2. Repetitorium zur Übung „Steuer- und Regelungstechnik“

Laplace-Transformation, Stabilität, Polkompensation

Felix Goßmann M.Sc.

Institut für Steuer- und Regelungstechnik
Fakultät für Luft- und Raumfahrttechnik
Universität der Bundeswehr München

Aufgabe 1: Laplace-Transformation

Gegeben ist die Differentialgleichung

$$\ddot{y}(t) + 8 \cdot \dot{y}(t) + 25 \cdot y(t) = 5 \cdot \dot{u}(t) + 25 \cdot u(t)$$

mit den Anfangsbedingungen:

$$y(t = 0) = y_0 = 5; \dot{y}(t = 0) = \dot{y}_0 = -20 \text{ und } u(t = 0) = u_0 = 0.$$

Aufgabe 1: Laplace-Transformation

Aufgabe: 1. Überführen Sie die Differentialgleichung in den Laplace-Bereich und geben Sie die vollständige Laplace-Transformierte für das Signal Y(*s*) an.

$$\ddot{y}(t) + 8\dot{y}(t) + 25y(t) = 5\dot{u}(t) + 25u(t)$$

$$y_0 = 5$$
$$\dot{y}_0 = -20$$
$$u_0 = 0$$

$$\underbrace{\left(s^2 Y(s) - s\cdot y_0 - \dot{y}_0\right)}_{\ddot{y}(t)} + 8\underbrace{\left(s Y(s) - y_0\right)}_{\dot{y}(t)} + 25Y(s)$$

$$= 5\underbrace{\left(s U(s) - u_0\right)}_{\dot{u}(t)} + 25U(s)$$

Aufgabe 1: Laplace-Transformation

Aufgabe: 1. Überführen Sie die Differentialgleichung in den Laplace-Bereich und geben Sie die vollständige Laplace-Transformierte für das Signal Y(*s*) an.

$$Y(s) = \underbrace{\frac{5s+25}{s^2+8s+25}}_{\text{Übertragungsfkt.}} U(s) + \frac{y_0 \cdot s + \dot{y}_0 + 8y_0 - 5u_0}{s^2+8\cdot s+25}$$

partikuläre Lsg.

homogene Lsg.

Aufgabe 1: Laplace-Transformation

Aufgabe: 2. Berechnen Sie die Nullstellen des charakteristischen Polynoms. Bestimmen Sie die Bewegungen des Systems, allein aufgrund der Anfangsbedingungen im Zeitbereich.

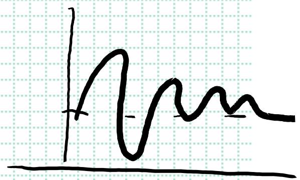
$$C(s) = s^2 + 8s + 25$$

$$s_{1,2} = -4 \pm 3j$$

Aufgabe 1: Laplace-Transformation

Aufgabe: 2. Berechnen Sie die Nullstellen des charakteristischen Polynoms. Bestimmen Sie die Bewegungen des Systems, allein aufgrund der Anfangsbedingungen im Zeitbereich.

$$Y_A(s) = \frac{y_0 \cdot s + \dot{y}_0 + 8 y_0 - u_0}{s^2 + 8s + 25} = \frac{5s + 20}{s^2 + 8s + 25} = \frac{5s + 20}{(s+4)^2 + 3^2}$$



$$= 5 \cdot \frac{s+4}{(s+4)^2 + 3^2} \xrightarrow{\text{Nr. 31}} \frac{s+\delta}{(s+\delta)^2 + \omega_e^2} \longrightarrow e^{-\delta t} \cdot \cos(\omega_e \cdot t)$$

$$y(t) = 5 \cdot e^{-4t} \cdot \cos(3t)$$

Aufgabe 1: Laplace-Transformation

Aufgabe: 3. Geben Sie die Streckenübertragungsfunktion $G_S(s) = Y(s)/U(s)$ an.

