1. Repetitorium zur Übung „Steuer- und Regelungstechnik“

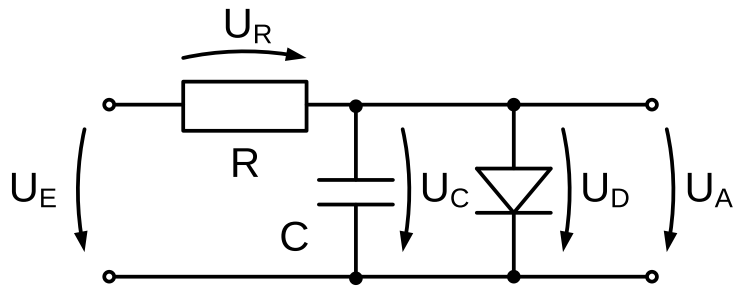
Modellbildung, Linearisierung

Felix Goßmann M.Sc.

Institut für Steuer- und Regelungstechnik
Fakultät für Luft- und Raumfahrttechnik
Universität der Bundeswehr München

Aufgabe 1: Modellbildung/Linearisierung (10P)

Gegen ist das folgende nichtlineare elektrische System,



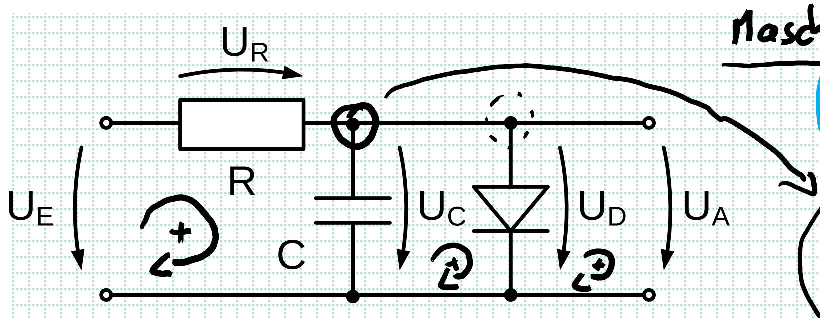
$i_c = C \cdot \frac{d}{dt} u_c$

mit dem Widerstand R, dem Kondensator C und einer Diode, welche durch die nichtlineare Strom-Spannungs-Beziehung $i_D(U_D) = I_S \cdot (e^{k \cdot U_D} - 1)$ beschrieben wird.

I_s, K sind Konstanten

Aufgabe 1: Modellbildung/Linearisierung (10P)

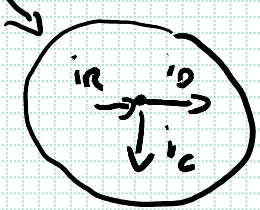
Aufgabe: 1. Stellen Sie die Maschen- und Knotensätze des elektrischen Systems auf.



Maschenregel

$$\boxed{U_E = U_R + U_C}$$

$$\boxed{U_C = U_D = U_A}$$



$$\boxed{i_R = i_C + i_D}$$

Aufgabe 1: Modellbildung/Linearisierung (10P)

Aufgabe: 2. Geben Sie die nichtlineare Differentialgleichung zur Be-schreibung des Ein-Ausgangsverhaltens des Systems an und verwenden Sie dabei die Bezeichnung $y(t) = U_A(t)$ für den Systemausgang und $u(t) = U_E(t)$ für den Systemeingang.

$$U_E = \underbrace{U_R}_{i_R R} + U_C = i_R \cdot R + U_C = (i_C + i_D) R + U_C$$

$$U_C = U_D = U_A$$

$$U_E = R \cdot \Big[\underbrace{C \cdot \frac{d}{dt} U_C}_{i_C} + \underbrace{I_s (e^{k \cdot U_D} - 1)}_{i_D} \Big] + U_C$$

$$u = U_E$$

$$y = U_A$$

$$U_E = R \cdot C \frac{d}{dt} U_A + R \cdot I_s e^{k \cdot U_A} - R I_s + U_A$$

$$\Rightarrow u = R \cdot C \dot{y} + R \cdot I_s e^{k y} + y - \overbrace{R I_s}^{\text{konst.}}$$

Aufgabe 1: Modellbildung/Linearisierung (10P)

Aufgabe: 3. Linearisieren Sie die nichtlineare Differentialgleichung in dem Arbeitspunkt (u_0, y_0) und geben sie die linearisierte Differentialgleichung an.

$$0 = y - RI_s + RI_s e^{ky} + RC\dot{y} - u \quad = f(y, \dot{y}, u)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 1 + RI_s k e^{ky}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} = RC$$

$$\frac{\partial f}{\partial u} = -1$$

Aufgabe 1: Modellbildung/Linearisierung (10P)

Aufgabe: 3. Linearisieren Sie die nichtlineare Differentialgleichung in dem Arbeitspunkt (Ruhelage) (u_0, y_0) und geben sie die linearisierte Differentialgleichung an.

$$0 = \underbrace{f(\dot{y}_0, y_0, u_0)}_{=0} + \left.\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\right|_{\dot{y}_0, y_0, u_0} \Delta\dot{y} + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\dot{y}_0, y_0, u_0} \Delta y + \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{\dot{y}_0, y_0, u_0} \Delta u$$

$$\Leftrightarrow\ 0 = RC\,\Delta\dot{y} + (1 + RI_s \cdot k\, e^{k y_0})\,\Delta y - \Delta u$$

$$\Leftrightarrow\ \underline{\underline{\Delta u = RC\,\Delta\dot{y} + (1 + RI_s k\, e^{k y_0})\,\Delta y}}$$

Aufgabe 1: Modellbildung/Linearisierung (10P)

Aufgabe: 4. Transformieren Sie die linearisierte Differentialgleichung in den Laplace-Bereich und geben Sie die Übertragungsfunktion $G(s) = \frac{\Delta Y(s)}{\Delta U(s)}$ an.

