Lösung zur 5. Übung „Steuer- und Regelungstechnik“

Anwendung der Laplace-Transformation, Übertragungsfunktion

Aufgabe 5.1: Elektrischer Hubmagnet

Aufgaben: a) Transformieren Sie die beiden Differentialgleichungen mit Hilfe der Laplace-Transformation in den Bildbereich

b) Geben Sie die vollständige Laplace-Transformierte des Systems mit dem Eingang $U(s)$ und dem Ausgang $X(s)$ an

a)

Beide Differentialgleichungen sollen Laplace transformiert werden. Zunächst wird das elektrische Teilsystem betrachtet:

- $\frac{\partial i(t)}{\partial t} \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; s \cdot I(s) - i_0$
- $i(t) \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; I(s)$
- $u(t) \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; U(s)$

Eingesetzt in die Differentialgleichung:

$$s \cdot I(s) - i_0 = k_{i,1} \cdot I(s) + k_u \cdot U(s)$$

Nach $I(s)$ auflösen:

$$I(s)\big(s - k_{i,1}\big) = k_u \cdot U(s) + i_0$$

$$\Leftrightarrow I(s) = \frac{k_u}{s - k_{i,1}} \cdot U(s) + \frac{i_0}{s - k_{i,1}}$$

Gleiches gilt es für die Differentialgleichung des mechanischen Teilsystems durchzuführen:

- $\ddot{x}(t) \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; s^2 \cdot X(s) - s \cdot x_0 - \dot{x}_0$
- $x(t) \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; X(s)$
- $i(t) \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; I(s)$

Eingesetzt in die Differentialgleichung ergibt:

$$s^2 \cdot X(s) - s \cdot x_0 - \dot{x}_0 = k_x \cdot X(s) - k_{i,2} \cdot I(s)$$

Anschließend gilt es, die Gleichung ebenfalls nach $X(s)$ umzustellen:

$$X(s)(s^2 - k_x) = s \cdot x_0 + \dot{x}_0 - k_{i,2} \cdot I(s)$$

$$\Leftrightarrow X(s) = \frac{s \cdot x_0 + \dot{x}_0}{s^2 - k_x} - \frac{k_{i,2}}{s^2 - k_x} \cdot I(s)$$

b)
Da durch die Laplace-Transformation beide Differentialgleichungen in algebraische Gleichungen überführt werden konnten, kann die vollständige Laplace-Transformierte durch simples in einander einsetzen erhalten werden:

$$X(s) = \frac{s \cdot x_0 + \dot{x}_0}{s^2 - k_x} - \frac{k_{i,2}}{s^2 - k_x} \cdot \left(\underbrace{\frac{k_u}{s - k_{i,1}} \cdot U(s) + \frac{i_0}{s - k_{i,1}}}_{I(s)} \right)$$

$$X(s) = \frac{s \cdot x_0 + \dot{x}_0}{s^2 - k_x} - \frac{k_{i,2} i_0}{(s^2 - k_x)(s - k_{i,1})} - \frac{k_{i,2} k_u}{(s^2 - k_x)(s - k_{i,1})} \cdot U(s)$$

$$X(s) = \underbrace{\frac{(s \cdot x_0 + \dot{x}_0)(s - k_{i,1}) - k_{i,2} i_0}{(s^2 - k_x)(s - k_{i,1})}}_{Eigenverhalten\ aufgrund\ Anfangsbedigungen} + \underbrace{\frac{-k_{i,2} k_u}{(s^2 - k_x)(s - k_{i,1})}}_{Übertragungsfunktion} \cdot U(s)$$

Die vollständige Laplace-Transformierte setzt sich aus zwei Komponenten zusammen. Zum einen einem vom Eingangssignal unabhängigen Teil, welcher nur von den Anfangswerten des Systems abhängt. Dieser entspricht gewissermaßen der homogenen Lösung im Zeitbereich. Der zweite Teil ist die sogenannte Übertragungsfunktion (wird in der Regel mit $G(s)$ bezeichnet) und beschreibt den Zusammenhang zwischen Eingangs- und Ausgangssignal. Er entspricht der partikulären Lösung im Zeitbereich. Die vollständige Laplace-Transformierte entspricht also der vollständigen Lösung der inhomogenen Differentialgleichung im Bildbereich.

