## 1. Aufgabe:

a.1)

$$G_W(s)=\frac{Y(s)}{W(s)}=\frac{K_R\cdot 10}{(s+1)\cdot(s+2)\cdot(s+3)+K_R\cdot 10}=\frac{Z_W(s)}{N_W(s)}$$

Hurwitz-Krit.:

$$N_W(s)=(s+1)\cdot(s+2)\cdot(s+3)+K_R\cdot 10=\underbrace{1}_{a_3}\cdot s^3+\underbrace{6}_{a_2}\cdot s^2+\underbrace{11}_{a_1}\cdot s+\underbrace{(6+K_R\cdot 10)}_{a_0}$$

Ford.:

(1.)

$$a_3,a_2,a_1>0 \quad \Rightarrow a_0\overset{!}{>}0 \quad \Rightarrow 6+K_R\cdot 10>0 \quad \Rightarrow K_R>-\frac{6}{10}=-0.6$$

(2.)

$$H_1=a_2>0$$

$$H_2=\begin{vmatrix}6 & 6+K_R\cdot 10\\ 1 & 11\end{vmatrix}=60-K_R\cdot 10\overset{!}{>}0 \quad \Rightarrow K_R<6 \quad \Rightarrow -0.6<K_R<6$$

Routh-Krit.:

| | |
|---|---|
| $a_3=1$ | $a_1=11$ |
| $a_2=6$ | $a_0=6+K_R\cdot 10$ |
| $A_1=\frac{6\cdot 11-1\cdot(6+K_R\cdot 10)}{6}$ $=10-\frac{10}{6}\cdot K_R\overset{!}{>}0 \quad \Rightarrow K_R<6$ | $B_1=0$ |
| $A_2=6+K_R\cdot 10\overset{!}{>}0 \quad \Rightarrow K_R>-\frac{6}{10}$ | – |

a.2)

$$G_W(s)=\frac{Y(s)}{W(s)}=\frac{K_R\cdot 10\cdot(s+5)}{(s+1)\cdot(s+2)\cdot(s+3)+K_R\cdot 10\cdot(s+5)}=\frac{Z_W(s)}{N_W(s)}$$

Hurwitz-Krit.:

$$N_W(s)=(s+1)\cdot(s+2)\cdot(s+3)+K_R\cdot 10\cdot(s+5)=\underbrace{1}_{a_3}\cdot s^3+\underbrace{6}_{a_2}\cdot s^2+\underbrace{(11+K_R\cdot 10)}_{a_1}\cdot s+\underbrace{(6+K_R\cdot 50)}_{a_0}$$

Ford.:

(1.)

$$a_3,a_2>0 \quad \Rightarrow a_1\overset{!}{>}0 \quad \Rightarrow 11+K_R\cdot 10>0 \quad \Rightarrow K_R>-\frac{11}{10}=-1.1$$

$$\Rightarrow a_0\overset{!}{>}0 \quad \Rightarrow 6+K_R\cdot 50>0 \quad \Rightarrow K_R>-\frac{6}{50}=-0.12$$

(2.)

$$H_1 = a_2 > 0$$

$$H_2 = \begin{vmatrix} 6 & 6 + K_R \cdot 50 \\ 1 & 11 + K_R \cdot 10 \end{vmatrix} = 60 + K_R \cdot 10 \overset{!}{>} 0 \qquad \Rightarrow K_R > -6 \qquad \Rightarrow -0.12 < K_R < \infty$$

Routh-Krit.:

| | |
|---|---|
| $a_3 = 1$ | $a_1 = 11 + K_R \cdot 10$ |
| $a_2 = 6$ | $a_0 = 6 + K_R \cdot 50$ |
| $A_1 = \frac{6 \cdot (11 + K_R \cdot 10) - 1 \cdot (6 + K_R \cdot 50)}{6} = 1 + \frac{1}{6} \cdot K_R \overset{!}{>} 0 \qquad \Rightarrow K_R > -6$ | $B_1 = 0$ |
| $A_2 = 6 + K_R \cdot 50 \overset{!}{>} 0 \qquad \Rightarrow K_R > -\frac{50}{6} = -0.12$ | $-$ |

b)

$$G_W(s) = \frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{K_R \cdot 10 \cdot (s + 1.5)}{(s+1)\cdot(s+2)\cdot(s+3)\cdot(s+4) + K_R \cdot 10 \cdot (s+1.5)} = \frac{Z_W(s)}{N_W(s)}$$

