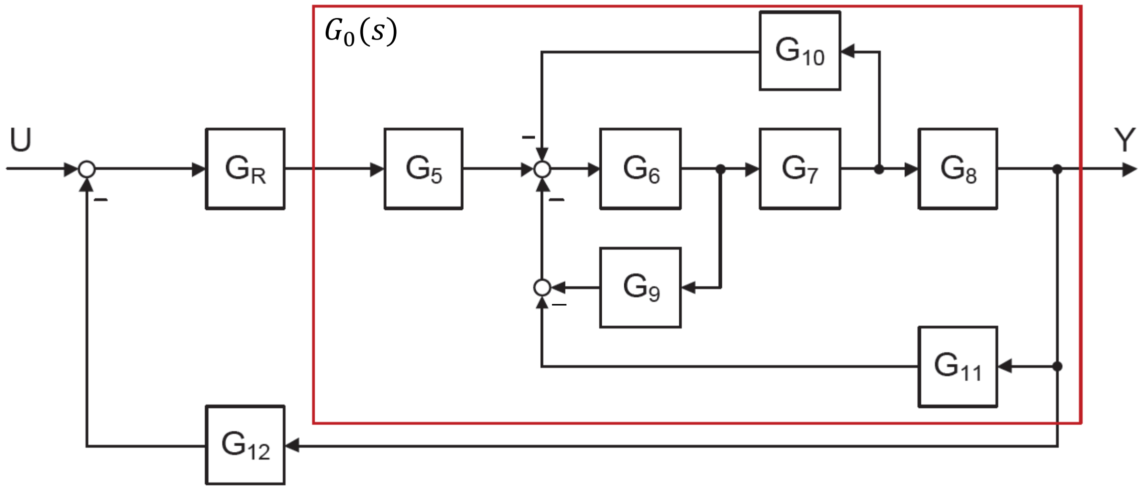
# Lösung zur 9. Übung „Steuer- und Regelungstechnik“

Künstliche Stabilität, Reglerentwurf, Polkompensation

## Aufgabe 9.1: Reglerentwurf nach Ziegler-Nichols

Gegeben ist das folgende System in Blockschaltbild-Form

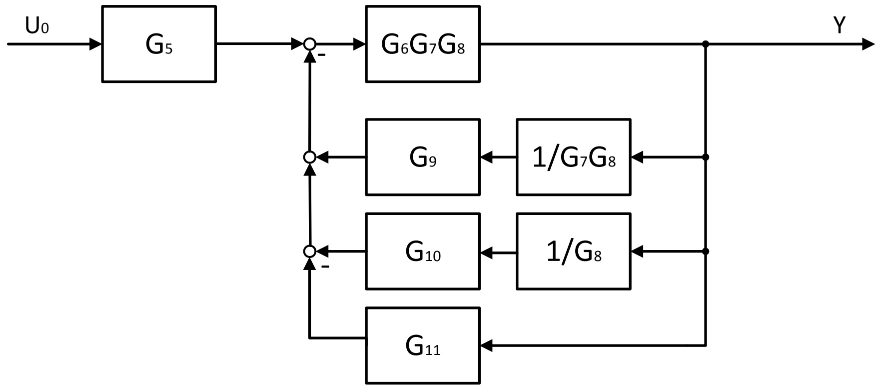



mit den allgemeinen Übertragungsfunktionen $G_5(s) - G_{12}(s)$ sowie $G_R(s)$.

Für die Übertragungsfunktionen gilt:

$$G_5 = K \ ; \ G_6 = \frac{2}{s+1} \ ; \ G_7 = G_8 = \frac{1}{s} \ ; \ G_9 = 2 \ ; \ G_{10} = 3 \ ; \ G_{11} = G_{12} = \frac{1}{s+2}$$

a) Umstellen des relevanten Blockschaltbildes:




