Ein-Ausgangsverhaltens des Systems an und verwenden Sie dabei die Bezeichnung $y(t) = U_A(t)$ für den Systemausgang und $u(t) = U_E(t)$ für den Systemeingang.

$$U_E = R \cdot C \cdot U_A + R \cdot I_S \left(e^{k \cdot U_A} - 1\right) + U_A$$

$$0 = \underbrace{R \cdot C \cdot \dot{y} + \boxed{R \cdot I_S \cdot e^{k \cdot y}} - \underbrace{R \cdot I_S}_{\text{Konstante}} + y - u(t)}_{f(\dot{y}, y, u)}$$

Aufgabe 2: Elektrischer Schaltkreis

Gegen ist das folgende nichtlineare elektrische System,



mit dem Widerstand R, dem Kondensator C und einer Diode, welche durch die nichtlineare Strom-Spannungs-Beziehung $i_D(U_D) = I_S \cdot (e^{k \cdot U_D} - 1)$ beschrieben wird.

Aufgaben: c) Linearisieren Sie die nichtlineare Differentialgleichung in dem Arbeitspunkt (u_0, y_0) und geben sie die linearisierte Differenzialgleichung an.

Aufgabe 2: Elektrischer Schaltkreis

Aufgabe: c) Linearisieren Sie die nichtlineare Differentialgleichung in dem Arbeitspunkt (u_0, y_0) und geben sie die linearisierte Differenzialgleichung an.

" Ruhelage

$$f(\dot{y}_0, y_0, \dot{u}_0) = 0$$

$$0 = \underbrace{y + R \cdot C \cdot \dot{y} + R I_s \cdot e^{k \cdot y} - R \cdot I_s - u}_{f(\dot{y}, y, u)}$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_0 = 1 + R I_s k \cdot e^{k y_0} \qquad \frac{\partial f}{\partial u} = -1$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\right|_0 = R \cdot C$$

Aufgabe 2: Elektrischer Schaltkreis

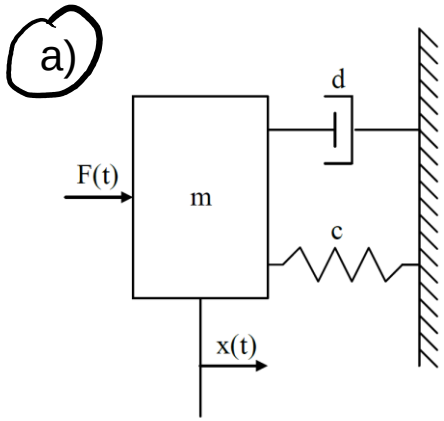
Aufgabe: c) Linearisieren Sie die nichtlineare Differentialgleichung in dem Arbeitspunkt (u_0, y_0) und geben sie die linearisierte Differenzialgleichung an.

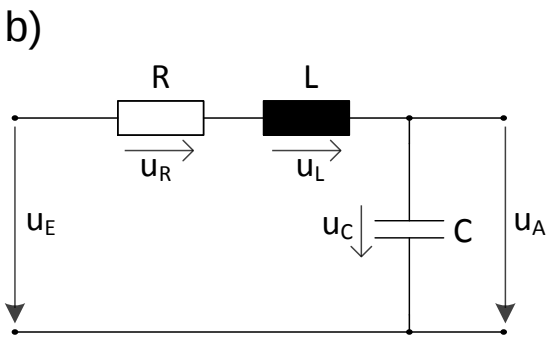
$$0 = R \cdot C \, \Delta\dot{y} + \left(1 + R I_s k e^{k y_0}\right) \Delta y - 1 \cdot \Delta u$$

$$\boxed{\Delta u = R \cdot C \cdot \Delta\dot{y} + \left(1 + R I_s k e^{k y_0}\right) \Delta y}$$