Hurwitz-Krit.:

$$N_W(s) = (s+1)\cdot(s+2)\cdot(s+3)\cdot(s+4) + K_R \cdot 10 \cdot (s+1.5)$$

$$= \underbrace{1}_{a_4} \cdot s^4 + \underbrace{10}_{a_3} \cdot s^3 + \underbrace{35}_{a_2} \cdot s^2 + \underbrace{(50 + K_R \cdot 10)}_{a_1} \cdot s + \underbrace{(24 + K_R \cdot 15)}_{a_0}$$

Ford.:

(1.)

$$a_4, a_3, a_2 > 0 \qquad \Rightarrow a_1 \overset{!}{>} 0 \qquad \Rightarrow 50 + K_R \cdot 10 > 0 \qquad \Rightarrow K_R > -5$$

$$\Rightarrow a_0 \overset{!}{>} 0 \qquad \Rightarrow 24 + K_R \cdot 15 > 0 \qquad \Rightarrow K_R > -\frac{24}{15} = -1.6$$

(2.)

$$H_1 = a_3 > 0$$

$$H_2 = \begin{vmatrix} 10 & 50 + K_R \cdot 10 \\ 1 & 35 \end{vmatrix} = 300 - K_R \cdot 10 \overset{!}{>} 0 \qquad \Rightarrow K_R < 30$$

$$H_3 = \begin{vmatrix} 10 & 50 + K_R \cdot 10 & 0 \\ 1 & 35 & 24 + K_R \cdot 15 \\ 0 & 10 & 50 + K_R \cdot 10 \end{vmatrix} = (50 + K_R \cdot 10) \cdot H_2 - 10 \cdot (10 \cdot (24 + K_R \cdot 15)) =$$

$$= -100 \cdot K_R^2 + 1000 \cdot K_R + 12600 \overset{!}{>} 0$$

$\Rightarrow K_R^2 - 10 \cdot K_R - 126 < 0$

$$(K_R - 5)^2 < 151 \quad \Rightarrow |K_R - 5| < \sqrt{151}$$

$$\rightarrow K_R < 5 + \sqrt{151} = 17.288, \qquad \textit{für} \;\; K_R > 5$$

$$\rightarrow K_R > 5 - \sqrt{151} = -7.288, \qquad \textit{für} \;\; K_R < 5$$

$\Rightarrow -1.6 < K_R < 17.3$

Routh-Krit.:

| | | |
|---|---|---|
| $a_4 = 1$ | $a_2 = 35$ | $a_0 = 24 + K_R \cdot 15$ |
| $a_3 = 10$ | $a_1 = 50 + K_R \cdot 10$ | – |
| $A_1 = \frac{10 \cdot 35 - 1 \cdot (50 + K_R \cdot 10)}{10} = 30 - K_R \overset{!}{>} 0 \quad \Rightarrow K_R < 30$ | $B_1 = a_0 = 24 + K_R \cdot 15$ | – |
| $A_2 = \frac{(30 - K_R) \cdot (50 + K_R \cdot 10) - 10 \cdot (24 + K_R \cdot 15)}{(30 - K_R)} = \frac{-10 \cdot K_R^2 + 100 \cdot K_R + 1260}{30 - K_R} \overset{!}{>} 0$ | – | – |
| $A_3 = B_1$ | – | – |

Diskussion:

$$A_2 = \frac{-10 \cdot K_R^2 + 100 \cdot K_R + 1260}{30 - K_R} \overset{!}{>} 0$$

$K_R < 30:$

$$K_R^2 - 10 \cdot K_R - 126 < 0$$

$$(K_R - 5)^2 < 151 \qquad \rightarrow |K_R - 5| < \sqrt{151}$$

$$K_R < 5 + \sqrt{151} = 17.288 \qquad \textit{für} \;\; K_R > 5$$

$$K_R > 5 - \sqrt{151} = -7.288 \qquad \textit{für} \;\; K_R < 5$$

$K_R > 30:$

$$K_R^2 - 10 \cdot K_R - 126 > 0$$

$$(K_R - 5)^2 > 151 \qquad \rightarrow |K_R - 5| > \sqrt{151}$$

$$K_R > 5 + \sqrt{151} = 17.288 \qquad \textit{für} \;\; K_R > 5$$

$$K_R < 5 - \sqrt{151} = -7.288 \qquad \textit{für} \;\; K_R < 5$$

## 2. Aufgabe:

2.1 Bestimmung der Übertragungsfunktion

Aus dem Blockschaltbild kann man entnehmen:

$$Y(s) = \frac{1}{s}\frac{8}{(s+2)(s+4)} \cdot \frac{\frac{2}{s+1}}{1+3\frac{2}{s+1}} \cdot \left[U(s) - 2sY(s) - kY(s)\right]$$