Nun lässt sich das System mit den in Übung 6 einführten Regeln zusammenfassen. Die Übertragungsfunktion $G_6G_7G_8$ wird mit der oben dargestellten Parallelschaltung aus den drei Reihenschaltungen rückgekoppelt. Das zusammengefasste liegt dann noch mit $G_5$ in Reihe geschaltet vor. Somit lässt sich die Übertragungsfunktion $G_0 = \frac{Y}{U_0}$ sehr einfach aufstellen:

$$G_0(s) = G_5 \cdot \frac{G_6 \cdot G_7 \cdot G_8}{1 + G_6 \cdot G_7 \cdot G_8 \cdot \left(\frac{G_9}{G_7 \cdot G_8} + \frac{G_{10}}{G_8} - G_{11}\right)}$$

$$\underline{G_0(s) = \frac{G_5 \cdot G_6 \cdot G_7 \cdot G_8}{1 + G_6 \cdot G_9 + G_6 \cdot G_7 \cdot G_{10} - G_6 \cdot G_7 \cdot G_8 \cdot G_{11}}}$$

b) Einsetzen der angegebenen Übertragungsfunktionen für $G_5 - G_{11}$:

$$G_0 = \frac{K \cdot \frac{2}{s+1} \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s}}{1 + 2 \cdot \frac{2}{s+1} + 3 \cdot \frac{2}{s+1} \cdot \frac{1}{s} - \frac{2}{s+1} \cdot \frac{1}{s+2} \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s}}$$

$$= \frac{\frac{2K}{s^3 + s^2}}{\frac{s^2(s+1)(s+2) + 4s^2(s+2) + 6s(s+2) - 2}{s^2(s+1)(s+2)}}$$

$$= \frac{2K}{s^2(s+1)} \cdot \frac{s^2(s+1)(s+2)}{s^4 + 7s^3 + 16s^2 + 12s - 2}$$

$$= \frac{2K(s+2)}{\underbrace{1}_{a_4} \cdot s^4 + \underbrace{7}_{a_3} \cdot s^3 + \underbrace{16}_{a_2} \cdot s^2 + \underbrace{12}_{a_1} \cdot s - \underbrace{2}_{a_0}}$$

Bei Betrachtung der Koeffizienten des Nennerpolynoms wird sofort klar, dass die notwendige Bedingung eines Hurwitz-Polynoms nicht erfüllt ist, da nicht alle Koeffizienten das gleiche Vorzeichen haben ($a_0$ ist negativ). Das System ist somit instabil.

c) Für die gesamte Übertragungsfunktion $G(s)$ gilt: $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{G_v(s)}{1+G_v(s) \cdot G_r(s)}$ (siehe Ü.6 – Zusammenfassung von Rückkopplungen)

$$G_v(s) = G_0(s) \cdot G_R(s)$$
$$G_r(s) = G_{12}(s)$$

$$1 + G_v \cdot G_r = 1 + G_0 \cdot G_R \cdot G_{12} = 1 + \frac{2K \cdot G_R}{s^4 + 7s^3 + 16s^2 + 12s - 2}$$

$$= \frac{s^4 + 7s^3 + 16s^2 + 12s - 2 + 2K \cdot G_R}{s^4 + 7s^3 + 16s^2 + 12s - 2}$$

$$G = \frac{2K \cdot G_R(s+2)}{s^4+7s^3+16s^2+12s-2} \cdot \frac{s^4+7s^3+16s^2+12s-2}{s^4+7s^3+16s^2+12s-2+2K \cdot G_R} = \underline{\frac{2K \cdot G_R(s+2)}{s^4+7s^3+16s^2+12s-2+2K \cdot G_R}}$$

d) Damit ein System stabilisierbar ist, muss durch den Regler und die Rückkopplung das Nennerpolynom der Gesamtübertragungsfunktion $G(s)$ so verändert werden können, dass dessen Nullstellen, also die Polstellen der Übertragungsfunktion, alle negative Realteile besitzen. Im Kontext der algebraischen Stabilitätskriterien bedeutet dies, durch die Regelung muss das Nennerpolynom der Übertragungsfunktion in ein Hurwitz-Polynom überführt werden können.

Es gilt laut Aufgabenstellung: $G_R(s) = K_R$

Zur Überprüfung der Stabilisierbarkeit wird nun das Hurwitz-Kriterium in Abhängigkeit von $K_R$ auf das Nennerpolynom

$$N(s) = \underbrace{1}_{a_4} s^4 + \underbrace{7}_{a_3} s^3 + \underbrace{16}_{a_2} s^2 + \underbrace{12}_{a_1} s - \underbrace{2 + 2K \cdot K_R}_{a_0}$$

angewandt.