Aufgabe 3: Äquivalenz von elektrischen und mechanischen Systemen

Gegeben sind die beiden linearen Systeme





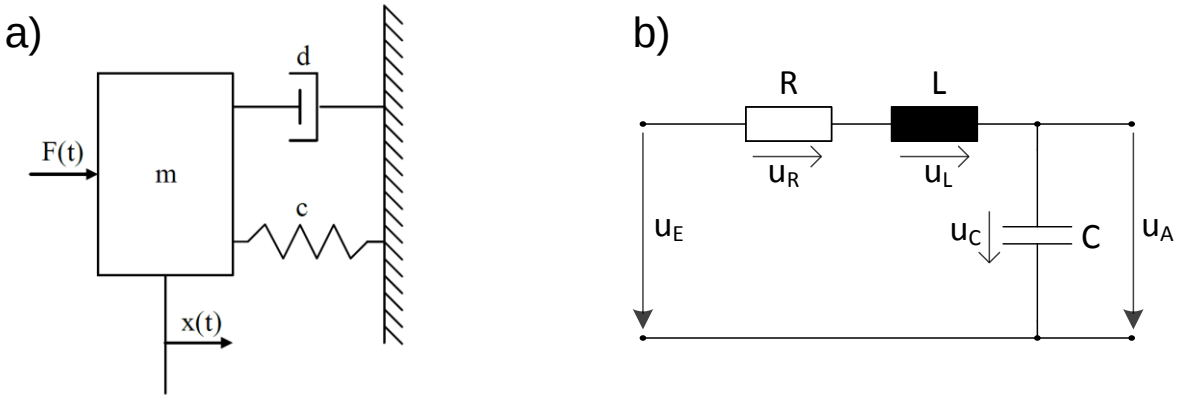
Das System in Abbildung a) wurde bereits in der ersten Übung behandelt und wird mit der Differentialgleichung

$$m \cdot \ddot{x}(t) + d \cdot \dot{x}(t) + c \cdot x(t) = F(t) \qquad (1)$$

beschrieben.

Aufgabe 3: Äquivalenz von elektrischen und mechanischen Systemen

Gegeben sind die beiden linearen Systeme

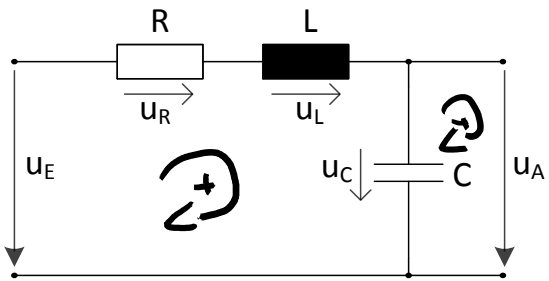


Der in Abbildung b) dargestellte Schaltkreis besteht aus einem Widerstand R, einer Induktivität L und einer Kapazität C. Der Schaltkreis wird mit einer Eingangsspannung von $u_E(t)$ beaufschlagt und es fällt eine Spannung $u_A(t)$ am Ausgang an.

Aufgaben: a) Bestimmen Sie die Differentialgleichung die das Ausgangsverhalten $u_A(t)$ des in b) dargestellten Schaltkreises in Abhängigkeit von der Eingangsspannung $u_E(t)$ beschreibt.

Aufgabe 3: Äquivalenz von elektrischen und mechanischen Systemen

Aufgabe: a) Bestimmen Sie die Differentialgleichung die das Ausgangsverhalten $u_A(t)$ des in b) dargestellten Schaltkreises in Abhängigkeit von der Eingangsspannung $u_E(t)$ beschreibt.



$$u_E = u_R + u_L + u_C$$

$$u_C = u_A$$

$$\boxed{\begin{aligned} u_R &= R \cdot i \\ u_L &= L \cdot \frac{\partial i}{\partial t} \\ i_C = i &= C \frac{\partial u_C}{\partial t} \end{aligned}}$$

$$\underline{i = C \cdot \frac{\partial u_A}{\partial t} = C \cdot \dot{u}_A} \rightarrow \frac{\partial i}{\partial t} = C \cdot \ddot{u}_A$$