$$G(s) = \frac{5s+25}{s^2+8s+25}$$

Aufgabe 1: Laplace-Transformation

Aufgabe: 4. Geben Sie den Dämpfungsgrad D und die Eigenfrequenz des ungedämpften Systems ω_0 an.

$$G(s) = \frac{5s + 25}{s^2 + 8s + 25}$$

$$s^2 + 2D\omega_0 s + \omega_0^2$$

$$\omega_0 = \sqrt{25} = 5$$

$$8 = 2D\omega_0 \longrightarrow D = 0{,}8$$

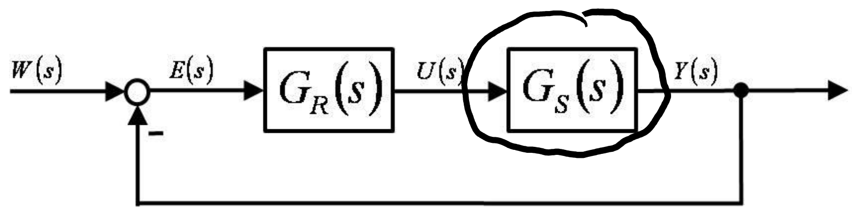
Aufgabe 1: Laplace-Transformation

Das System wird mit einem PID-Regler und negativer Rückführung geschlossen.

PID-Regler: $G_R(s) = \boxed{K_R \cdot \left(1 + \frac{1}{T_I \cdot s} + T_D \cdot s\right)}$

mit $K_R = \frac{8}{5}$, $T_D = \frac{1}{8}$, $T_I = \frac{8}{25}$

Übertragungsfkt.

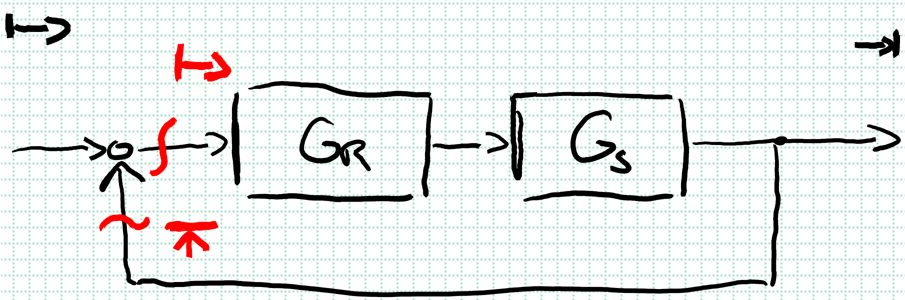


$$G_S(s) = \frac{5s+25}{s^2+8s+25}$$

Aufgabe 1: Laplace-Transformation

Aufgabe: 5. Geben Sie die Übertragungsfunktion des offenen Systems $G_0(s) = G_R(s) \cdot G_S(s)$ und des geschlossenen Regelkreises $G_w(s) = Y(s)/W(s)$ an.

$$G_R = K_R\left(1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s\right) \qquad K_R = \frac{8}{5}\,; \quad T_I = \frac{8}{25}\,; \quad T_D = \frac{1}{8}$$



$$G_0(s) = G_R(s) \cdot G_S(s)$$

$$G_0 = \frac{s^2 \cancel{+8s+25}}{5s} \cdot \frac{5s+25}{s^2 \cancel{+8s} + 25}$$

$$G_R = K_R \frac{T_D T_I s^2 + T_I s + 1}{T_I s} = \frac{s^2 + 8s + 25}{5s}$$

$$\frac{25}{\cancel{8}} \cdot \frac{\cancel{8}}{5} \cdot \frac{\frac{\cancel{8}}{25} \cdot \frac{1}{\cancel{8}} s^2 + \frac{8}{\cancel{25}} s + 1}{\frac{8}{25} s} \,(25)$$

$$\boxed{G_0(s) = \frac{5s+25}{5s}}$$

Aufgabe 1: Laplace-Transformation

Aufgabe: 5. Geben Sie die Übertragungsfunktion des offenen Systems $G_0(s) = G_R(s) \cdot G_S(s)$ und des geschlossenen Regelkreises $G_w(s) = Y(s)/W(s)$ an.

