Repetitorium Steuer- und Regelungstechnik

Ausgewählte Prüfungsaufgaben zur Laplace Transformation, Übertragungsfunktionen

Lösung 1. Aufgabe

1.1)
Differenzialgleichung:

$$\ddot{y}(t) + 8\cdot\dot{y}(t) + 25\cdot y(t) = 5\cdot\dot{u}(t) + 25\cdot u(t)$$

Im Laplace-Bereich:

$$s^2\cdot Y(s) - s\cdot y_0 - \dot{y}_0 + 8\cdot s\cdot Y(s) - 8\cdot y_0 + 25\cdot Y(s) = 5\cdot s\cdot U(s) - 5\cdot u_0 + 25\cdot U(s)$$

Nach $Y(s)$ umgestellt:

$$Y(s) = \frac{5\cdot s + 25}{s^2 + 8\cdot s + 25}\cdot U(s) + \frac{y_0\cdot s + \dot{y}_0 + 8\cdot y_0 - 5\cdot u_0}{s^2 + 8\cdot s + 25}$$

$$Y(s) = \frac{5\cdot s + 25}{s^2 + 8\cdot s + 25}\cdot U(s) + \frac{5\cdot s + 20}{s^2 + 8\cdot s + 25}$$

1.2)
charakteristisches Polynom:

$$C(s) = s^2 + 8\cdot s + 25$$

Nullstellen:

$$s^2 + 8\cdot s + 25 = (s+4)^2 - 16 + 25 = (s+4)^2 + 9 = (s+4)^2 + 3^2 = 0$$

$$(s+4)^2 = -3^2$$

$$s + 4 = \pm\sqrt{-3^2} = \pm 3\cdot\sqrt{-1}$$

$$s_{1,2} = -4 \pm 3\cdot j$$

konjugiert komplexe Pole bei dem Realteil $\sigma = -4$ und dem Imaginärteil $\omega = \pm 3$

Eigenbewegung aufgrund der Anfangsbedingungen:

$$Y(s) = \frac{y_0\cdot s + \dot{y}_0 + 8\cdot y_0 - u_0}{s^2 + 8\cdot s + 25} = \frac{5\cdot s - 20 + 8\cdot 5 - 0}{(s+4)^2 + 3^2} = \frac{5\cdot s + 20}{(s+4)^2 + 3^2}$$

$$Y(s) = 5\cdot\frac{s+4}{(s+4)^2 + 3^2}$$

Siehe Korrespondenztabelle Skript Seite 133, Korrespondenz Nr. 31

$$\frac{s+\delta}{(s+\delta)^2 + \omega_e^2} \quad \rightarrow \quad e^{-\delta\cdot t}\cdot\cos(\omega_e\cdot t)\cdot 1(t)$$

Daraus ergibt sich

$$Y(s) = 5 \cdot \frac{s+4}{(s+4)^2 + 3^2}$$

$$\rightarrow \quad y(t) = 5 \cdot e^{-4 \cdot t} \cdot \cos(3 \cdot t) \cdot 1(t)$$

1.3)

$$G_S(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{5 \cdot s + 25}{s^2 + 8 \cdot s + 25} = \frac{5 \cdot s + 25}{(s+4)^2 + 3^2}$$

1.4)

$$G_S(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{5 \cdot s + 25}{s^2 + 8 \cdot s + 25} = \frac{\frac{1}{5} \cdot s + 1}{\frac{1}{25} \cdot s^2 + \frac{2 \cdot 4}{5 \cdot 5} \cdot s + 1}$$

$$= \frac{\frac{1}{5} \cdot s + 1}{\frac{1}{5^2} \cdot s^2 + \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot s + 1} = \frac{\frac{1}{5} \cdot s + 1}{\frac{1}{\omega_0^2} \cdot s^2 + \frac{2}{\omega_0} \cdot D \cdot s + 1} = 25 \cdot \frac{\frac{1}{5} s + 1}{s^2 + 8s + 25}$$

$$= \frac{5s + 25}{s^2 + 8s + 25}$$

Eigenfrequenz: $\omega_0 = 5$

Dämpfungsgrad: $D = 4/5 = 0.8$

1.5)

