Lösung zur 4. Übung „Steuer- und Regelungstechnik“

Laplace-Transformation, Übertragungsfunktion

Aufgabe 4.1: Tankbehälter

Aufgaben: a) Bestimmen Sie die Differentialgleichungen, die die beiden Füllstände der Wassersäulen $h_A(t)$ und $h_B(t)$ beschreiben und linearisieren Sie diese um deren Ruhelage für einen konstanten Zufluss $q_{zu,0} \geq 0$.

b) Stellen Sie das linearisierte System in Form eines Blockschaltbildes dar.

a)

Zunächst gilt es, den Durchfluss zwischen den beiden Behältern ***A*** und ***B*** zu bestimmen. Aus der Massenerhaltung ergibt sich zunächst:

$$q_{ab,A} = q_{zu,B}$$

Da der Durchfluss identisch mit dem Ausfluss aus Tank ***B***, lässt sich auch der Durchfluss mit der im Hinweis angegebenen Formel beschreiben. Als Füllhöhe ist dabei die Höhendifferenz zwischen den beiden Behältern zu berücksichtigen. Daher ergibt sich:

$$q_{ab,A} = q_{zu,B} = a \cdot \sqrt{2g(h_A(t) - h_B(t))}$$

Für das Volumen der Tanks gilt

$$V(t) = Q \cdot h(t) \qquad (1)$$

Außerdem ergibt sich die Änderungsrate des Volumens zu

$$\dot{V}(t) = q_{zu}(t) - q_{ab}(t) \qquad (2)$$

Durch ableiten von (1) und einsetzen in (2) ergibt sich dann die allgemeine Differentialgleichung für die Füllhöhe des Tanks

$$\dot{h}(t) = \frac{1}{Q}(q_{zu} - q_{ab}) \qquad (3)$$

Setzt man nun die aufgestellte Beziehung für den Durchfluss zwischen den beiden Behältern sowie die Angabe aus dem Hinweis ein, ergeben sich die folgenden beiden nichtlinearen Differentialgleichungen

$$\dot{h}_A(t) = \frac{1}{Q}\left(q_{zu} - a \cdot \sqrt{2g(h_A(t) - h_B(t))}\right) \qquad (4)$$

$$\dot{h}_B(t) = \frac{1}{Q}\left(a \cdot \sqrt{2g\big(h_A(t) - h_B(t)\big)} - a \cdot \sqrt{2gh_B(t)}\right) \qquad (5)$$

Bestimmen der Ruhelage:

Für die Ruhelage gelten die folgenden Beziehungen:

$$0 = q_{zu,0} - a\sqrt{2g\big(h_{A,0} - h_{B,0}\big)} \qquad (6)$$

$$0 = a\sqrt{2g(h_{A,0} - h_{B,0})} - a\sqrt{2gh_{B,0}} \qquad (7)$$

Aus Gleichung (7) folgt unmittelbar durch umstellen:

$$h_{A,0} - h_{B,0} = h_{B,0}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}h_{A,0} = h_{B,0} \qquad (8)$$

Aus Gleichung (6) folgt:

$$q_{zu,0}^2 = 2a^2g\big(h_{A,0} - h_{B,0}\big)$$

$$\Leftrightarrow h_{B,0} = h_{A,0} - \frac{q_{zu,0}^2}{2a^2g} \qquad (9)$$

Woraus sich dann für die beiden Ruhelagen ergibt:

$$h_{A,0} = \frac{q_{zu,0}^2}{a^2g}, \qquad h_{B,0} = \frac{q_{zu,0}^2}{2a^2g}$$

Linearisierung:

Es reicht die Klammerausdrücke in den Gleichungen (4) und (5) zu linearisieren, da aufgrund der Wahl der Ruhelage als Arbeitspunkt die Abweichung in der Füllgeschwindigkeit identisch mit der Änderung gegenüber dem Arbeitspunkt ist. Für die erste Differentialgleichung ergeben sich die folgenden Koeffizienten:

$$\frac{\partial f}{\partial q_{zu}}\Big|_{q_{zu,0},h_{A,0},h_{B,0}} = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial h_A}\Big|_{q_{zu,0},h_{A,0},h_{B,0}} = -\frac{a \cdot g}{\sqrt{2g(h_{A,0} - h_{B,0})}} = k_{h_{A,1}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial h_B}\Big|_{q_{zu,0},h_{A,0},h_{B,0}} = \frac{a \cdot g}{\sqrt{2g\big(h_{A,0} - h_{B,0}\big)}} = k_{h_{B,1}}$$

Es ergibt sich daher die folgende linearisierte Differentialgleichung für den Tank ***A***:

$$\Delta\dot{h}_A = \underbrace{\frac{1}{Q}}_{k_q} \cdot \Delta q_{zu} + \underbrace{\frac{k_{h_{A,1}}}{Q}}_{k_{A,1}} \cdot \Delta h_A + \underbrace{\frac{k_{h_{B,1}}}{Q}}_{k_{B,1}} \cdot \Delta h_B$$

In Differentialgleichung (5) muss aus den gleichen Gründen ebenfalls nur der Klammerausdruck linearisiert werden. Die Koeffizienten der linearisierten Differentialgleichungen ergeben sich zu:

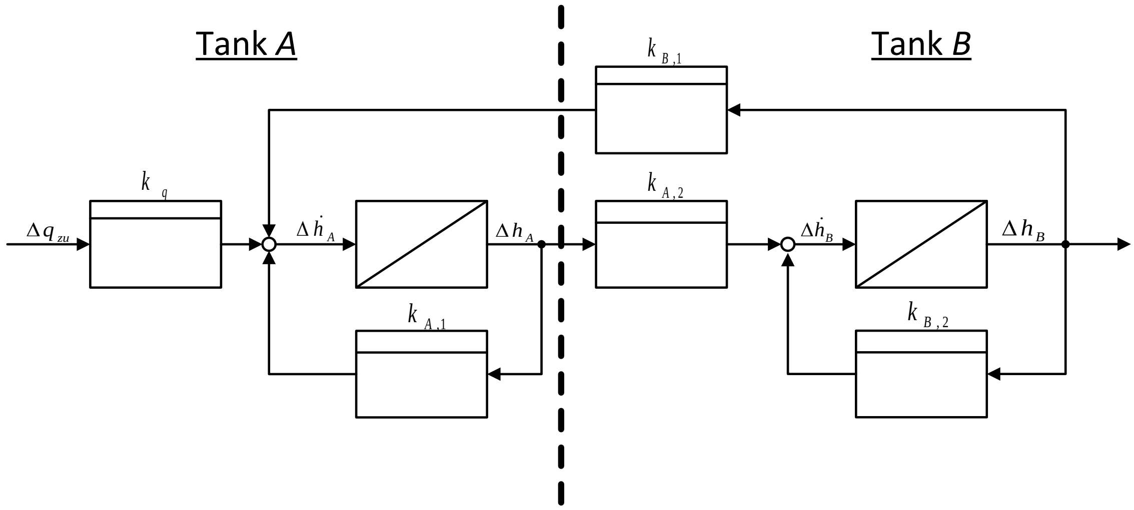
$$\frac{\partial f}{\partial h_A}\Big|_{q_{zu,0},h_{A,0},h_{B,0}} = \frac{a \cdot g}{\sqrt{2g(h_{A,0} - h_{B,0})}} = k_{h_{A,2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial h_B}\Big|_{q_{zu,0},h_{A,0},h_{B,0}} = -\frac{a \cdot g}{\sqrt{2g\left(h_{A,0} - h_{B,0}\right)}} - \frac{a \cdot g}{\sqrt{2gh_{B,0}}} = k_{h_{B,2}}$$

Daraus ergibt sich die linearisierte Differentialgleichung für Tank ***B***:

$$\Delta\dot{h}_B = \underbrace{\frac{k_{h_{A,2}}}{Q}}_{k_{A,2}} \cdot \Delta h_A + \underbrace{\frac{k_{h_{B,2}}}{Q}}_{k_{B,2}} \cdot \Delta h_B$$

b)



Aufgaben: c) Geben Sie eine Differentialgleichung an, die den Füllstand h_B in Abhängigkeit vom Zufluss q_{zu} beschreibt.

d) Transformieren Sie diese Differentialgleichung in den Laplace-Bereich unter der Annahme, dass keine zusätzliche Flüssigkeit in den Tank ***A*** fließt ($q_{zu} = 0$).

