Lösung zur 3. Übung „Steuer- und Regelungstechnik“

Nichtlineare Differentialgleichungen, Linearisierung

Allgemeines zur Behandlung nichtlinearer Differentialgleichungen

- Die Welt ist nichtlinear
- Realistische physikalische Modelle von technischen Sachverhalten häufig nichtlinear
- Zur Beschreibung sind demnach nichtlineare Differentialgleichungen notwendig
- Nichtlineares Verhalten in der Regelungstechnik häufig problematisch, da keine geschlossene Theorie existiert
- Viele nichtlineare Verfahren nur in speziellen Fällen anwendbar

- Oft ausreichend und zweckmäßig technische Systeme mit linearen Gleichungen zu beschreiben
- Häufig werden Systeme nur in der Nähe von festgelegten Arbeitspunkten betrieben
- Für kleine Abweichungen von solchen Arbeitspunkten lassen sich nichtlineare Systeme näherungsweise linearisieren
- Verwendung von Taylor-Reihen, die nach dem linearen Glied abgebrochen werden
- Resultat: linearen Differentialgleichung, die näherungsweise Abweichungen vom definierten Arbeitspunkt beschreibt

Aufgabe 3.1: Mechanisches System

Aufgabe: a) Bestimmen Sie die nichtlineare Differentialgleichung die die Dynamik des oben dargestellten Feder-Masse-Dämpfer Systems beschreibt. Linearisieren Sie anschließend die erhaltene Differentialgleichung um deren Ruhelage bei einer konstanten Anregung $F_0 \geq 0$.

b) Stellen sie die linearisierte Differentialgleichung in Form eines Blockschaltbildes dar

a)

Das System entspricht dem in Aufgabe 1.3 behandelten Feder-Masse-Dämpfer-System. Somit folgt für die Differentialgleichung:

$$m \cdot \ddot{x}(t) + d \cdot \dot{x}(t) + \sqrt{C_0 \cdot x(t)} = F(t) \quad (1)$$

Durch die hier verwendete Feder liegt nun eine nichtlineare inhomogene Differentialgleichung vor. Um diese jetzt zu linearisieren, muss zunächst ein Arbeitspunkt definiert werden.

Ermittlung der Ruhelage:

- System ruht, daher keine Bewegungen mehr vorhanden: $\ddot{x}_0 = \dot{x}_0 = 0$
- System wird mit einem konstanten $F_0 \geq 0$ angeregt

Einsetzen in DGL:

$$m \cdot \underbrace{\ddot{x}_0}_{=0} + d \cdot \underbrace{\dot{x}_0}_{=0} + \sqrt{C_0 \cdot x_0} = F_0$$

Umformen nach x_0 ergibt dann die Ruhelage des Systems bei einer konstanten Anregung mit F_0:

$$x_0 = \frac{F_0^2}{C_0}$$

Erzeugen eines linearen Modells, welches kleine Abweichungen von dieser Ruhelage beschreibt. Die zeitabhängigen Größen in der Differentialgleichung werden durch folgende Ausdrücke ersetzt:

- $\ddot{x}(t) = \ddot{x}_0 + \Delta\ddot{x}$
- $\dot{x}(t) = \dot{x}_0 + \Delta\dot{x}$
- $x(t) = x_0 + \Delta x$
- $F(t) = F_0 + \Delta F$

Eingesetzt in (1) ergibt sich:

$$m \cdot \left(\underbrace{\ddot{x}_0}_{=0} + \Delta\ddot{x}\right) + d \cdot \left(\underbrace{\dot{x}_0}_{=0} + \Delta\dot{x}\right) + \sqrt{C_0 \cdot (x_0 + \Delta x)} = F_0 + \Delta F \quad (2)$$

Der nichtlineare Term in (2) wird nun durch eine Taylorentwicklung der eigentlichen Differentialgleichung ersetzt, welche nach dem linearen Glied abgebrochen wird:

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{x=x_0} \cdot \Delta x + \cdots$$