Aufgabe 5.2: Anwendung der Laplace-Transformation

Gegeben ist die folgende Differentialgleichung

$$\dddot{y}(t) + 6 \cdot \ddot{y}(t) + 11 \cdot \dot{y}(t) + 6 \cdot y(t) = 2 \cdot u(t)$$

mit den Anfangswerten
$$y(t = 0) = y_0,$$
$$\dot{y}(t = 0) = \dot{y}_0,$$
$$\ddot{y}(t = 0) = \ddot{y}_0.$$

a) $\dddot{y} + 6\ddot{y} + 11\dot{y} + 6y = 2u$

Anwendung des Laplace'schen Differentiationssatzes:

$$(s^3 Y(s) - s^2 y_0 - s\dot{y}_0 - \ddot{y}_0) + 6(s^2 Y(s) - s y_0 - \dot{y}_0) + 11(sY(s) - y_0) + 6\,Y(s)$$

$$= 2\,U(s)$$

$$\Leftrightarrow \quad Y(s)(s^3+6s^2+11s+6)-y_0s^2-(6y_0+\dot{y}_0)s-(11y_0+6\dot{y}_0+\ddot{y}_0)=2\,U(s)$$

$$\Leftrightarrow \quad Y(s)=\underbrace{\frac{2}{s^3+6s^2+11s+6}}_{\text{Übertragungsfkt.}G(s)}U(s)+\underbrace{\frac{y_0s^2+(6y_0+\dot{y}_0)s+(11y_0+6\dot{y}_0+\ddot{y}_0)}{s^3+6s^2+11s+6}}_{\text{Verhalten infolge Anfangsbedingungen}}$$

b)

Die Laplace Transformierte der Differentialgleichung lässt sich in zwei Teile aufteilen:

- Der sogenannten Übertragungsfunktion G(s), welche das Ausgangsverhalten infolge des Einganges U(s) beschreibt
- Dem Ausgangsverhalten, welches durch die Anfangsbedingungen der Differentialgleichung hervorgerufen wird
- Da die Transformation linear ist, lassen sich beide Teile getrennt betrachten

c)

charakteristisches Polynom: $s^3+6s^2+11s+6$

Der Vergleich mit der Differentialgleichung zeigt, dass der Nenner der beiden Terme der Laplace Transformierten auf das gleiche char. Polynom führt wie der homogene Teil der Ausgangs-Differentialgleichung.

Gesucht sind die Lösungen der charakteristischen Gleichung $s^3+6s^2+11s+6=0$, eine der Lösungen wurde mit $s_1=-2$ vorgegeben.

Reduktion der kubischen Gleichung auf quadratische Gleichung durch Anwendung der Polynomdivision:

$$\begin{array}{l}
\quad s^3+6s^2+11s+6=\ (s+2)(s^2+4s+3)\\
-\underline{(s^3+2s^2)}\\
\qquad\quad 4s^2+11s\\
\qquad -\underline{(4s^2+8s)}\\
\qquad\qquad\quad 3s+6\\
\qquad\qquad -\underline{(3s+6)}\\
\qquad\qquad\qquad\ 0
\end{array}$$

Die beiden fehlenden Lösungen erhält man nun durch Lösen von

$s^2+4s+3=0$

$\Leftrightarrow\ s=-\frac{4}{2}\pm\sqrt{\frac{16}{4}-3}$

$\Leftrightarrow\ s=-2\pm\sqrt{\frac{4}{4}}=-2\pm 1$

$\Leftrightarrow\ \underline{s=-3\wedge s=-1}$

$$(s-s_1)(s-s_2)(s-s_3)=(s+1)(s+2)(s+3)$$

Die Lösungen des charakteristischen Polynoms stellen gleichzeitig die Eigenwerte der Differentialgleichung dar. Somit sind die Polstellen der Übertragungsfunktion äquivalent mit den Eigenwerten der Differentialgleichung!

d)

Es wird nur der Teil der Laplace-Transformierten betrachtet, welcher von den Anfangswerten abhängig ist. Da nur die Bewegungen infolge dieser ermittelt werden sollen, wird $U(s)$ gleich null gesetzt.