<u>Hinweis</u>: Es gilt: $k_{A,1} = k_{B,1} = -2,\ k_{A,2} = k_{B,2} = 1,\ h_{A,0} = 2,\ h_{B,0} = 1$

e) Bestimmen Sie den zeitlichen Verlauf des Füllstandes $h_B(t)$ der aus den gegebenen Anfangswerten für $h_{A,0}$ und $h_{B,0}$ resultiert.

c)
Es gilt die beiden Differentialgleichungen zu kombinieren, sodass die direkte Wirkung des Eingangs auf den Füllstand des Tanks ***B*** beschrieben wird.

Anmerkung: Es werden die linearisierten Differentialgleichungen des Problems betrachtet, sprich es wird ein System mit einem konstanten Zufluss und Abfluss betrachtet, welches eingeschwungen ist (keine Dynamik mehr vorhanden). Die betrachteten Gleichungen beschreiben nur die Abweichungen von diesem eingeschwungenen Zustand!

Für den Füllstand des Tanks ***B*** gilt laut Aufgabenstellung:

$$\dot{h}_B = k_{A,2} \cdot h_A + k_{B,2} \cdot h_B$$

Einmal differenzieren führt zu

$$\ddot{h}_B = k_{A,2} \cdot \dot{h}_A + k_{B,2} \cdot \dot{h}_B$$

Ersetzen von $\dot{h}_A$ mit der Differentialgleichung des Tanks ***A***

$$\ddot{h}_B = k_{A,2} k_q \cdot q_{zu} + k_{A,2} k_{A,1} \cdot h_A + k_{A,2} k_{B,1} \cdot h_B + k_{B,2} \cdot \dot{h}_B$$

Nun muss noch der h_A Term ersetzt werden. Umformen der Differentialgleichung des Tanks ***B*** ergibt:

$$h_A = \frac{1}{k_{A,2}} \cdot \dot{h}_B - \frac{k_{B,2}}{k_{A,2}} \cdot h_B$$

Eingesetzt in die Differentialgleichung von $\ddot{h}_B$ ergibt:

$$\ddot{h}_B = \left(k_{A,1} + k_{B,2}\right) \cdot \dot{h}_B + \left(k_{A,2} k_{B,1} - k_{A,1} k_{B,2}\right) \cdot h_B + k_{A,2} k_q \cdot q_{zu}$$

d)
Zunächst gilt es alle zeitlich veränderlichen Größen in der Differentialgleichung in den Laplace-Bereich (Bildbereich) zu überführen. Mit Hilfe des Laplac'schen Differentiationssatzes ergibt sich:

- $\ddot{h}_B(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ s^2 \cdot H_B(s) - s \cdot h_{B,0} - \dot{h}_{B,0}$
- $\dot{h}_B(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ s \cdot H_B(s) - h_{B,0}$
- $h_B(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ H_B(s)$
- $q_{zu}(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ Q_{zu}(s)$

Eingesetzt in die Differentialgleichung ergibt sich das Abbild im Laplace-Bereich

$$\begin{aligned} s^2 \cdot H_B(s) - s \cdot h_{B,0} - \dot{h}_{B,0} \\ &= \left(k_{A,1} + k_{B,2}\right) \cdot \left(s \cdot H_B(s) - h_{B,0}\right) + \left(k_{A,2} k_{B,1} - k_{A,1} k_{B,2}\right) \cdot H_B(s) + k_{A,2} k_q \cdot Q_{zu}(s) \end{aligned}$$