$$u_E = R \cdot i + L \cdot \frac{\partial i}{\partial t} + u_A$$

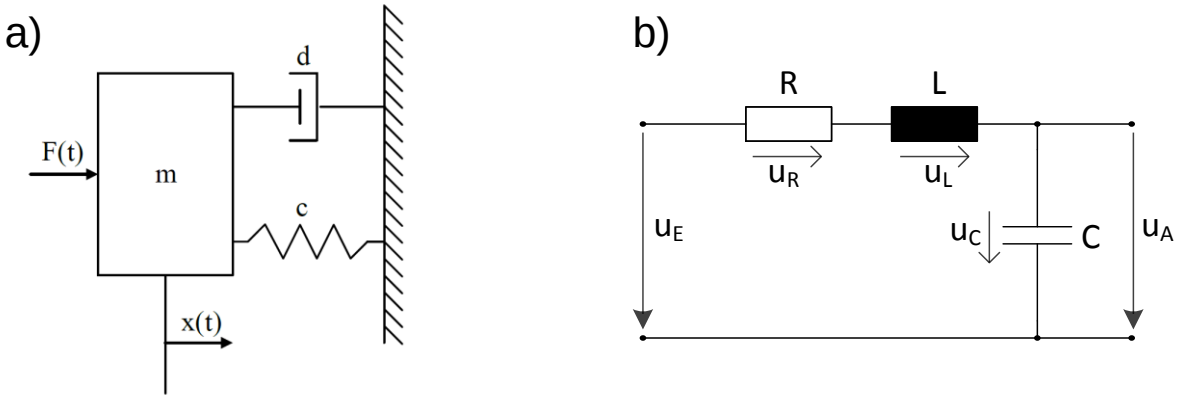
Aufgabe 3: Äquivalenz von elektrischen und mechanischen Systemen

Aufgabe: a) Bestimmen Sie die Differentialgleichung die das Ausgangsverhalten $u_A(t)$ des in b) dargestellten Schaltkreises in Abhängigkeit von der Eingangsspannung $u_E(t)$ beschreibt.

$$\boxed{u_E = R \cdot C \cdot \dot{u}_A + L \cdot C \cdot \ddot{u}_A + u_A}$$

Aufgabe 3: Äquivalenz von elektrischen und mechanischen Systemen

Gegeben sind die beiden linearen Systeme



Der in Abbildung b) dargestellte Schaltkreis besteht aus einem Widerstand R, einer Induktivität L und einer Kapazität C. Der Schaltkreis wird mit einer Eingangsspannung von $u_E(t)$ beaufschlagt und es fällt eine Spannung $u_A(t)$ am Ausgang an.

Aufgaben: b) Vergleichen Sie die erhaltene Differentialgleichung mit der in (1) beschriebenen Differentialgleichung des mechanischen Systems.

Aufgabe 3: Äquivalenz von elektrischen und mechanischen Systemen

Aufgabe: b) Vergleichen Sie die erhaltene Differentialgleichung mit der in (1) beschriebenen Differentialgleichung des mechanischen Systems.

$$L \cdot \ddot{u}_A + R\, \dot{u}_A + \frac{1}{C} u_A = \frac{1}{C} u_E$$

$$m \cdot \ddot{x} + d \cdot \dot{x} + c \cdot x = F(t)$$

Spannung ≡ Weg

Masse ⟷ Induktivität

Dämpfung ⟷ Widerstand

Federnachgiebigkeit ⟷ Kapazität

$$\boxed{a_2\, \ddot{y}(t) + a_1 \cdot \dot{y}(t) + a_0\, y(t) = b_0 \cdot u(t)} \rightarrow PT_2\text{-Verhalten}$$

Aufgabe 3: Äquivalenz von elektrischen und mechanischen Systemen

Aufgabe: b) Vergleichen Sie die erhaltene Differentialgleichung mit der in (1) beschriebenen Differentialgleichung des mechanischen Systems.

$$\ddot{y}(t) + \underline{2D\omega_0} \cdot \dot{y}(t) + \omega_0^2 \cdot y(t) = K\omega_0 \cdot u(t)$$

D Dämpfungsgrad

ω_0: Eigenfrequenz

K: stat. Verstärkung

Aufgabe 3: Äquivalenz von elektrischen und mechanischen Systemen

Aufgabe: b) Vergleichen Sie die erhaltene Differentialgleichung mit der in (1) beschriebenen Differentialgleichung des mechanischen Systems.