<u>notwendige Bedingung:</u>
- alle $a_i$ für $i = 0, \ldots, n$ müssen vorhanden sein und das gleiche Vorzeichen besitzen

$$a_4, a_3, a_2, a_1 > 0 \qquad \Rightarrow a_0 = -2 + 2K \cdot K_R > 0$$
$$\Leftrightarrow K_R > \frac{1}{K} \text{ für } K > 0 \text{ (nach A.S.)}$$

<u>hinreichende Bedingung:</u>
- Die Hurwitzdeterminante $H_{n-1}$ sowie alle ihre Hauptdeterminanten müssen größer als Null sein
- $n = 4$, also müssen die Determinanten $H_3, H_2$ und $H_1$betrachtet werden
- $H_1 = a_3 = 7 > 0$
- $H_2 = \begin{vmatrix} 7 & 12 \\ 1 & 16 \end{vmatrix} = 100 > 0$
- $H_3 = \begin{vmatrix} 7 & 12 & 0 \\ 1 & 16 & -2 + 2KK_R \\ 0 & 7 & 12 \end{vmatrix} = 1344 - 144 + 98 - 98KK_R > 0$

  $\Rightarrow K_R < \frac{13{,}25}{K}$

Da das System durch einen P-Regler in ein Hurwitz-Polynom überführt werden kann, ist es <u>stabilisierbar.</u>

Der geschlossene Regelkreis arbeitet dabei für ein $K_R$ mit $\underline{\frac{1}{K} < K_R < \frac{13{,}25}{K}}$ mit $K > 0$ asymptotisch stabil.

e) Für die Aufgabe gilt $K_R = 12$.

Damit ergibt sich für die Übertragungsfunktion $G(s) = \frac{24K(s+2)}{s^4+7s^3+16s^2+12s-2+24K}$

Die Sprungantwort des Systems berechnet sich zu $H(s) = \frac{1}{s} \cdot G(s)$ (siehe Ü.5)

Berechnung des stationären Endwerts:

$$y_\infty = \lim_{t\to\infty} h(t) = \lim_{s\to 0} s \cdot H(s) = \lim_{s\to 0} G(s) = \frac{48K}{-2+24K} = 12 \text{ (laut A.S.)}$$

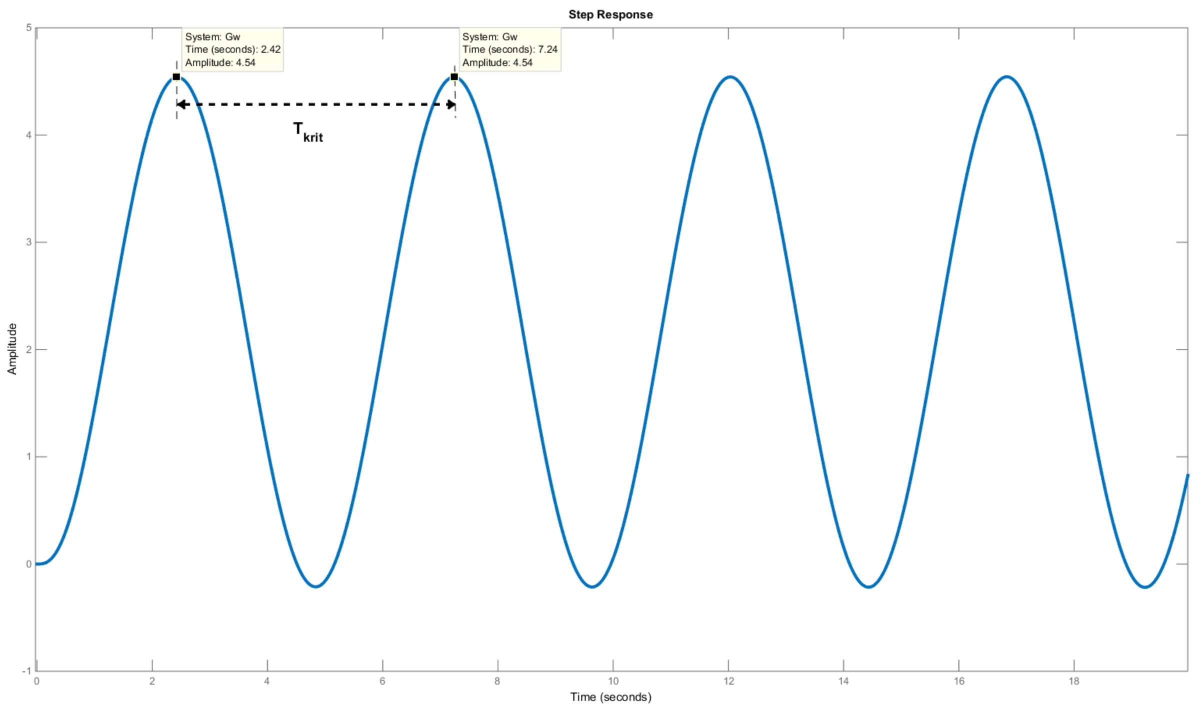
$$\Rightarrow 48K = -24 + 288K$$
$$\Leftrightarrow \underline{K = \frac{1}{10}}$$