Laut Aufgabenstellung fließt kein zusätzliches Wasser in den Tank $\boldsymbol{A}$, sodass $Q_{zu}(s) = 0$ gilt. Die Laplace-Transformierte lässt sich nun noch nach $H_B(s)$ auflösen:

$$H_B(s)\left[s^2 - \left(k_{A,1} + k_{B,2}\right)s - \left(k_{A,2}k_{B,1} - k_{A,1}k_{B,2}\right)\right] = (s - k_{A,1} - k_{B,2})h_{B,0} + \dot{h}_{B,0}$$

$$\Leftrightarrow H_B(s) = \frac{\left(s - k_{A,1} - k_{B,2}\right)h_{B,0} + \dot{h}_{B,0}}{s^2 - \left(k_{A,1} + k_{B,2}\right)s - \left(k_{A,2}k_{B,1} - k_{A,1}k_{B,2}\right)}$$

Anmerkung: Dadurch, dass der Eingang der Differentialgleichung in diesem Fall wegfällt, bedeutet dies in der rein mathematischen Betrachtung, dass der inhomogene Teil der Differentialgleichung verschwindet. Somit stellt die hier aufgestellte Laplace-Transformierte des Systems nichts anderes als die homogene Lösung der Differentialgleichung im Laplace-Bereich dar.

e)
Es gilt zunächst den Anfangswert für die Füllstandsänderung $\dot{h}_{B,0}$ zu bestimmen. Einsetzen der Startwerte in die entsprechende Differentialgleichung ergibt:

$$\dot{h}_{B,0} = k_{A,2} \cdot h_{A,0} + k_{B,2} \cdot h_{B,0} = 3$$

Einsetzen aller Zahlenwerte in die Laplace-Transformierte ergibt:

$$H_B(s) = \frac{(s + 2 - 1) \cdot 1 + 3}{s^2 - (-2 + 1)s + (1 \cdot (-2) - (-2) \cdot 1)} = \frac{s + 4}{s(s + 1)}$$

Um den zeitlichen Verlauf des Füllstandes $h_B(t)$ zu bestimmen, muss die Laplace-Transformierte zurück in den Zeitbereich überführt werden. Da sie der Korrespondenz Nr. 11 aus der Korrespondenz-Tabelle entspricht, kann dies unmittelbar aufgeschrieben werden:

$$H_B(s) = \frac{s + 4}{s(s + 1)} \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad h_B(t) = \frac{4}{1} - \frac{1 - 4}{1} \cdot e^{-1 \cdot t} = 4 - 3 \cdot e^{-t}$$

Aufgabe 4.2: Aufstellen von Übertragungsfunktionen

- $\boxed{T_1 \cdot \dot{y}(t) + y(t) = K \cdot u(t)}$

$\circ\!\!-\!\!\bullet\ T_1 \cdot s \cdot Y(s) + Y(s) = K \cdot U(s)$

$\Leftrightarrow Y(s) \cdot [T_1 \cdot s + 1] = K \cdot U(s)$

$\Rightarrow \underline{G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K}{1+T_1 \cdot s}}$

$\underline{PT_1\text{-Verhalten}}$ – eine Polstelle bei $s = -\frac{1}{T_1}$

- $\boxed{\ddot{y}(t) + 2D\omega_0 \cdot \dot{y}(t) + \omega_0^2 \cdot y(t) = K \cdot u(t)}$

$\circ\!\!-\!\!\bullet\; s^2 \cdot Y(s) + 2D\omega_0 \cdot s \cdot Y(s) + \omega_0^2 \cdot Y(s) = K \cdot U(s)$

$\Rightarrow \underline{G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K}{s^2+2D\omega_0 \cdot s+\omega_0^2}}$

$\underline{PT_2\text{-Verhalten}}$ – schwingungsfähig

- $\boxed{T_1 \cdot \ddot{y}(t) + \dot{y}(t) = K \cdot u(t)}$

$\circ\!\!-\!\!\bullet\; T_1 \cdot s^2 \cdot Y(s) + s \cdot Y(s) = K \cdot U(s)$

$\Rightarrow \underline{G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K}{s(1+T_1 \cdot s)} = \frac{1}{s} \cdot \frac{K}{1+T_1 \cdot s}}$ → Reihenschaltung aus Integrator (I) und PT_1 = $\underline{IT_1\text{-Verhalten}}$