$$\ddot{x}(t) + \underbrace{\frac{d}{m}}_{2D\omega_0} \dot{x}(t) + \underbrace{\frac{c}{m}}_{\omega_0^2} x(t) = \frac{1}{m} F(t)$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}}$$

$$D = \frac{1}{2} \cdot \frac{d}{\sqrt{c\,m}}$$

$$\ddot{u}_A(t) + \underbrace{\frac{R}{L}}_{2D\omega_0} \dot{u}_A(t) + \underbrace{\frac{1}{C \cdot L}}_{\omega_0^2} u_A(t) = \frac{1}{CL} u_E$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{C \cdot L}}$$

$$D = \frac{1}{2} \cdot R \sqrt{\frac{C}{L}}$$

Aufgabe 3: Äquivalenz von elektrischen und mechanischen Systemen

Aufgabe: b) Vergleichen Sie die erhaltene Differentialgleichung mit der in (1) beschriebenen Differentialgleichung des mechanischen Systems.

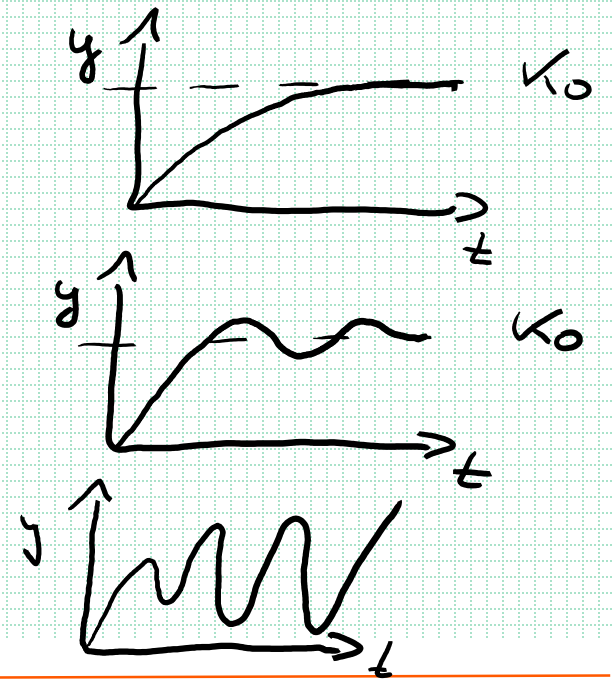
Dämpfungsgrad

Zeitverhalten des Ausgangs $y(t)$:

$D > 1$: aperiodisches Verhalten

$1 > D > 0$: gedämpfte Schwingung

$D < 0$: ungedämpfte Schwingung (instabil)



Aufgabe 3: Äquivalenz von elektrischen und mechanischen Systemen

Aufgabe: b) Vergleichen Sie die erhaltene Differentialgleichung mit der in (1) beschriebenen Differentialgleichung des mechanischen Systems.