Angewandt auf das hier vorliegende Problem:

$$\sqrt{C_0 \cdot (x_0 + \Delta x)} = \sqrt{C_0 \cdot x_0} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{C_0} \cdot \frac{1}{\sqrt{x_0}} \cdot \Delta x + \cdots$$

Durch Einsetzen von x_0 und Vernachlässigen der Terme höherer Ordnung erhält man dann eine Approximation des nichtlinearen Terms:

$$\sqrt{C_0 \cdot (x_0 + \Delta x)} \approx \sqrt{C_0 \cdot \frac{F_0^2}{C_0}} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{C_0 \cdot \frac{C_0}{F_0^2}} \cdot \Delta x = F_0 + \frac{1}{2} \cdot \frac{C_0}{F_0} \cdot \Delta x \quad (3)$$

Nun wird (3) in (2) eingesetzt und man erhält die gewünschte lineare Differentialgleichung:

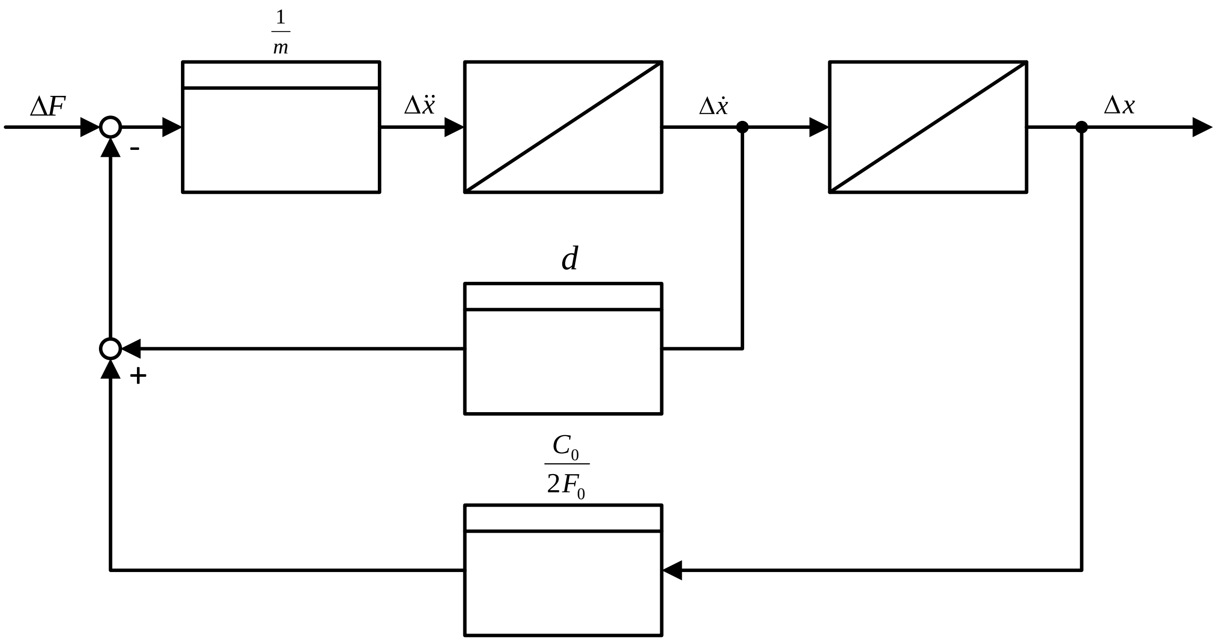
$$m \cdot \Delta\ddot{x} + d \cdot \Delta\dot{x} + \frac{C_0}{2F_0} \cdot \Delta x = \Delta F \quad (4)$$

Diese Differentialgleichung besitzt allerdings einige Einschränkungen:

- Nur in der Nähe von x_0 gültig, entfernt sich das System zu weit von der Ruhelage wird der Fehler durch die Linearisierung zu groß
- Sie beschreibt nur Abweichungen von der Ruhelage x_0
- Für Gültigkeit muss das System also mit einer konstanten Anregung F_0 in die Lage x_0 gebracht und gehalten werden
- Durch Aufbringen eines ΔF kann das System dann in der Nähe der Ruhelage beeinflusst werden