$$G_w = \frac{G_v}{1 + \underbrace{G_v G_r}_{G_0}} \qquad \underline{G_r = 1}$$

$$\longrightarrow G_w = \frac{G_0}{1 + G_0}$$

(nur Standardregelkreis)

Einheitsrückführung

$$1 + G_0 = 1 + \frac{5s+25}{5s} = \frac{10s+25}{5s}$$

$$G_w = \frac{G_0}{1+G_0} = \frac{5s+25}{\cancel{5s}} \cdot \frac{\cancel{5s}}{10s+25} = \frac{5s+25}{10s+25} = \underline{\underline{\frac{s+5}{2s+5}}}$$

Aufgabe 1: Laplace-Transformation

Aufgabe: 5. Ist der geschlossene Regelkreis $G_w(s)$ stabil?

$$G_w(s) = \frac{s+5}{2s+5}$$

Polstellen:

$$2s+5 = 0$$

$$s+2,5 = 0$$

$$s = -2,5$$

neg. Polstelle $\longrightarrow$ stabil

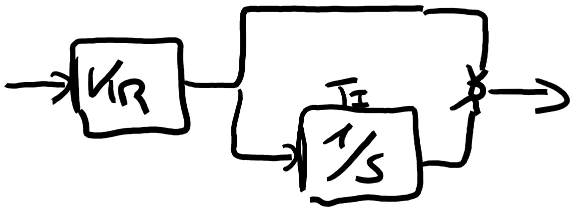
Aufgabe 2: Polkompensation

Gegeben ist das System

$$\boxed{G(s) = \frac{4}{(s+2)(s+3)(s+5)}}$$

Das System $G(s)$ soll im Folgenden mit einem PI-Regler

$$G_R(s) = K_R\left(1 + \frac{1}{T_I}\right)$$



geregelt werden.

Aufgabe 2: Polkompensation

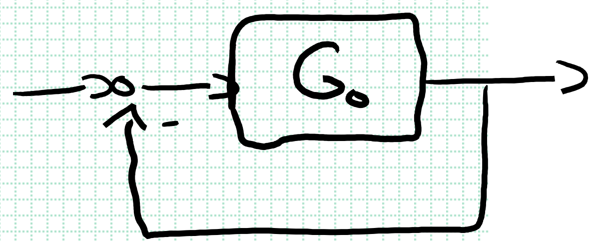
Aufgabe: 1. Bestimmen Sie die Nachstellzeit T_I des Reglers so, dass die Polstelle $s = -2$ der Regelstrecke kompensiert wird.

$$G_R = K_R\left(1+\frac{1}{T_I s}\right) = K_R\left(\frac{T_I s+1}{T_I s}\right) = K_R \frac{\cancel{T_I}\left(s+\frac{1}{T_I}\right)}{\cancel{T_I}\, s}$$

$T_I = 0{,}5$

$$G_0 = G_R \; G_S = K_R \frac{\cancel{\left(s+\overbrace{\frac{1}{T_I}}^{=2}\right)}}{s} \; \frac{4}{\cancel{(s+2)}(s+3)(s+5)}$$

$$= \frac{4K_R}{s(s+3)(s+5)}$$



Aufgabe 2: Polkompensation

Aufgabe: 2. Bestimmen Sie den Bereich für K_R für den der geschlossene Regelkreis stabil ist

$$G(s) = \frac{G_0}{1 + G_0}$$

$$1 + G_0 = 1 + \frac{4K_R}{s(s+3)(s+5)} = \frac{s(s+3)(s+5) + 4K_R}{s(s+3)(s+5)}$$

$$G = \frac{4K_R}{\cancel{s(s+3)(s+5)}} \cdot \frac{\cancel{s(s+3)(s+5)}}{s(s+3)(s+5) + 4K_R} = \frac{4K_R}{s^3 + 8s^2 + 15s + 4K_R}$$