Da der Endwertsatz nur für stabile Systeme gültig ist, muss das Resultat zum Abschluss noch auf Plausibilität geprüft werden. Einsetzen des erhaltenen Wertes für $K$ ergibt:

$$10 < K_R < 132.5$$

Der für $K_R$ angegebene Wert liegt in diesem Intervall, somit ist der Grenzwertsatz anwendbar und das Ergebnis plausibel.

f) Reglerentwurf nach Ziegler-Nichols:
- empirische Einstellregeln, basierend auf einem Schwingversuch
- Regelkreis wird mit einem P-Regler geschlossen und die Regelverstärkung so lange erhöht, bis die Stabilitätsgrenze erreicht ist.
- Dafür notwendige Regelverstärkung wird mit $K_{krit}$ bezeichnet, die Periodendauer der an der Stabilitätsgrenze auftretenden Dauerschwingung mit wird $T_{krit}$ bezeichnet.




- Mit Hilfe dieser beiden Kennwerte lassen sich dann die Reglerparameter wie folgt ermitteln:

| | | Reglereinstellwerte | | |
|---|---|---|---|---|
| | Reglertypen | $K_R$ | $T_I$ | $T_D$ |
| Methode I | P | $0{,}5\ K_{Rkrit}$ | - | - |
| | PI | $0{,}45\ K_{Rkrit}$ | $0{,}85\ T_{krit}$ | - |
| | PID | $0{,}6\ K_{Rkrit}$ | $0{,}5\ T_{krit}$ | $0{,}12\ T_{krit}$ |

Der Stabilitätsrand wurde in Aufgabe d) bereits rechnerisch ermittelt. Das $\boldsymbol{K_{krit}}$ ergibt sich also zu $\boldsymbol{K_{krit} = \frac{13{,}25}{K} = 132{,}5}$. Das $\boldsymbol{T_{krit}}$ ergibt sich laut Aufgabenstellung zu $\boldsymbol{T_{krit} = 5s}$.

<u>P-Regler:</u> reine proportionale Rückführung der Regelabweichung mit dem Faktor $K_R$

Nach der oben dargestellten Tabelle ergibt sich somit für den Regler die Übertragungsfunktion $\underline{G_R(s) = 0{,}5 \cdot K_{krit} = 66{,}25}$

<u>PI-Regler:</u> dem P-Anteil ist noch ein Integrator (I) parallelgeschaltet, sodass die Regelabweichung zusätzlich noch integriert wird. Die allgemeine Übertragungsfunktion lautet:

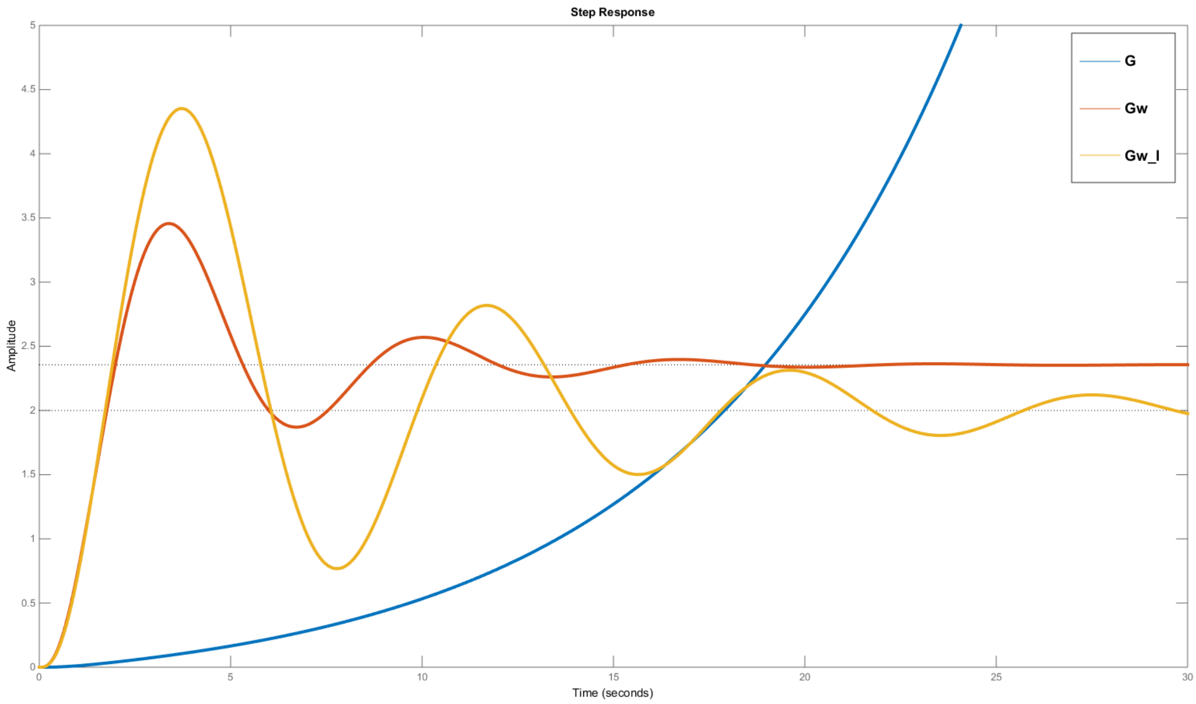
$$G_R(s) = K_R \cdot \left( \underbrace{1}_{P} + \underbrace{\frac{1}{s \cdot T_I}}_{I} \right)$$

Zusätzlich zur Reglerverstärkung $K_R$ muss also noch die Zeitkonstante $T_n$ (auch Nachstellzeit genannt) des Integrators bestimmt werden. Aus der Tabelle ergibt sich:

- $K_R = 0{,}45 \cdot K_{krit} = 59{,}625$
- $T_n = 0{,}85 \cdot T_{krit} = 4{,}25s$

Die Übertragungsfunktion des Reglers ergibt sich also zu $\underline{\boldsymbol{G_R(s) = 59{,}625 \cdot \left(1 + \frac{1}{4{,}25s}\right)}}$

Abschließend werden noch die Sprungantworten der Systeme ohne und mit P- bzw. PI-Regler betrachtet:




Es zeigt sich zum einen, wie bereits im Vorfeld ermittelt, dass das System ohne Regler ($G$) nicht stabil ist und erst durch den Einsatz eines Reglers stabilisiert wird. Man spricht in diesem Fall von einer künstlichen Stabilisierung des Systems.

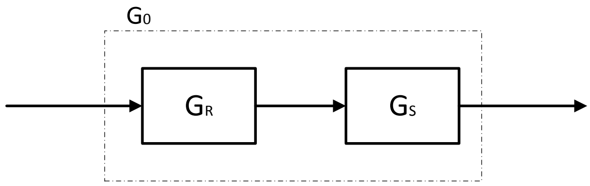
## Aufgabe 9.1: Polstellen-Kompensation

Gegeben ist die folgende Regelstrecke

$$G_S(s) = \frac{2}{(s+1)\cdot((s+\delta)^2+\omega_e^2)}$$

mit $\delta = 1/2$ und $\omega_e^2 = 15/4$.

a) Kompensation des komplexen Polpaares durch Reihenschaltung eines geeigneten Reglers. In der Aufgabenstellung wird dafür ein realisierbarer PID-Regler vorgeschlagen:




$$G_R(s) = K\cdot\left(1+\frac{1}{s\cdot T_I}+\frac{s\cdot T_D}{1+sT}\right)$$

Mit:

- Der Reglerverstärkung $K$
- Der Nachstellzeit des Integrators $T_I$
- Der Vorhaltezeit des Differenzierer $T_D$
- Die parasitäre Zeitkonstante $T$ des realen Differenzierers

Um die Polstellen zu kompensieren muss die Übertragungsfunktion des Reglers umgestellt werden:

$$\begin{aligned} G_R(s) &= K \cdot \frac{sT_I(1+sT) + (1+sT) + s^2 T_I T_D}{sT_I(1+sT)} \\ &= K \cdot \frac{s^2 T_I(T_D+T) + s(T_I+T) + 1}{sT_I(1+sT)} \\ &= K_R \cdot \frac{(s-s_{R1})(s-s_{R2})}{s \cdot (s+\frac{1}{T})} \end{aligned}$$