Daher ergibt sich in diesem Fall für die Laplace-Transformierte nach Aufgabenstellung
$Y(s) = \frac{s^2+(6+0)s+(11+0+0)}{s^3+6s^2+11s+6} = \frac{s^2+6s+11}{(s+1)(s+2)(s+3)}$

Da in diesem Fall keine Entsprechung in der Korrespondenz-Tafel vorhanden ist, muss der Term mittels Partialbruchzerlegung in bekannte Terme zerlegt werden.

$$\frac{s^2+6s+11}{(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{A}{\underbrace{s+1}_{Nr.3}} + \frac{B}{\underbrace{s+2}_{Nr.3}} + \frac{C}{\underbrace{s+3}_{Nr.3}}$$

$\Rightarrow \quad s^2 + 6s + 11 = A(s^2 + 5s + 6) + B(s^2 + 4s + 3) + C(s^2 + 3s + 2)$

Koeffizienten-Vergleich:

$s^2 \;:\; 1 \;= A + B + C$ (1)
$s^1 \;:\; 6 \;= 5A + 4B + 3C$ (2)
$s^0 \;:\; 11 = 6A + 3B + 2C$ (3)

Aus (1): $A = 1 - B - C$
Aus (2): $6 = 5(1 - B - C) + 4B + 3C \Leftrightarrow 6 = 5 - B - 2C$
$\Rightarrow \; B = -1 - 2C$

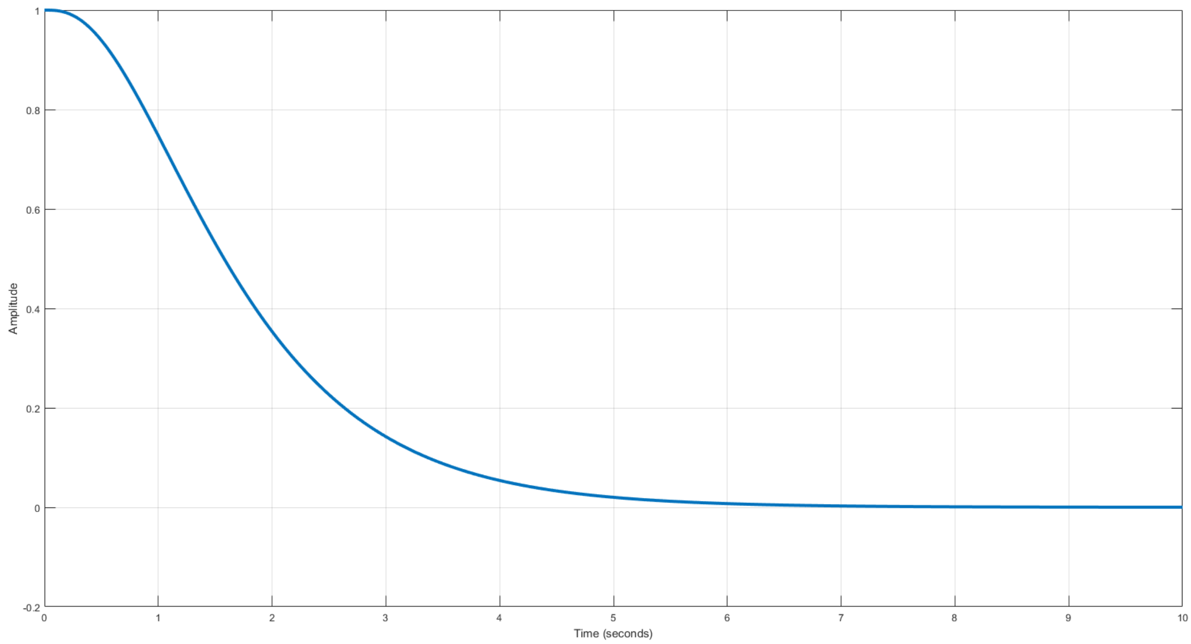
In (3): $11 = 6(1 - B - C) + 3(-1 - 2C) + 2C$
$\Leftrightarrow \quad 11 = 6 - 6B - 6C - 3 - 6C + 2C$
$\Leftrightarrow \quad 11 = 6 + 6 + 12C - 6C - 3 - 6C + 2C$
$\Leftrightarrow \quad 11 = 9 + 2C$
$\Leftrightarrow \quad \underline{C = 1}$