Aufgabe 2: Polkompensation

Aufgabe: 2. Bestimmen Sie den Bereich für K_R für den der geschlossene Regelkreis stabil ist

Hurwitz

not. Bed.: $a_3 = 1$; $a_2 = 8$; $a_1 = 15$; $a_0 = 4K_R$

$\hookrightarrow \underline{\underline{K_R > 0}}$

hin. Bed.: $H_1 = a_2 = 8 > 0$

$$H_2 = \begin{vmatrix} 8 & 4K_R \\ 1 & 15 \end{vmatrix} = 8 \cdot 15 - 4K_R = 120 - 4K_R > 0$$

$K_R < 30$

$120 > 4K_R$

$30 > K_R$

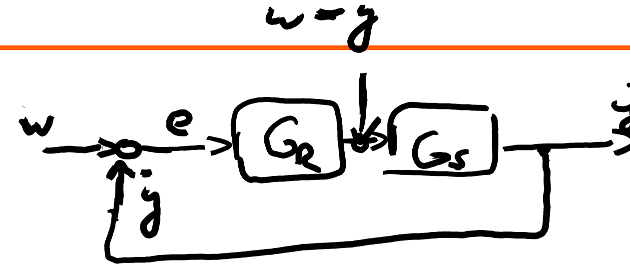
$$\boxed{0 < K_R < 30}$$

Aufgabe 2: Polkompensation

Aufgabe: 3. Wie wirkt sich die Wahl der Reglerverstärkung K_R auf die Sprungantwort des geschlossenen Regelkreises aus?

Stat. Genauigkeit

$$h_\infty = \lim_{t \to \infty} h(t) = \lim_{s \to 0} \cancel{s} \cdot G(s) \cdot \frac{1}{\cancel{s}} = \lim_{s \to 0} \frac{4K_R}{s^3 + 8s^2 + 15s + 4K_R} = 1$$



Einschub stationäre Genauigkeit

Definition:

Stationäre Genauigkeit eines Regelkreises ist gegeben, wenn die $\overbrace{\textbf{Regelabweichung}}^{e}$ nach der Vorgabe eines Sprungsignals als Sollwert (bzgl. Führungsverhalten) oder nach Einwirken einer sprungförmigen Störung (bzgl. Störverhalten) **für *t* → ∞ zu Null** wird.

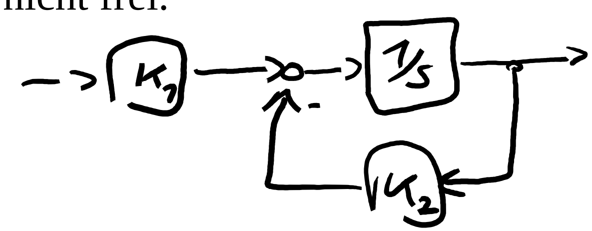
IT_1

$$G_0 = K_R \cdot \frac{K}{s(s+T)}$$

Voraussetzung: Stabilität des geschlossenen Kreises

Stationäre Genauigkeit bzgl. Führungsverhalten:

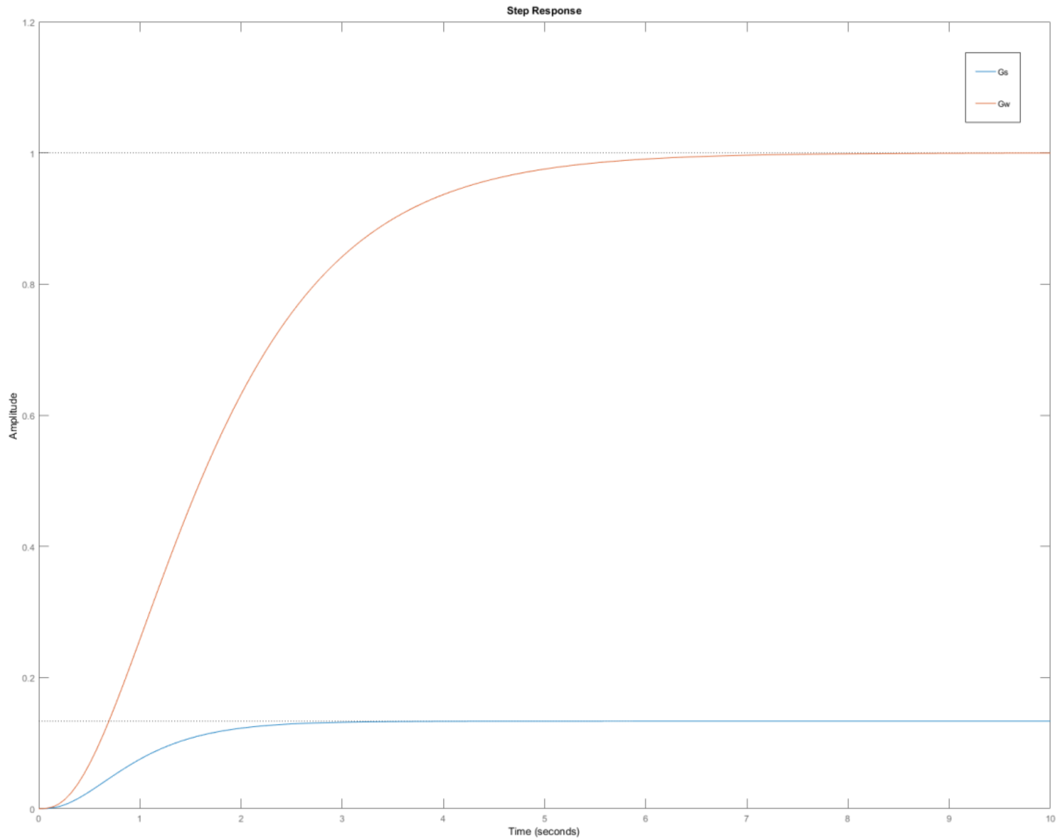
- Freies I-Glied liegt im offenen Kreis (nur bei stationär genauer Messung)
- Mit einem freien I-Glied ist ein I-Glied gemeint, das **im offenen Kreis einen Pol im Ursprung** bewirkt.
- Frei sind deshalb alle I-Glieder, die nicht in eine unterlagerte Rückführung eingebunden sind
- I-Glieder innerhalb von PT1- oder PT2-Gliedern, etc. sind somit nicht frei.