$$G_R(s) = K_R \cdot \left(1 + \frac{1}{T_I \cdot s} + T_D \cdot s\right) = K_R \cdot \frac{T_D \cdot T_I \cdot s^2 + T_I \cdot s + 1}{T_I \cdot s}$$

$$= \frac{8}{5} \cdot \frac{\frac{8}{25} \cdot \frac{1}{8} \cdot s^2 + \frac{8}{25} \cdot s + 1}{\frac{8}{25} \cdot s} = \frac{s^2 + 8 \cdot s + 25}{5s}$$

$$G_0(s) = G_R(s) \cdot G_S(s) = \frac{s^2 + 8 \cdot s + 25}{5s} \cdot \frac{5s + 25}{s^2 + 8s + 25} = \frac{5s + 25}{5s}$$

$$1 + G_0(s) = 1 + \frac{5s + 25}{5s} = \frac{10s + 25}{5s}$$

$$G_W(s) = \frac{G_0(s)}{1 + G_0(s)} = \frac{5s + 25}{5s} \cdot \frac{5s}{10s + 25} = \frac{5 \cdot (s+5)}{5 \cdot (2s+5)} = \frac{s+5}{2s+5}$$

1.6)

Polstellen berechnen:

$$2s + 5 = 0$$

$$s + 2{,}5 = 0$$

$$s = -2{,}5$$

Eine Polstelle mit negativem Realteil → geschlossener Regelkreis <u>stabil</u>

Lösung 2. Aufgabe

2.1)

$$G_R(s) = K_R\left(1 + \frac{1}{T_I \cdot s}\right) = K_R\left(\frac{T_I s + 1}{T_I s}\right) = K_R\left(\frac{s + \frac{1}{T_I}}{s}\right)$$

Die Nachstellstellzeit wird so gewählt, dass die Polstelle $s = -2$ im offenen System kompensiert wird → $\underline{T_I = 0{,}5}$

$$G_0(s) = \underbrace{\frac{4}{(s+2)(s+3)(s+5)}}_{G_S(s)} \cdot \underbrace{\frac{K_R\left(s + \frac{1}{0{,}5}\right)}{s}}_{G_R(s)} = \frac{4K_R}{s(s+3)(s+5)}$$

2.2)

Standardregelkreis: $G(s) = \frac{G_0(s)}{1+G_0(s)}$

$$1 + G_0(s) = 1 + \frac{4K_R}{s(s+3)(s+5)} = \frac{s(s+3)(s+5) + 4K_R}{s(s+3)(s+5)}$$

$$G(s) = \frac{4K_R}{s(s+3)(s+5)} \cdot \frac{s(s+3)(s+5)}{s(s+3)(s+5) + 4K_R} = \frac{4K_R}{s(s+3)(s+5) + 4K_R}$$

$$= \frac{4K_R}{s^3 + 8s^2 + 15s + 4K_R}$$

Stabilität nach Hurwitz:

Not. Bedingung: $a_i > 0$

$$a_3 = 1 \;;\; a_2 = 8 \;;\; a_1 = 15 \;;\; a_0 = 4K_R$$

$\Rightarrow K_R > 0$

Hinr. Bedingung:

$H_1 = a_2 = 8 > 0$

$H_2 = \begin{vmatrix} 8 & 4K_R \\ 1 & 15 \end{vmatrix} = 8 \cdot 15 - 1 \cdot 4K_R = 120 - 4K_R > 0$

$\Rightarrow K_R < 30$

Der geschlossene Regelkreis ist also für $0 < K_R < 30$ stabil.

2.3)

Stat. Genauigkeit der Sprungantwort

$$h_\infty = \lim_{t\to\infty} h(t) = \lim_{s\to 0} s \cdot G(s) \cdot \frac{1}{s} = \lim_{s\to 0} \frac{4K_R}{s^3 + 8s^2 + 15s + 4K_R} = 1$$

Geschlossener Regelkreis ist (aufgrund des PI-Reglers) in jedem Fall stationär genau. Durch Vergrößerung der Reglerverstärkung K_R wird die Anregelzeit bzw. Ansprechzeit des Regelkreises kleiner, jedoch steigt auch das Überschwingen.