$$\lambda^2 + 2D\omega_0 \cdot \lambda + \omega_0^2 = 0$$ char. Polynom

$$\lambda_{1/2} = -\omega_0\left(D \pm \sqrt{D^2 - 1}\right)$$

$D > 1$: beide Eigenwerte reel, negativ $\longrightarrow$ aperiodisch

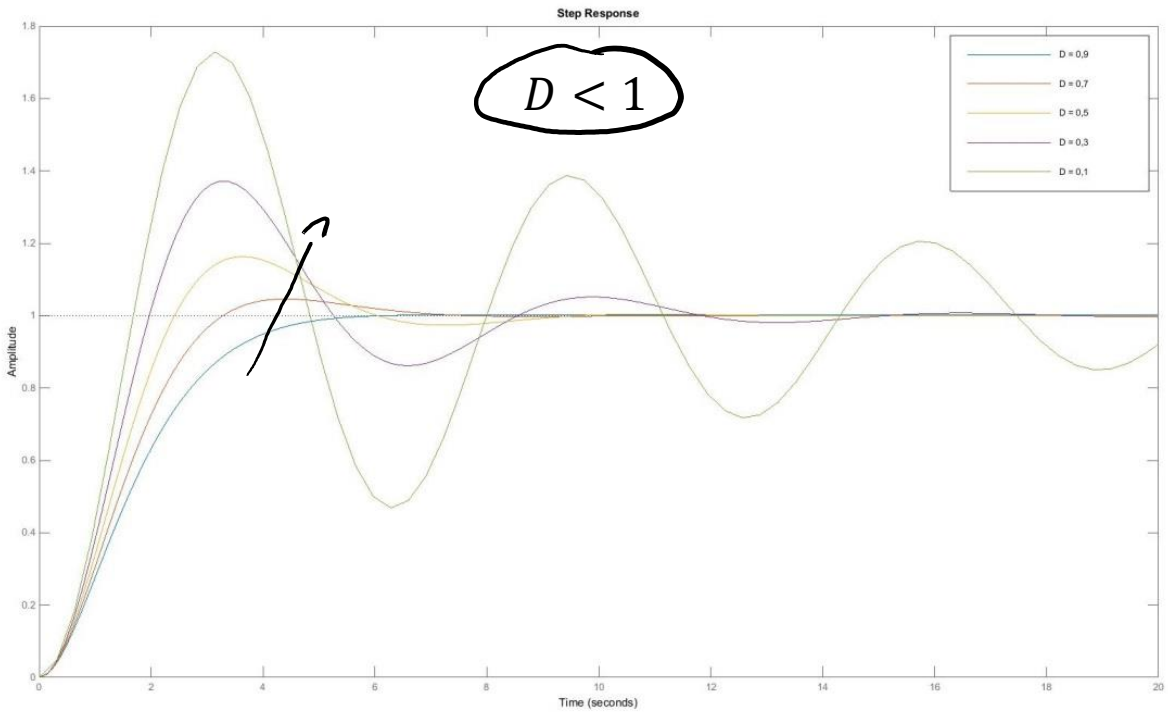
$1 > D > 0$: Komplexe Eigenwerte, negativ $\longrightarrow$ gedämpfte Schw.

$D < 0$: positive Eigenwerte (Realteil) $\longrightarrow$ instabil

$D = 1$: aperiodische Grenzfall

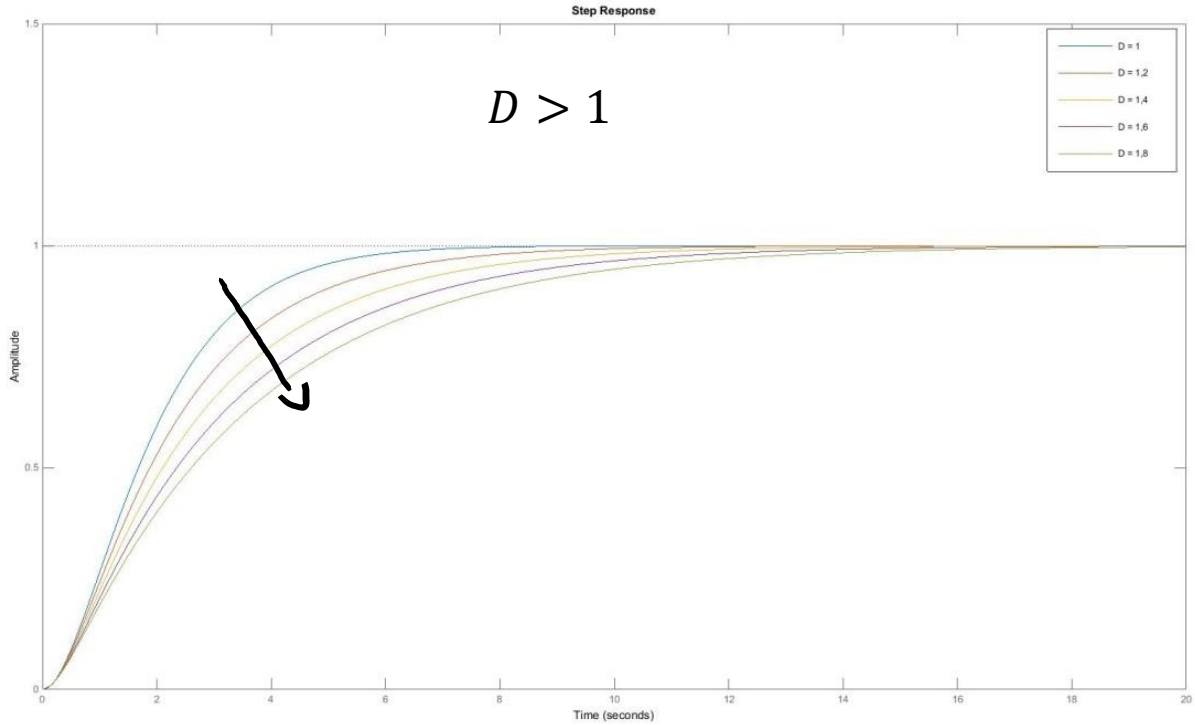
Sprungantworten von PT2-Systemen mit unterschiedlicher Dämpfung