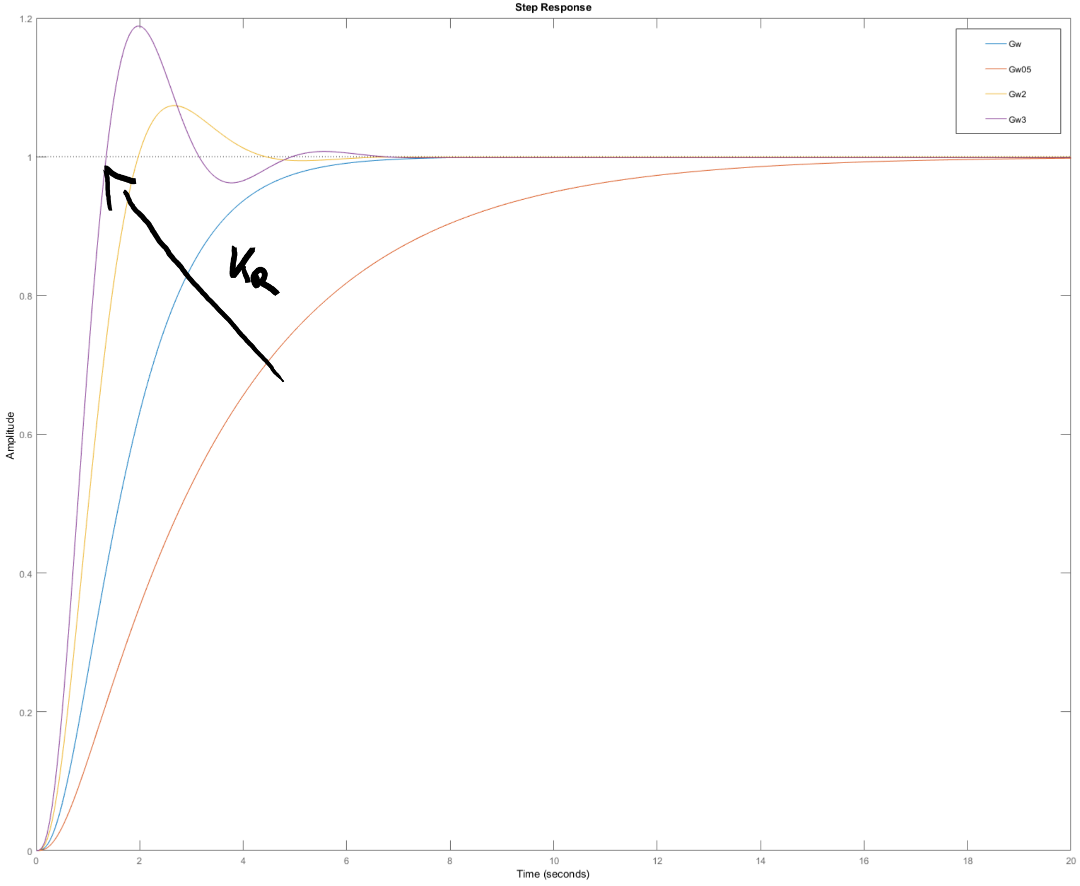
<u>Im Falle stationärer Genauigkeit gilt:</u>

- Offener Kreis hat Pol im Ursprung
- (Führungs-)Übertragungsfunktion hat stationäre Verstärkung 1