Daraus ergibt sich:
$\underline{C = 1}$; $\underline{B = -1 - 2 = -3}$; $\underline{A = 1 - 1 + 3 = 3}$

$\Rightarrow \; \frac{s^2+6s+1}{(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{3}{s+1} - \frac{3}{s+2} + \frac{1}{s+3}$

$\Rightarrow \underline{y_A(t) = 3 \cdot e^{-t} - 3 \cdot e^{-2t} + e^{-3t}}$

Verhalten der Differentialgleichung (System), wenn es bei $\ddot{y}_0 = \dot{y}_0 = 0;\; y_0 = 1$ losgelassen wird, abklingendes Schwingungsverhalten.



e) Sprungantwort: Antwort einer Differentialgleichung (System) auf einen Einheitssprung zum Zeitpunkt $t = 0$, gebräuchliche Größe zur Bewertung des Folgeverhaltens eines Systems, sprich wie schnell, mit welchem Verhalten und mit welcher Abweichung stellt sich das System auf eine gewünschte Größe ein.

Ermittelt werden kann die Sprungantwort, indem das System mit einem Einheitssprung $u(t) = 1(t)$ beaufschlagt wird.

Die Laplace Transformierte des Einheitssprunges beträgt $U(s) = \frac{1}{s}$

Nach Aufgabenstellung werden für diese Aufgabe alle Anfangsbedingungen auf null gesetzt (eingeschwungen), sodass sich für die Laplace Transformierte der Differentialgleichung ergibt:

$$Y(s) = \underbrace{\frac{2}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}}_{Übertragungsfkt. G(s)} U(s)$$

Die Sprungantwort $H(s)$ für diesen Fall ergibt sich dann zu:

$$H(s) = \frac{2}{s^3+6s^2+11s+6} \cdot \frac{1}{s} = \frac{2}{(s+1)(s+2)(s+3)s}$$

Gesucht ist allerdings die Sprungantwort $h(t)$ im Zeitbereich, weshalb dieser Ausdruck nun noch in den Zeitbereich zurück transformiert werden muss. Da $H(s)$ in dieser Form keine Entsprechung in der Korrespondenz-Tafel hat, muss der Term durch eine Partialbruchzerlegung zunächst in bekannte Korrespondenzen zerlegt werden.

$$\frac{2}{(s+1)\left((s+\delta)^2+\omega_e^2\right)s} = \underbrace{\frac{A}{s}}_{Nr.1} + \underbrace{\frac{B}{s+1}}_{Nr.3} + \underbrace{\frac{C}{s+2}}_{Nr.3} + \underbrace{\frac{D}{(s+3)}}_{Nr.3}$$

Auf den gleichen Nenner bringen und Koeffizienten-Vergleich durchführen.