Mit:

$$K_R = K \cdot \frac{1}{T_I T}$$

$$s_{R1/2} = -\frac{T_I+T}{2T_I(T_D+T)} \pm \frac{\sqrt{(T_I-T)^2 - 4T_I T_D}}{2T_I(T_D+T)}$$

Um die beiden Polstellen zu kompensieren, müssen die Nullstellen $s_{R1/2}$ des Reglers folgende Form haben: $(s-s_{R1})(s-s_{R2}) = (s+\delta_R)^2 + \omega_R^2$

Damit ergibt sich für $\delta_R$ und $\omega_R$:

$$\delta_R = \frac{T_I+T}{2T_I(T_D+T)} \quad , \quad \omega_R^2 = \frac{4T_I T_D - (T_I-T)^2}{4T_I^2(T_D+T)^2}$$

mit der Übertragungsfunktion des Reglers:

$$G_R(s) = K_R \cdot \frac{(s+\delta_R)^2 + \omega_R^2}{s(s+\frac{1}{T})}$$

Umgeformt nach $T_I$ und $T_D$:

$$T_I = \frac{2\delta_R}{\delta_R^2 + \omega_R^2} - T \quad , \quad T_D = \frac{1}{2\delta_R - T(\delta_R^2+\omega_R^2)} - T$$

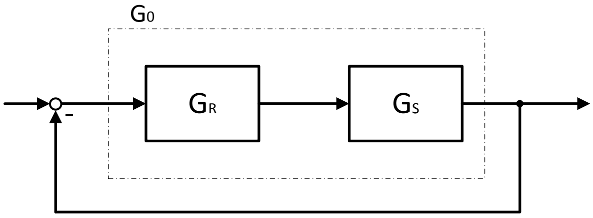
Damit durch den Regler das komplexe Polpaar kompensiert wird, muss $\delta_R = \delta$ und $\omega_R = \omega_e$ gelten. Damit lassen sich $T_I$ und $T_D$ dann berechnen.

$$\begin{aligned} T_I &= \frac{1}{\frac{1}{4}+\frac{15}{4}} - \frac{1}{8} = \frac{4}{16} - \frac{2}{16} = \frac{1}{8} = \underline{0{,}125} \\ T_D &= \frac{1}{1-\frac{1}{8}\cdot\frac{16}{4}} - \frac{1}{8} = 2 - \frac{1}{8} = \underline{1{,}875} \end{aligned}$$

Damit ergibt sich für $G_0(s)$:

$$G_0(s) = K_R \cdot \frac{(s+\delta_R)^2 + \omega_R^2}{s\left(s+\frac{1}{T}\right)} \cdot \frac{2}{(s+1)\cdot((s+\delta)^2+\omega_e^2)} = \underline{\frac{2\cdot K_R}{s(s+1)(s+8)}}$$

b) Der offene Regelkreis bestehend aus Regler und Strecke wird mit einer Einheitsrückführung negativ geschlossen (Rückkopplung)




Die Übertragungsfunktion des geschlossenen Regelkreises lautet daher (siehe Ü.6):

$$G(s) = \frac{G_0(s)}{1+G_0(s)}$$

$$1 + G_0(s) = 1 + \frac{2K_R}{s(s+1)(s+8)} = \frac{s(s+1)(s+8)+2K_R}{s(s+1)(s+8)}$$

$$G(s) = \frac{2K_R}{s(s+1)(s+8)} \cdot \frac{s(s+1)(s+8)}{s(s+1)(s+8)+2K_R} = \frac{2K_R}{s(s+1)(s+8)+2K_R} = \frac{2K_R}{s^3+9s^2+8s+2K_R}$$

Das $K_R$ kann jetzt zum einen dazu benutzt werden um die Polkompensation zu stabilisieren sowie das Verhalten des Regelkreis noch anzupassen (Verkleinerung der Anregelzeit, etc.).