Umformung ergibt:

$$Y(s) = \frac{1}{s}\frac{8}{(s+2)(s+4)} \cdot \frac{2}{s+1+6} \cdot \left[U(s) - (2s+k)Y(s)\right]$$

$$s(s+2)(s+4)(s+7)Y(s) = 16 \cdot \left[U(s) - (2s+k)Y(s)\right]$$

$$\left[s(s+2)(s+4)(s+7) + 16(2s+k)\right] \cdot Y(s) = 16 \cdot U(s)$$

$$G_{yu}(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{16}{s(s+2)(s+4)(s+7) + 16(2s+k)}$$

2.2 Ermittelung des k-Bereiches, für den das System asymptotisch stabil ist, mit Hilfe des Hurwitz-Kriteriums.

Das Nennerpolynom des geschlossenen Systems lautet

$$\begin{aligned} N_K(s) &= s(s+2)(s+4)(s+7) + 16(2s+k) \\ &= s^4 + (2+4+7)s^3 + (2\cdot4 + 4\cdot7 + 7\cdot2)s^2 + (2\cdot4\cdot7 + 32)s + 16k \\ &= \underbrace{1}_{a_4} \cdot s^4 + \underbrace{13}_{a_3}s^3 + \underbrace{50}_{a_2}s^2 + \underbrace{88}_{a_1}s + \underbrace{16k}_{a_0} \end{aligned}$$

(1) Alle $a_i > 0, i = 0,1,2,3,4 \quad \Rightarrow \quad k > 0$

(2) $H_3 = \begin{vmatrix} a_3 & a_1 & 0 \\ a_4 & a_2 & a_0 \\ 0 & a_3 & a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 13 & 88 & 0 \\ 1 & 50 & 16k \\ 0 & 13 & 88 \end{vmatrix}$

$$H_2 = a_3 = 13 > 0$$

$$H_2 = \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ a_4 & a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 13 & 88 \\ 1 & 50 \end{vmatrix} = 13\cdot50 - 1\cdot88 = 562 > 0$$

$$H_3 = 88 \cdot H_2 - 16k \begin{vmatrix} 13 & 0 \\ 0 & 13 \end{vmatrix} = 88 \cdot 562 - 16 \cdot 13^2 \cdot k > 0 \quad \Rightarrow \quad k < \frac{88 \cdot 562}{16 \cdot 13^2} = 18.295$$

k-Bereich: $0 < k < 18.29$

## 2.3 Überprüfung des Ergebnisses mit dem Routh-Kriterium

| | | |
|---|---|---|
| $a_4 = 1$ | $a_2 = 50$ | $a_0 = 16k$ |
| $a_3 = 13$ | $a_1 = 88$ | |
| $A_1 = a_2 - \frac{a1}{a_3} = 50 - \frac{88}{13} = 43.23$ | $B_1 = a_0 = 16k$ | |
| $A_2 = a_1 - a_3 \frac{B_1}{A_1} = 88 - 4.81k$ | $B_2 = 0$ | |
| $A_3 = B_1 = a_0 = 16k$ | | |

Alle $a_i > 0, i = 0,1,2,3,4 \quad \Rightarrow \quad k > 0 \quad \Rightarrow \quad A_1 > 0$

$$A_2 = 88 - 4.81k < 0 \quad \Rightarrow \quad k < \frac{88}{4.81} = 18.295$$

k-Bereich: $0 < k < 18.29$

2.4 Pole mit positivem Realteil bei

a) Unterschreitung des k-Bereiches:

$k < 0 \quad \Rightarrow \quad (A_2 > 0) \wedge (A_3 < 0)$

1 Vorzeichenwechsel $\Rightarrow$ 1 Pol rechts

b) Überschreitung des k-Bereiches:

$k > 18.295 \quad \Rightarrow \quad (A_1 > 0) \wedge (A_2 < 0) \wedge (A_3 > 0)$

2 Vorzeichenwechsel $\Rightarrow$ 2 Pole rechts

2.5 $$y_\infty = \lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s) = \lim_{s\to 0} sG_{yu}(s)\frac{1}{s} = G_{yu}(0) = \frac{1}{k}$$

$$k = \frac{k_{max}}{4} \quad \Rightarrow \quad y_\infty = \frac{4}{k_{max}} = \frac{4}{18.295} \approx 0.219$$

Für $k = 2k_{max}$ existiert $y_\infty$ nicht. Daher gilt der Endwertsatz der Laplace-Transformation hier nicht, obwohl für $G_{yu}(0) = \frac{1}{k}$ einen endlichen Wert liefert.