Linearisierung ermöglicht also eine lineare Approximation einer nichtlinearen Differentialgleichung in der Nähe eines gewünschten Arbeitspunktes (hier Ruhelage) zu erhalten. Da bei regelungstechnischen Anwendungen ein System häufig nur in bestimmten Betriebspunkten betrieben werden soll, stellt die hier vorgestellte Linearisierung einen sehr häufig angewandten Ansatz dar.

b)



Aufgabe 3.2: Elektrischer Hubmagnet

Aufgabe: a) Bestimmen Sie die Differentialgleichungen, die das Verhalten des aufgeführten Systems in Abhängigkeit der Spannung u beschreiben und linearisieren Sie diese um deren Ruhelage bei einer konstanten Eingangsspannung $u_0 \geq 0$.

b) Stellen Sie das linearisierte System in Form eines Blockschaltbildes dar.

a)
Es existieren in diesem Beispiel zwei verschiedene technische Systeme, die miteinander verkoppelt sind. Es gilt zunächst die Differentialgleichungen aufzustellen, die das dynamische Verhalten beider Systeme beschreiben:

<u>Elektrisches Teilsystem:</u>

Aufstellen der Maschengleichung:

$$0 = u_R + u_L - u \qquad (1)$$

Einsetzen der Bauteilgleichungen:
- Widerstand: $u_R = R \cdot i$
- Induktivität: $u_L = L(x) \cdot \frac{\partial i}{\partial t} = \frac{L}{x} \cdot \frac{\partial i}{\partial t}$

Einsetzen in (1) und umstellen nach der höchsten Ableitung ergibt:

$$\frac{\partial i}{\partial t} = -\frac{R}{L} \cdot i \cdot x + \frac{1}{L} \cdot x \cdot u \qquad (2)$$

Aus (2) wird sehr schnell deutlich, das Produkte zweier zeitabhängiger Größen in der Differentialgleichung enthalten sind, sodass diese nichtlinear ist.

<u>Mechanisches Teilsystem:</u>

Verwendung von Newtons zweiten Axiom:

$$m \cdot \ddot{x} = \sum F$$

Auf die Kugel wirkenden Kräfte:

- $F_g = m \cdot g$
- $F_{mag} = k \cdot \frac{i^2}{x^2}$

Resultierende Bewegungsgleichung:

$$m \cdot \ddot{x}(t) = m \cdot g - k \cdot \frac{i^2}{x^2}$$
$$\ddot{x}(t) = g - \frac{k}{m} \cdot \frac{i^2}{x^2} \qquad (3)$$

Bestimmung der Ruhelagen

Das System befindet sich in Ruhe, wenn alle Bewegungen abgeklungen sind, daher:

$$\frac{\partial i}{\partial t} = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = 0$$

Einsetzen in beide Differentialgleichungen:

(2): $\quad 0 = -\frac{R}{L} \cdot i_0 \cdot x_0 + \frac{1}{L} \cdot x_0 \cdot u_0 \qquad (4)$

(3): $\quad 0 = g - \frac{k}{m} \cdot \frac{i_0^2}{x_0^2} \qquad (5)$

Aus (5) folgt durch umstellen:

$$x_0 = i_0 \cdot \sqrt{\frac{k}{m \cdot g}} \qquad (6)$$

Einsetzen von (6) in (4) liefert:

$$0 = -i_0^2 \cdot \frac{R}{L} \sqrt{\frac{k}{m \cdot g}} + i_0 \cdot \frac{1}{L} \sqrt{\frac{k}{m \cdot g}} \cdot u_0$$
$$\Leftrightarrow 0 = i_0 \left(-i_0 \cdot \frac{R}{L} \sqrt{\frac{k}{m \cdot g}} + \frac{1}{L} \sqrt{\frac{k}{m \cdot g}} \cdot u_0 \right) \qquad (7)$$