Veränderung des Systemverhaltens durch die Polkompensation (für ein $K_R = 1$):

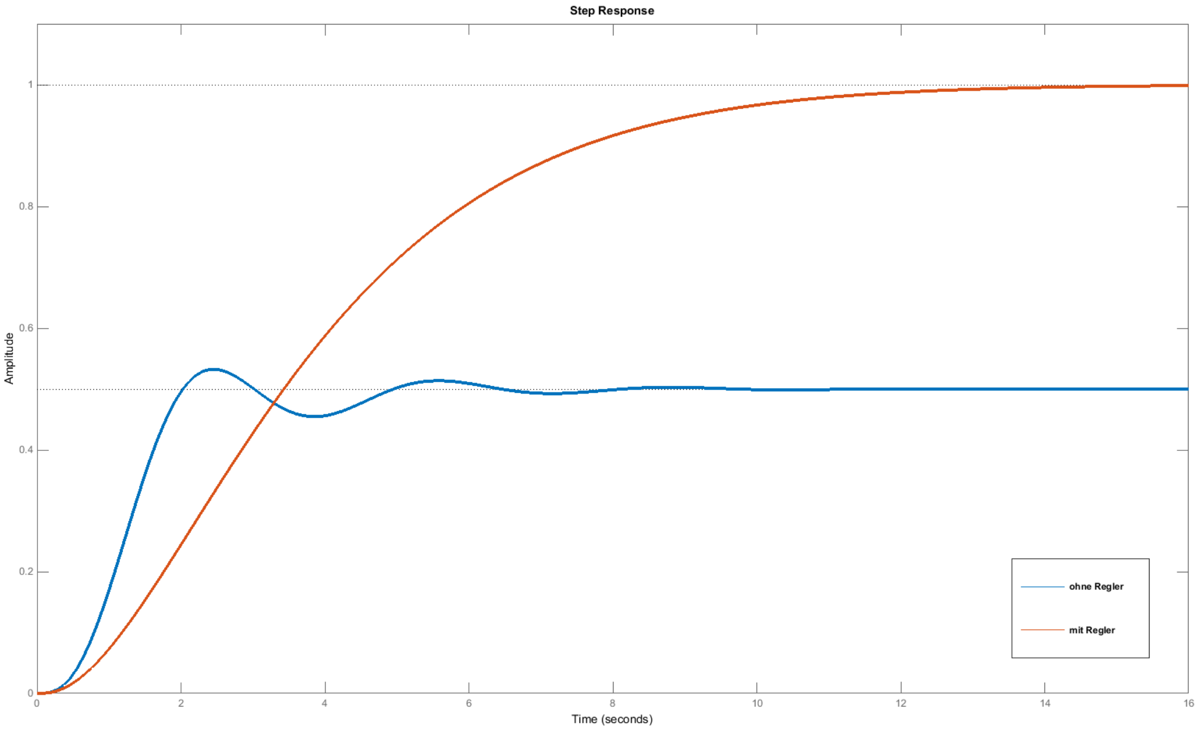
Berechnung des stationären Endwertes der Sprungantwort:

$$\lim_{s\to 0} s\cdot G(s)\cdot\frac{1}{s} = \lim_{s\to 0}\frac{2K_R}{s^3+9s^2+8s+2K_R} = \frac{2K_R}{2K_R} = 1$$

Der Regelkreis ist <u>stationär genau</u>, da der Eingang und Ausgang im eingeschwungenen Zustand identisch sind. Zum Vergleich der stat. Endwert der Strecke ohne Regelung:

$$\lim_{s\to 0} s\cdot G(s)\cdot\frac{1}{s} = \lim_{s\to 0}\frac{2}{(s+1)\left(\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{15}{4}\right)} = \lim_{s\to 0}\frac{2}{s^3+2s^2+5s+4} = 0{,}5$$

Ungeregelt besitzt das System also keine stationäre Genauigkeit, da der Ausgang stationär nicht dem Eingang entspricht (beträgt nur 50% in diesem Fall). Um die Veränderung des Systemverhaltens noch genauer zu beurteilen, werden die Sprungantworten des geregelten und ungeregelten Systems betrachtet:




Neben der durch den Regler erreichten stationären Genauigkeit zeigt sich zusätzlich noch sehr deutlich der Effekt der Polkompensation. Da genau die beiden komplexen Pole kompensiert wurden, welche für das Schwingungsverhalten des ungeregelten Systems verantwortlich waren (siehe Ü.1), zeigt das System nach der Kompensation durch die Regelung nun aperiodisches Verhalten.