$$2 = A(s+1)(s+2)(s+3) + Bs(s+2)(s+3) + Cs(s+1)(s+3) + Ds(s+1)(s+2)$$

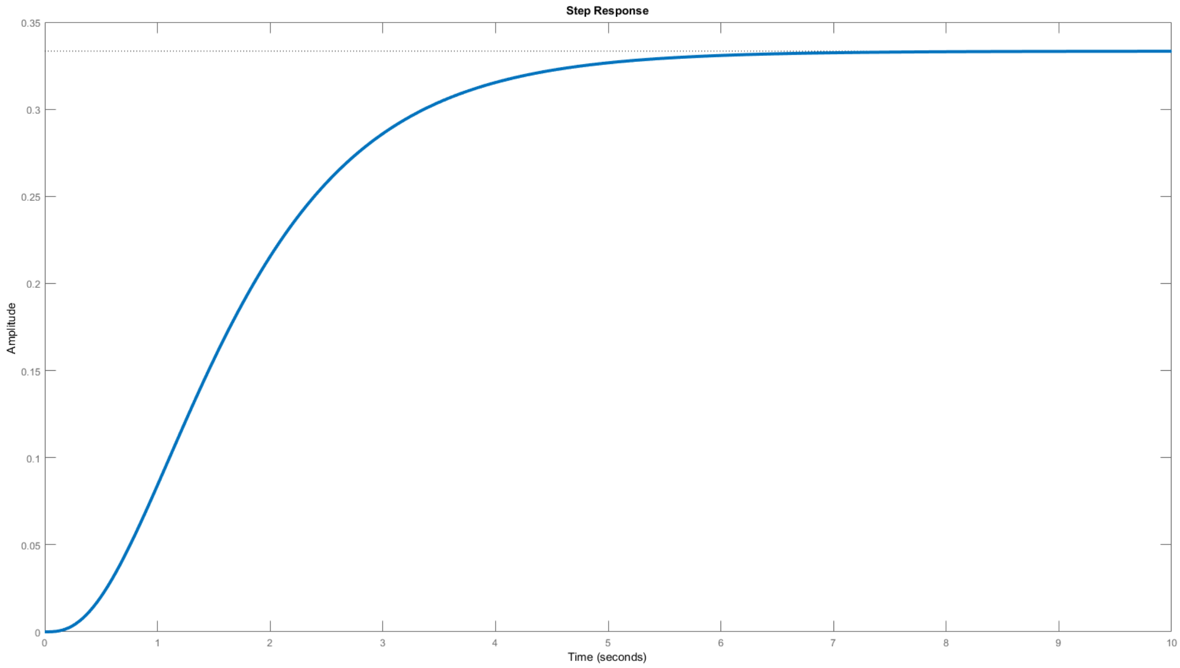
Durch geschicktes Einsetzen bestimmter Werte für s lassen sich die Koeffizienten ebenfalls bestimmen:

$$\rightarrow s = 0 : 2 = 6A \quad \Rightarrow \underline{A = \frac{1}{3}}$$
$$\rightarrow s = -1 : 2 = -2B \quad \Rightarrow \underline{B = -1}$$
$$\rightarrow s = -2 : 2 = 2C \quad \Rightarrow \underline{C = 1}$$
$$\rightarrow s = -3 : 2 = -6D \quad \Rightarrow \underline{D = -\frac{1}{3}}$$

$$H(s) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+2} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{s+3}$$

Dieser Ausdruck lässt sich nun mit Hilfe der Korrespondenz-Tafel in den Zeitbereich transformieren.

$$\underline{h(t) = \frac{1}{3} - e^{-t} + e^{-2t} - \frac{1}{3}e^{-3t}}$$



f) Anfangswertsatz: $\boxed{\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{s\to\infty} s \cdot F(s)}$

Angewandt auf die in Aufgabe d) ermittelte Sprungantwort des Systems:

$$\lim_{s\to\infty} s \cdot \frac{2}{s^3+6s^2+11s+6} \cdot \frac{1}{s} = \lim_{s\to\infty} \frac{2}{s^3+6s^2+11s+6} = \lim_{s\to\infty} \frac{s^3}{s^3} \cdot \frac{2/s^3}{1+6/s+11/s^2+6/s^3} = \underline{0}$$

Der Anfangswert von $y(t)$ ist also gleich Null, was auch folgerichtig ist, da bei der Berechnung der Sprungantwort alle Anfangsbedingungen auf null gesetzt wurden!

Endwertsatz: $\boxed{\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} s \cdot F(s)}$

Ebenfalls angewandt auf die Sprungantwort aus Aufgabe d):

$$\lim_{s\to 0} s \cdot \frac{2}{s^3+6s^2+11s+6} \cdot \frac{1}{s} = \lim_{s\to 0} \frac{2}{s^3+6s^2+11s+6} = \frac{2}{6} = \underline{\frac{1}{3}}$$

Bei einer Anregung mit einem Einheitssprung wird das System also sich im unendlichen dem Wert $\frac{1}{3}$ annähern (siehe Plot der Sprungantwort).

Diese beiden Sätze ermöglichen es also, stationäre Anfangs- und Endwerte einer Dynamik im Zeitbereich direkt aus einer Laplace-Transformierten zu berechnen. Es ist somit keine Rücktransformation notwendig!