- $\boxed{T_1 \cdot \ddot{y}(t) + T_2 \cdot \dot{y}(t) + y(t) = K(u(t) + T_D \cdot \dot{u}(t))}$

$\circ\!\!-\!\!\bullet\; T_1 \cdot s^2 \cdot Y(s) + T_2 \cdot s \cdot Y(s) + Y(s) = K(U(s) + T_D \cdot s \cdot U(s))$

$\Leftrightarrow Y(s)[T_1 \cdot s^2 + T_2 \cdot s + 1] = U(s) \cdot K[1 + T_D \cdot s]$

$\Rightarrow \underline{G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K[1+T_D \cdot s]}{T_1 \cdot s^2+T_2 \cdot s+1}}$ → PD-Verhalten (Zähler) in Reihe mit PT_2-Verhalten (Nenner)

→ $\underline{PDT_2\text{-Verhalten}}$

Aufgabe 4.3: Übertragungsfunktionen linearer Systeme

Aufgabe: Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion der beiden Systeme im eingeschwungenen Zustand.

Es ist nur die Übertragungsfunktion, als der Zusammenhang zwischen dem Eingangs- und Ausgangssignal gesucht. Um dies zu ermitteln kann von einer Differentialgleichung immer der eingeschwungene Zustand betrachtet werden, sprich die Anfangswerte aller zeitlichen Ableitungen sind gleich null

$$\dot{x}_0 = \ddot{x}_0 = \cdots = x_0^{(n)} = 0,$$

und der Anfangswert von x_0 ist ebenfalls null.

Für System a) bedeutet das bei der Anwendung des Laplac'schen Differentiationssatzes:

- $\ddot{x}(t) \quad ○\!\!-\!\!● \quad s^2 \cdot X(s) - s \cdot \underbrace{x_0}_{=0} - \underbrace{\dot{x}_0}_{=0} = \underline{s^2 \cdot X(s)}$
- $\dot{x}(t) \quad ○\!\!-\!\!● \quad s \cdot X(s) - \underbrace{x_0}_{=0} = \underline{s \cdot X(s)}$
- $x(t) \quad ○\!\!-\!\!● \quad X(s)$
- $F(t) \quad ○\!\!-\!\!● \quad F(s)$

Eingesetzt in die Differentialgleichung von System a) und aufgelöst nach $X(s)$:

$$m \cdot s^2 X(s) + d \cdot sX(s) + c \cdot X(s) = F(s)$$
$$\Leftrightarrow X(s) = \underbrace{\frac{1}{m \cdot s^2 + d \cdot s + c}}_{G(s)} \cdot \ F(s)$$

Gleiches lässt sich ebenso bei System b) durchführen:

- $\ddot{u}_A(t) \quad ○\!\!-\!\!● \quad s^2 \cdot U_A(s) - s \cdot \underbrace{u_{A,0}}_{=0} - \underbrace{\dot{u}_{A,0}}_{=0} = \underline{s^2 \cdot U_A(s)}$
- $\dot{u}_A(t) \quad ○\!\!-\!\!● \quad s \cdot U_A(s) - \underbrace{u_{A,0}}_{=0} = \underline{s \cdot U_A(s)}$
- $u_A(t) \quad ○\!\!-\!\!● \quad U_A(s)$
- $u_E(t) \quad ○\!\!-\!\!● \quad U_E(s)$

Analog wie bei System a) ergibt einsetzen in die zugehörige Differentialgleichung und auflösen nach $U_E(s)$:

$$LC \cdot s^2 U_A(s) + RC \cdot sU_A(s) + U_A(s) = U_E(s)$$
$$\Leftrightarrow U_A(s) = \underbrace{\frac{1}{LC \cdot s^2 + RC \cdot s + 1}}_{G(s)} \cdot U_E(s)$$