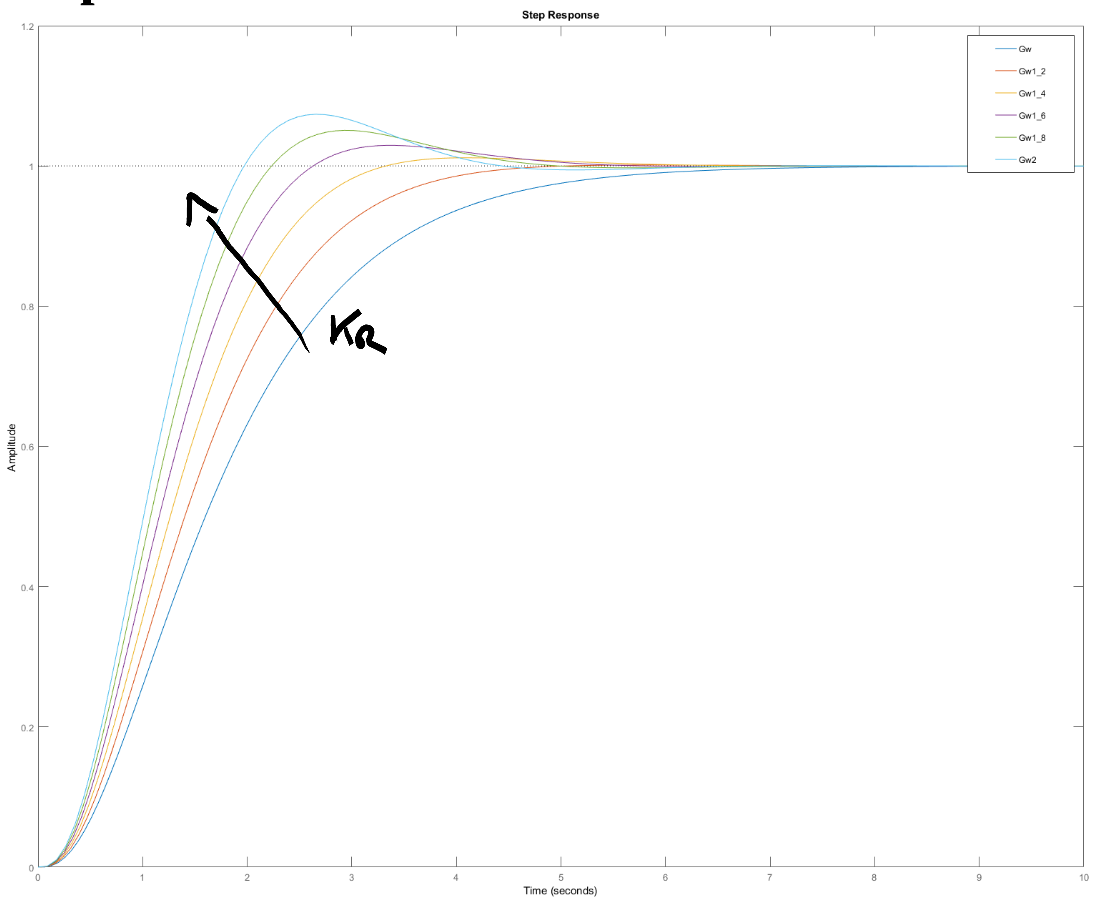
Aufgabe 2: Polkompensation



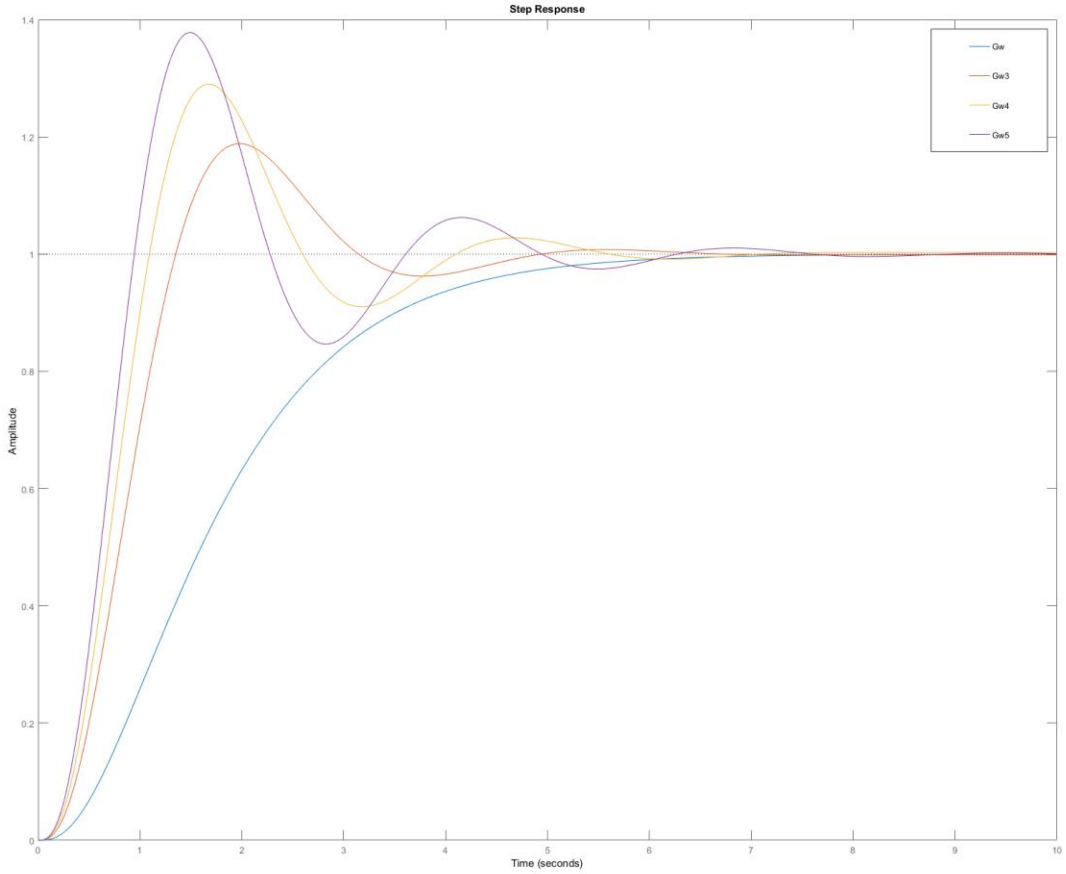
Aufgabe 2: Polkompensation