Gleichung (7) besitzt offensichtlich zwei Lösungen, nämlich:

$$i_0 = 0 \ \vee \ i_0 = \frac{u_0}{R}$$

Es existieren also zwei Ruhelagen, die beide zur Linearisierung verwendet werden können. Offensichtlich ist hier aber nur eine der beiden sinnvoll, da das System bei einer konstanten Eingangsspannung u_0 betrieben werden soll. Liegt in der Ruhelage kein Strom ($i_0 = 0$) an der Induktivität, wirkt kein Magnetfeld und die Kugel wird nicht angezogen, das System ist also aus. Es würde also auch keine Spannung am Eingang anliegen. Daher wird das System um die zweite Ruhelage linearisiert. Einsetzen der Ruhelage in (6) liefert dann für x_0:

$$x_0 = \sqrt{\frac{k}{m \cdot g}\frac{1}{R}} \cdot u_0$$

<u>Linearisierung:</u>

Beide Differentialgleichungen enthalten nichtlineare Terme, die zwei zeitabhängige Größen enthalten, daher ist eine mehrdimensionale Taylor-Reihenentwicklung notwendig:

$$f(x_{10} + \Delta x_1;\ x_{20} + \Delta x_2;\ \cdots) = f(x_{10}; x_{20}; \cdots) + \frac{\partial f}{\partial x_1}|_{AP} \cdot \Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}|_{AP} \cdot \Delta x_2 + \cdots$$

Ersetzen der zeitabhängigen Terme in (2) und (3) wie in Aufgabe 3.1 vorgestellt um Beschreibung der Ruhelagen-Abweichung zu erhalten:

$$\left(\frac{\partial i}{\partial t}\right)_0 + \Delta\left(\frac{\partial i}{\partial t}\right) = -\frac{R}{L}(i_0 + \Delta i)(x_0 + \Delta x) + \frac{1}{L}(x_0 + \Delta x)(u_0 + \Delta u) \qquad (7)$$

$$\ddot{x}_0 + \Delta\ddot{x} = g - \frac{k}{m} \cdot \frac{(i_0 + \Delta i)^2}{(x_0 + \Delta x)^2} \qquad (8)$$

In Differentialgleichung (7) befindet sich als folgende Differenzenfunktion:

$$f(i_0 + \Delta i;\ x_0 + \Delta x;\ u_0 + \Delta u) = -\frac{R}{L}(i_0 + \Delta i)(x_0 + \Delta x) + \frac{1}{L}(x_0 + \Delta x)(u_0 + \Delta u)$$

Diese kann wie in Aufgabe 3.1 ebenfalls durch eine mehrdimensionale Taylor-Entwicklung der ursprünglichen Differentialgleichung angenähert werden. Es gilt also zunächst die folgenden drei partiellen Ableitungen zu bilden:

$$\frac{\partial f}{\partial i}|_{i_0,x_0,u_0} = -\frac{R}{L} \cdot x_0$$
$$\frac{\partial f}{\partial x}|_{i_0,x_0,u_0} = -\frac{R}{L} \cdot i_0 + \frac{1}{L} \cdot u_0$$
$$\frac{\partial f}{\partial u}|_{i_0,x_0,u_0} = \frac{1}{L} \cdot x_0$$

Damit ergibt sich für die Differenzenfunktion:

$$f(i_0 + \Delta i;\ x_0 + \Delta x;\ u_0 + \Delta u) \approx f(i_0, x_0, u_0) - \frac{R}{L} \cdot x_0 \cdot \Delta i + \left(-\frac{R}{L} \cdot i_0 + \frac{1}{L} \cdot u_0\right) \cdot \Delta x + \frac{1}{L} \cdot x_0 \cdot \Delta u$$

