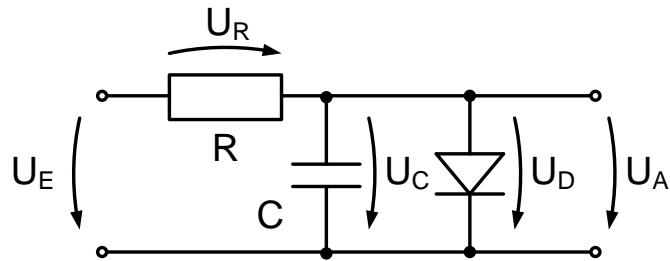


Lösung Aufgabe 1:

Gegeben ist das folgende elektrische nichtlineare System



mit dem Widerstand R, dem Kondensator C und der Diode, welche durch die nichtlineare Strom-Spannungs-Beziehung $i_D(U_D) = I_S \cdot (e^{k \cdot U_D} - 1)$ beschrieben wird.

1. Stellen Sie die Maschen- und Knotensätze zur Beschreibung des elektrischen Systems auf.

- Maschensatz: $U_E(t) = U_R(t) + U_C(t) = U_R(t) + U_D(t) = U_R(t) + U_A(t)$.
- Knotensatz: $i_R(t) = i_C(t) + i_D(U_D(t))$.

2. Geben Sie die nichtlineare Differenzialgleichung zur Beschreibung des Ein-Ausgangsverhaltens des Systems an und verwenden Sie dabei die Bezeichnung $y(t) = U_A(t)$ für den Systemausgang und $u(t) = U_E(t)$ für den Systemeingang.

- $U_E = U_R + U_C = i_R \cdot R + U_C = (i_C + i_D) \cdot R + U_C$
- $U_E = \left(C \cdot \frac{d}{dt} U_C + I_S \cdot (e^{k \cdot U_D} - 1) \right) \cdot R + U_C$
- $U_E = R \cdot C \cdot \frac{d}{dt} U_C + R \cdot I_S \cdot (e^{k \cdot U_D} - 1) + U_C$
- $U_E = U_A - R \cdot I_S + R \cdot I_S \cdot e^{k \cdot U_A} + R \cdot C \cdot \frac{d}{dt} U_A$
- $u = y - R \cdot I_S + R \cdot I_S \cdot e^{k \cdot y} + R \cdot C \cdot \frac{d}{dt} y$
- $u = y - R \cdot I_S + R \cdot I_S \cdot e^{k \cdot y} + \tau \cdot \frac{d}{dt} y$

3. Linearisieren Sie die nichtlineare Differentialgleichung in dem Arbeitspunkt (u_0, y_0) und geben sie die linearisierte Differentialgleichung an.

$$a. \quad f(\dot{y}, y, u) = 0 \stackrel{!}{=} \underbrace{f(\dot{y}_0, y_0, u_0)}_{=0} + \underbrace{\left. \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right|_0 \cdot \Delta \dot{y} + \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_0 \cdot \Delta y + \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_0 \cdot \Delta u}_{\text{linearisierte DGL} = 0}$$

$$b. \quad y - R \cdot I_S + R \cdot I_S \cdot e^{k \cdot y} + R \cdot C \cdot \frac{d}{dt} y - u = 0$$

$$c. \quad 0 \stackrel{!}{=} R \cdot C \cdot \Delta \dot{y} + (1 + R \cdot I_S \cdot k \cdot e^{k \cdot y_0}) \cdot \Delta y - \Delta u$$

$$d. \quad 0 = \tau \cdot \Delta \dot{y} + (1 + k_0) \cdot \Delta y - \Delta u$$

$$e. \quad \Delta \dot{y} = -\frac{1+k_0}{\tau} \cdot \Delta y + \frac{1}{\tau} \cdot \Delta u$$

4. Transformieren Sie die linearisierte Differentialgleichung in den Laplace-Bereich und geben Sie die Übertragungsfunktion $G(s) = \frac{\Delta Y(s)}{\Delta U(s)}$ mit $\Delta y(0) = 0$ an.

$$a. \quad \Delta \dot{y} = -\frac{1+k_0}{\tau} \cdot \Delta y + \frac{1}{\tau} \cdot \Delta u$$

$$b. \quad \Delta Y(s) \cdot \left(s + \frac{1+k_0}{\tau} \right) = \frac{1}{\tau} \cdot \Delta U(s)$$

$$c. \quad \Delta Y(s) = \frac{\frac{1}{\tau}}{s + \frac{1+k_0}{\tau}} \cdot \Delta U(s)$$

$$d. \quad G(s) = \Delta Y(s) / \Delta U(s) = \frac{1}{\tau \cdot s + 1 + k_0}$$

5. Für was für eine Art von Übertragungsglied handelt es sich dabei? Geben Sie die Parameter des Übertragungsgliedes an.

$$a. \quad \Delta Y(s) = \frac{1}{\tau \cdot s + 1 + k_0} \cdot \Delta U(s)$$

$$b. \quad \Delta Y(s) = \frac{1}{1+k_0} \cdot \frac{1}{\frac{\tau}{1+k_0} \cdot s + 1} \cdot \Delta U(s)$$

$$c. \quad \Delta Y(s) = K \cdot \frac{1}{T \cdot s + 1} \cdot \Delta U(s) \rightarrow \text{PT}_1\text{-Glied}$$

$$d. \quad \text{mit } K = \frac{1}{1+k_0} \text{ und } T = \frac{\tau}{1+k_0}$$

Die Systemverstärkung ist also etwas geringer als eins und die Filterzeitkonstante ist etwas geringer als die eines vergleichbaren RC-Gliedes ohne die Diode

Lösung Aufgabe 2: Modellbildung (10 Punkte)

2.1 Arbeitspunkt (Ableitungen gleich Null):

$$m \cdot l^2 \cdot \ddot{\theta}(t) + d \cdot \dot{\theta}^2(t) + m \cdot l \cdot g \cdot \cos(\theta(t)) = 0$$

$$m \cdot l \cdot g \cdot \cos(\theta_0) = 0$$

$$\cos\left(\theta_0 = \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

2.2 Linearisierung

$$m \cdot l^2 \cdot \Delta \ddot{\theta}(t) + 2 \cdot d \cdot \dot{\theta}_0 \cdot \Delta \dot{\theta}(t) - m \cdot l \cdot g \cdot \sin(\theta_0) \cdot \Delta \theta(t) = \Delta M_u(t)$$

2.3 AP $(\theta_0, 0, 0, 0)$ einsetzen:

$$m \cdot l^2 \cdot \Delta \ddot{\theta}(t) - m \cdot l \cdot g \cdot 1 \cdot \Delta \theta(t) = \Delta M_u(t)$$

2.4 Laplace-Transformation:

$$m \cdot l^2 \cdot s^2 \cdot \Delta \theta(s) - m \cdot l \cdot g \cdot \Delta \theta(s) = \Delta M_u(s) + m \cdot l^2 \cdot (s \cdot \theta_0 + \dot{\theta}_0)$$

Übertragungsfunktion:

$$G(s) = \frac{\Delta \theta(s)}{\Delta M_u(s)} = \frac{1}{m \cdot l^2 \cdot s^2 - m \cdot l \cdot g}$$

2.5 Stabilität:

$$m \cdot l^2 \cdot s^2 - m \cdot l \cdot g = 0$$

$$s = \pm \sqrt{\frac{g}{l}} \quad \rightarrow \quad \text{Instabiles System, da Pol in rechter s-Halbebene!}$$