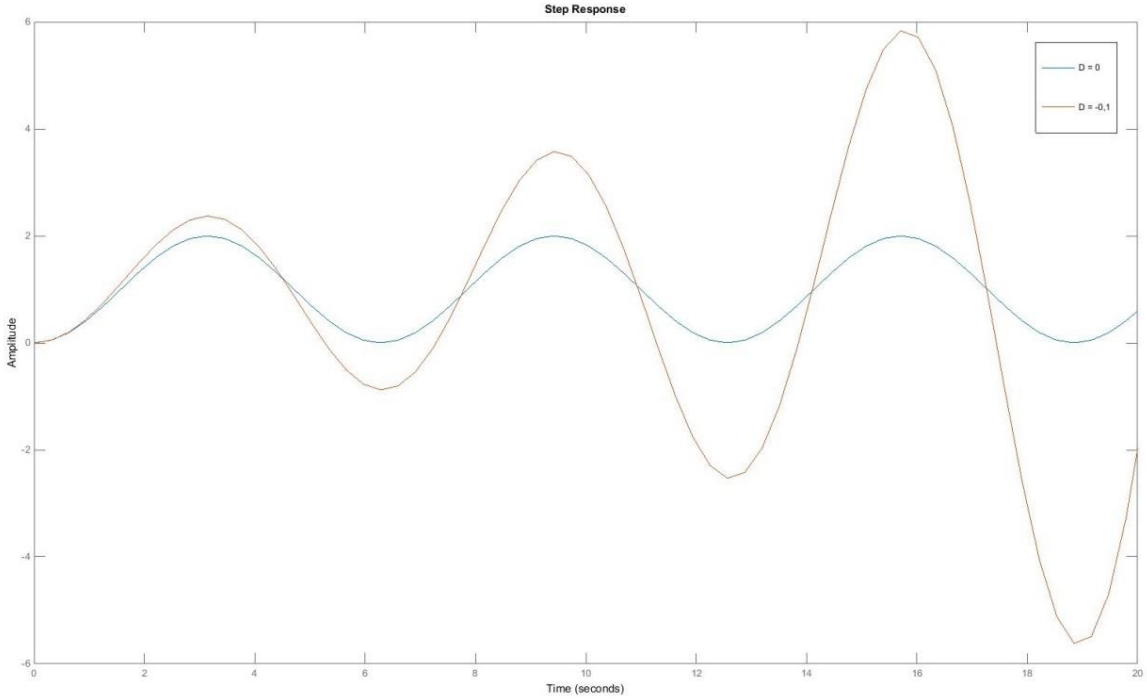
- Über den Dämpfungsgrad eines PT2-Systems lässt sich deren Zeitverhalten charakterisieren
- Stabiles aperiodisches oder <u>schwingungsfähiges</u> Verhalten



Sprungantworten von PT2-Systemen mit unterschiedlicher Dämpfung

- Über den Dämpfungsgrad eines PT2-Systems lässt sich deren Zeitverhalten charakterisieren
- Stabiles <u>aperiodisches</u> oder schwingungsfähiges Verhalten



Sprungantworten von PT2-Systemen mit unterschiedlicher Dämpfung

- Über den Dämpfungsgrad eines PT2-Systems lässt sich deren Zeitverhalten charakterisieren
- Grenz- oder instabiles Schwingungsverhalten für $D \leq 0$