Einsetzen in (7) ergibt:

$$\underbrace{\left(\frac{\partial i}{\partial t}\right)_0}_{=0} + \Delta\left(\frac{\partial i}{\partial t}\right) = f(i_0, x_0, u_0) - \frac{R}{L} \cdot x_0 \cdot \Delta i + \left(-\frac{R}{L} \cdot i_0 + \frac{1}{L} \cdot u_0\right) \cdot \Delta x + \frac{1}{L} \cdot x_0 \cdot \Delta u$$

Für $f(i_0, x_0, u_0)$ ergibt sich:

$$f(i_0, x_0, u_0) = -\frac{R}{L} \cdot \frac{u_0}{R} \cdot \frac{1}{R}\sqrt{\frac{k}{m \cdot g}} \cdot u_0 + \frac{1}{L} \cdot \frac{1}{R}\sqrt{\frac{k}{m \cdot g}} \cdot u_0^2 = 0$$

Somit ergibt sich die linearisierte Differentialgleichung des elektrischen Teilsystems:

$$\Delta\left(\frac{\partial i}{\partial t}\right) = -\frac{R}{L} \cdot x_0 \cdot \Delta i + \left(-\frac{R}{L} \cdot i_0 + \frac{1}{L} \cdot u_0\right) \cdot \Delta x + \frac{1}{L} \cdot x_0 \cdot \Delta u$$

Einsetzen der Ruhelagen liefert:

$$\begin{aligned}\Delta\left(\frac{\partial i}{\partial t}\right) &= -\frac{R}{L} \cdot \sqrt{\frac{k}{m \cdot g}}\frac{1}{R} \cdot u_0 \cdot \Delta i + \left(-\frac{R}{L} \cdot \frac{u_0}{R} + \frac{1}{L} \cdot u_0\right) \cdot \Delta x + \frac{1}{L} \cdot \sqrt{\frac{k}{m \cdot g}}\frac{1}{R} \cdot u_0 \cdot \Delta u \\ &= \underline{-\frac{u_0}{L}\sqrt{\frac{k}{m \cdot g}} \cdot \Delta i + \frac{u_0}{LR}\sqrt{\frac{k}{m \cdot g}} \cdot \Delta u}\end{aligned}$$

Analoger Ansatz bei der Differentialgleichung des mechanischen Teilsystems. Zunächst werden die beiden partiellen Ableitungen des nichtlinearen Gliedes der Differentialgleichung gebildet um die Differenzenfunktion zu approximieren:

$$\frac{\partial}{\partial i}\left(-\frac{k}{m} \cdot \frac{i^2}{x^2}\right)\Big|_{x_2=x_{20}}^{x_1=x_{10}} = -2 \cdot \frac{k}{m} \cdot \frac{i_0}{x_0^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{k}{m} \cdot \frac{i^2}{x^2}\right)\Big|_{x_2=x_{20}}^{x_1=x_{10}} = 2 \cdot \frac{k}{m} \cdot \frac{i_0^2}{x_0^3}$$

Aufstellen der zweidimensionalen Taylor-Näherung des Terms:

$$f(i_0 + \Delta i;\ x_0 + \Delta x) \approx \underbrace{-\frac{k}{m} \cdot \frac{i_0^2}{x_0^2}}_{f(x_{10};x_{20})} + \underbrace{2 \cdot \frac{k}{m} \cdot \frac{i_0^2}{x_0^3}}_{\frac{\partial f}{\partial x_1}\big|_{x_2=x_{20}}^{x_1=x_{10}}} \cdot \Delta x - \underbrace{2 \cdot \frac{k}{m} \cdot \frac{i_0}{x_0^2}}_{\frac{\partial f}{\partial x_2}\big|_{x_2=x_{20}}^{x_1=x_{10}}} \cdot \Delta i$$

Einsetzen in (3):

$$\underbrace{\ddot{x}_0}_{=0} + \Delta\ddot{x} = g - \frac{k}{m} \cdot \frac{i_0^2}{x_0^2} + 2 \cdot \frac{k}{m} \cdot \frac{i_0^2}{x_0^3} \cdot \Delta x - 2 \cdot \frac{k}{m} \cdot \frac{i_0}{x_0^2} \cdot \Delta i \quad (4)$$