Führen Sie die Konstanten $\tau = R \cdot C$ *und* $k_0 = R \cdot I_S \cdot k \cdot e^{k \cdot y_0}$ *ein und* $\Delta y(0) = 0$.

$$\Delta u = \tau \cdot \Delta \dot{y} + (1 + k_0)\, \Delta y$$

$$\hookrightarrow \Delta U(s) = \tau \cdot s \cdot \Delta Y(s) + (1 + k_0)\, \Delta Y(s)$$

$$G(s) = \frac{\Delta Y(s)}{\Delta U(s)}$$

$$\Delta U(s) = \Delta Y(s)\,(\tau s + 1 + k_0)$$

$$G(s) = \frac{1}{\tau \cdot s + 1 + k_0} = \frac{1}{1 + k_0} \cdot \frac{1}{\frac{\tau}{1 + k_0} s + 1}$$

Aufgabe 1: Modellbildung/Linearisierung (10P)

Aufgabe: 5. Um was für eine Art von Übertragungsglied handelt es sich dabei? Geben Sie die Parameter des Übertragungsgliedes an.

$$G(s) = \underbrace{\left(\frac{1}{1+k_0}\right)}_{K} \cdot \frac{1}{\underbrace{\left(\frac{T}{1+k_0}\right)}_{T} s + 1} \rightarrow \underline{PT_1} \rightarrow 1P$$

K → stat. Verstärkung

T → Zeitkonstante

$$G(s) = \frac{K}{Ts+1}$$

$$K = \frac{1}{1+k_0}$$

$$T = \frac{T}{1+k_0}$$

→ 1P

Aufgabe 2: Modellbildung (10P)

Gegeben ist folgende nichtlineare Momentenbilanz eines „Inversen Pendels“:

$$m \cdot l^2 \cdot \ddot{\theta}(t) + d \cdot \dot{\theta}^2(t) + m \cdot l \cdot g \cdot cos\big(\theta(t)\big) = M_u(t)$$

mit der Masse m, der Pendellänge l, der Dämpfungskonstante d sowie der Erdbeschleunigung g.

Aufgabe 2: Modellbildung (10P)

Aufgabe: 1. Bestimmen Sie die Ruhelage für den Fall $M_u(t) = 0$ im Bereich von 0 bis π.

$\ddot{\Theta} = \dot{\Theta} = 0$

$m l g \cos\Theta = \cancel{M_u} \rightarrow 0$

$\Theta_0 = \frac{\pi}{2}$

Ruhelage $\left(0, 0, \frac{\pi}{2}\right)$

Aufgabe 2: Modellbildung (10P)

Aufgabe: 2. Linearisieren Sie die nichtlineare Differentialgleichung

$$ml^2\ddot{\Theta} + d\dot{\Theta}^2 + mlg\cos(\Theta) - M_u = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial \ddot{\Theta}} = ml^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial \dot{\Theta}} = 2d\dot{\Theta}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \Theta} = -mlg\sin(\Theta)$$

$$\frac{\partial f}{\partial M_u} = -1$$

$$\longrightarrow 0 = \cancelto{0}{f(\ddot{\Theta}_0, \dot{\Theta}_0, \Theta_0, M_{u,0})} + ml^2\Delta\ddot{\Theta}$$

$$+ 2d\dot{\Theta}_0 \cdot \Delta\dot{\Theta} - mlg\sin(\Theta_0)\Delta\Theta$$

$$-\Delta M_u$$

Aufgabe 2: Modellbildung (10P)

Aufgabe: 2. Linearisieren Sie die nichtlineare Differentialgleichung

$$\Delta M_u = ml^2 \Delta\ddot{\Theta} + 2d \underbrace{\dot{\Theta}_0}_{=0} \Delta\dot{\Theta} - mlg \sin(\underbrace{\Theta_0}_{=\frac{\pi}{2}}) \Delta\Theta$$

→ Ruhelage einsetzen:

$$\boxed{\Delta M_u = ml^2 \Delta\ddot{\Theta} - mlg \, \Delta\Theta}$$

Aufgabe 2: Modellbildung (10P)

Aufgabe: 4. Transformieren Sie die linearisierte Differentialgleichung in den Laplace-Bereich und geben die Übertragungsfunktion $G(s) = \frac{\Delta\theta(s)}{\Delta M_u(s)}$ an.

$$ml^2\left(s^2 s\Theta(s) - \overset{=0}{\cancel{s\cdot\Theta_0 - \dot{\Theta}_0}}\right) - mlg\, s\Theta(s) = sM_u(s)$$

Übertragungsfkt: System eingeschwungen $\longrightarrow$ Anfangswerte $= 0$

$$ml^2 s^2 s\Theta(s) - mlg\, s\Theta(s) = sM_u(s)$$

$$s\Theta(s)\left(ml^2 s^2 - mlg\right) = sM_u(s)$$

$$\longrightarrow \boxed{G(s) = \frac{1}{ml^2\cdot s^2 - mlg}}$$

Aufgabe 2: Modellbildung (10P)

Aufgabe: 5. Ist das erhaltene System stabil (Begründung)?

$$G(s) = \frac{1}{\underbrace{ml^2}_{a_2} \cdot s^2 \underbrace{- mlg}_{a_0}}$$

- a_1 fehlt
- Vorzeichenwechsel

→ notw. Bed. nicht erfüllt

→ **instabil**

alternative

$$ml^2 s^2 - mlg = 0$$

$$s = \pm\sqrt{\frac{g}{l}} \longrightarrow \text{Polstelle mit pos. Vorzeichen} \longrightarrow \text{instabil}$$