Zum Vergleich wird das System nun noch nur mit einem P-Regler $G_R(s) = K_R$ geregelt:

Berechnung der Übertragungsfunktion:

$$G_0(s) = K_R \cdot \frac{2}{s^3 + 2s^2 + 5s + 4}$$

$$1 + G_0 = \frac{s^3 + 2s^2 + 5s + 4 + 2K_R}{s^3 + 2s^2 + 5s + 4}$$

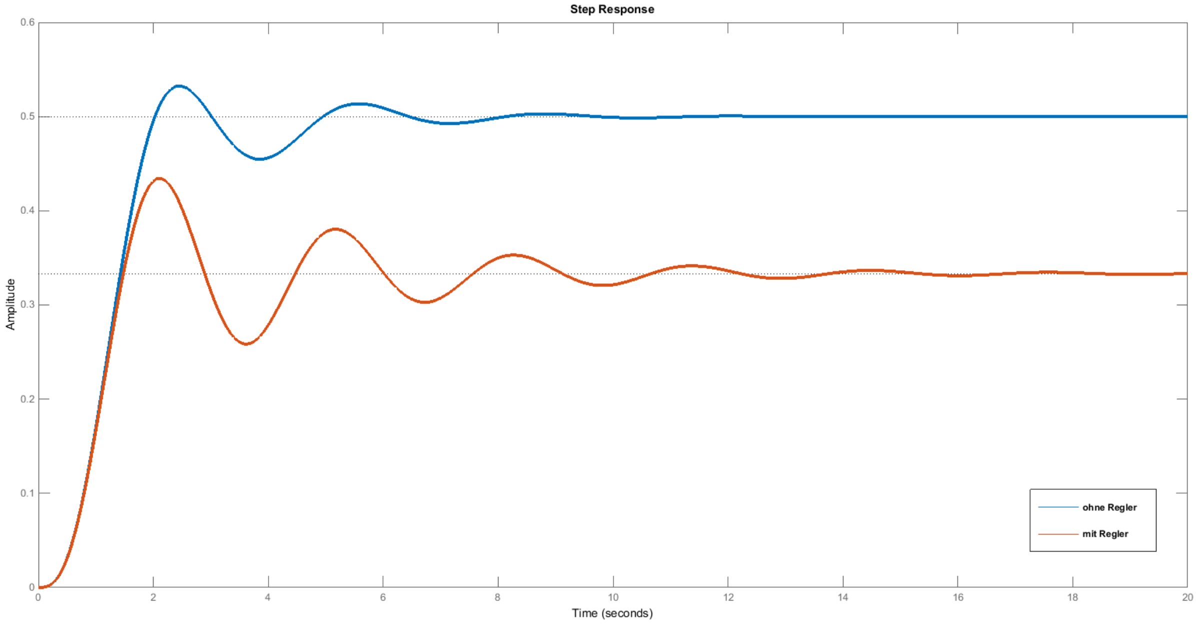
$$G(s) = \frac{G_0}{1 + G_0} = \frac{2K_R}{s^3 + 2s^2 + 5s + 4} \cdot \frac{s^3 + 2s^2 + 5s + 4}{s^3 + 2s^2 + 5s + 4 + 2K_R}$$

$$= \frac{2K_R}{s^3 + 2s^2 + 5s + 4 + 2K_R}$$

Stationärer Endwert:

$$\lim_{s\to 0} s \cdot G(s) \cdot \frac{1}{s} = \lim_{s\to 0} \frac{2K_R}{s^3 + 2s^2 + 5s + 4 + 2K_R} = \frac{2K_R}{4 + 2K_R} = \frac{K_R}{2 + K_R}$$

Es zeigt sich sofort, dass im Gegensatz zu dem vorher verwendeten PID-Regler das System nun nicht mehr stationär genau ist. Betrachtung der Sprungantworten für ein $K_R = 1$:




Für ein $K_R = 1$ zeigt das System ein schwächer gedämpftes Verhalten und der stationäre Endwert liegt dazu noch weiter vom Eingangswert entfernt als es bei der ungeregelten Strecke der Fall ist. Dies lässt sich zwar durch ein vergrößern des $K_R$ verbessern, jedoch wird das System, wie der stationäre Endwert zeigt, nur für ein unendlich großes $K_R$ stationär genau, während dies bei einem Regler mit integrierendem Anteil immer gewährleistet wird (<u>bei Einheitsrückführung, also keinem zusätzlichen Übertragungsverhalten in der Rückführung!</u>).