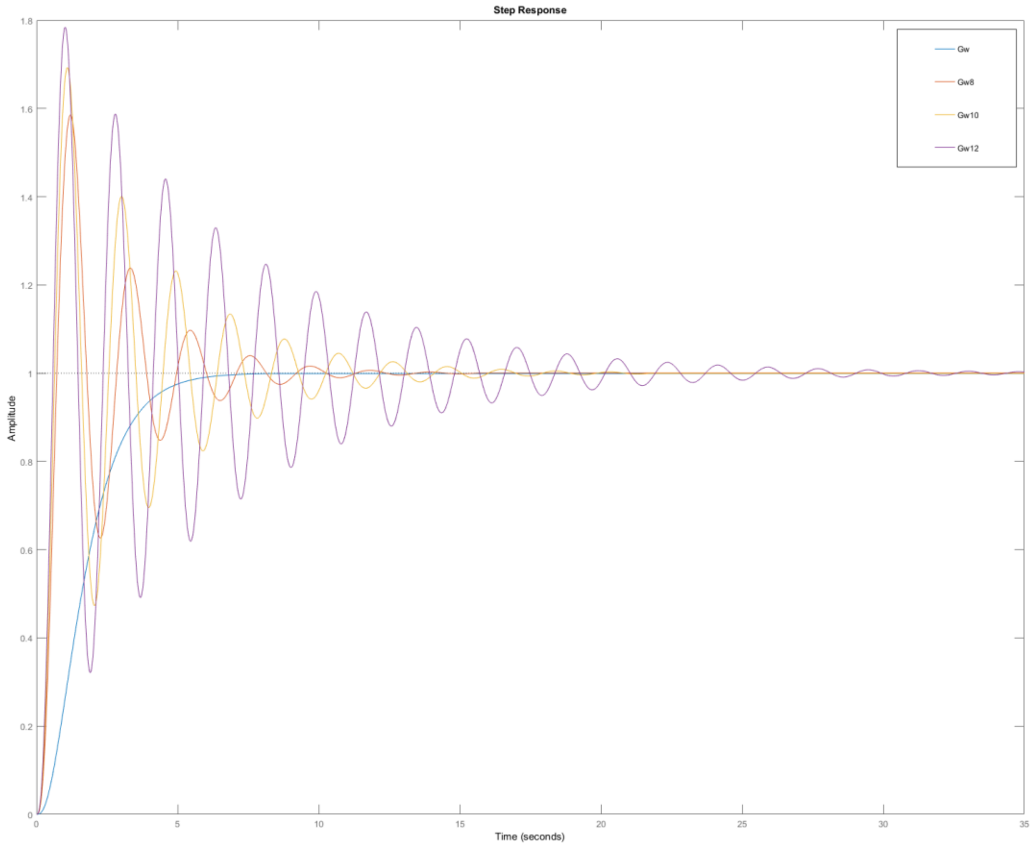
Aufgabe 2: Polkompensation



Aufgabe 2: Polkompensation



Aufgabe 2: Polkompensation



Aufgabe 2: Polkompensation