Durch anschließendes Einsetzen er Ruhelage x_0 erhält man die lineare Differentialgleichung um die Abweichung von der Ruhelage

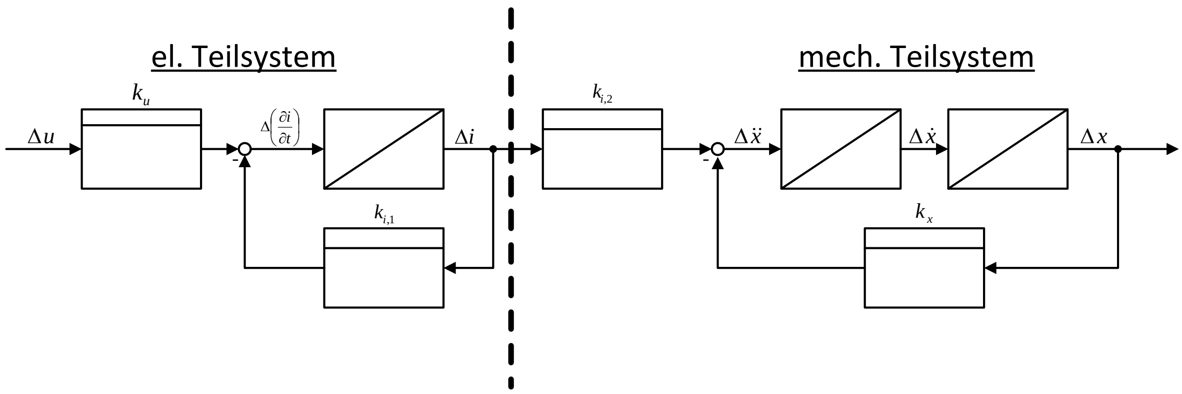
$$\Delta\ddot{x} = g - \frac{k}{m} \cdot i_0^2 \cdot \frac{m \cdot g}{k \cdot i_0^2} + 2 \cdot \frac{k}{m} \cdot i_0^2 \cdot \frac{m \cdot g}{i_0^3 \cdot k} \cdot \sqrt{\frac{m \cdot g}{k}} \cdot \Delta x - 2 \cdot \frac{k}{m} \cdot i_0 \cdot \frac{m \cdot g}{k \cdot i_0^2} \cdot \Delta i$$

$$\Leftrightarrow \Delta\ddot{x} - 2 \cdot \frac{g}{i_0} \sqrt{\frac{m \cdot g}{k}} \cdot \Delta x = -2 \cdot \frac{g}{i_0} \cdot \Delta i$$

Anschließendes Einsetzen von $i_0$liefert:

$$\underline{\Delta\ddot{x} - 2 \cdot \frac{gR}{u_0} \sqrt{\frac{m \cdot g}{k}} \cdot \Delta x = -2 \cdot \frac{gR}{u_0} \cdot \Delta i}$$

b)



Aufgabe 3.3: Tankbehälter

Aufgabe: a) Bestimmen Sie die Differentialgleichungen, die die beiden Füllstände der Wassersäulen $h_A(t)$ und $h_B(t)$ beschreiben und linearisieren Sie diese um deren Ruhelage für einen konstanten Zufluss $q_{zu,0} \geq 0$.

b) Stellen Sie das linearisierte System in Form eines Blockschaltbildes dar.

a)
Zunächst gilt es, den Durchfluss zwischen den beiden Behältern ***A*** und ***B*** zu bestimmen. Aus der Massenerhaltung ergibt sich zunächst:

$$q_{ab,A} = q_{zu,B}$$

Da der Durchfluss identisch mit dem Ausfluss aus Tank ***B***, lässt sich auch der Durchfluss mit der im Hinweis angegebenen Formel beschreiben. Als Füllhöhe ist dabei die Höhendifferenz zwischen den beiden Behältern zu berücksichtigen. Daher ergibt sich:

$$q_{ab,A} = q_{zu,B} = a \cdot \sqrt{2g(h_A(t) - h_B(t))}$$

Für das Volumen der Tanks gilt

$$V(t) = Q \cdot h(t) \qquad (1)$$

Außerdem ergibt sich die Änderungsrate des Volumens zu

$$\dot{V}(t) = q_{zu}(t) - q_{ab}(t) \qquad (2)$$

Durch ableiten von (1) und einsetzen in (2) ergibt sich dann die allgemeine Differentialgleichung für die Füllhöhe des Tanks

$$\dot{h}(t) = \frac{1}{Q}(q_{zu} - q_{ab}) \qquad (3)$$

Setzt man nun die aufgestellte Beziehung für den Durchfluss zwischen den beiden Behältern sowie die Angabe aus dem Hinweis ein, ergeben sich die folgenden beiden nichtlinearen Differentialgleichungen

$$\dot{h}_A(t) = \frac{1}{Q}\left(q_{zu} - a \cdot \sqrt{2g(h_A(t) - h_B(t))}\right) \qquad (4)$$

$$\dot{h}_B(t) = \frac{1}{Q}\left(a \cdot \sqrt{2g\big(h_A(t) - h_B(t)\big)} - a \cdot \sqrt{2gh_B(t)}\right) \qquad (5)$$

<u>Bestimmen der Ruhelage:</u>

Für die Ruhelage gelten die folgenden Beziehungen:

$$0 = q_{zu,0} - a\sqrt{2g\left(h_{A,0} - h_{B,0}\right)} \tag{6}$$
$$0 = a\sqrt{2g(h_{A,0} - h_{B,0})} - a\sqrt{2gh_{B,0}} \tag{7}$$

Aus Gleichung (7) folgt unmittelbar durch umstellen:

$$\begin{aligned} & h_{A,0} - h_{B,0} = h_{B,0} \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{2} h_{A,0} = h_{B,0} \end{aligned} \tag{8}$$

Aus Gleichung (6) folgt:

$$\begin{aligned} & q_{zu,0}^2 = 2a^2 g\left(h_{A,0} - h_{B,0}\right) \\ \Leftrightarrow & h_{B,0} = h_{A,0} - \frac{q_{zu,0}^2}{2a^2 g} \end{aligned} \tag{9}$$

Woraus sich dann für die beiden Ruhelagen ergibt:

$$h_{A,0} = \frac{q_{zu,0}^2}{a^2 g}, \qquad h_{B,0} = \frac{q_{zu,0}^2}{2a^2 g}$$

Linearisierung:

Es reicht die Klammerausdrücke in den Gleichungen (4) und (5) zu linearisieren, da aufgrund der Wahl der Ruhelage als Arbeitspunkt die Abweichung in der Füllgeschwindigkeit identisch mit der Änderung gegenüber dem Arbeitspunkt ist. Für die erste Differentialgleichung ergeben sich die folgenden Koeffizienten:

$$\frac{\partial f}{\partial q_{zu}}\Big|_{q_{zu,0}, h_{A,0}, h_{B,0}} = 1$$
$$\frac{\partial f}{\partial h_A}\Big|_{q_{zu,0}, h_{A,0}, h_{B,0}} = \frac{a \cdot g}{\sqrt{2g(h_{A,0} - h_{B,0})}} = k_{h_{A,1}}$$
$$\frac{\partial f}{\partial h_B}\Big|_{q_{zu,0}, h_{A,0}, h_{B,0}} = -\frac{a \cdot g}{\sqrt{2g\left(h_{A,0} - h_{B,0}\right)}} = k_{h_{B,1}}$$

Es ergibt sich daher die folgende linearisierte Differentialgleichung für den Tank ***A***:

$$\Delta\dot{h}_A = \underbrace{\frac{1}{Q}}_{k_q} \cdot \Delta q_{zu} + \underbrace{\frac{k_{h_{A,1}}}{Q}}_{k_{A,1}} \cdot \Delta h_A + \underbrace{\frac{k_{h_{B,1}}}{Q}}_{k_{B,1}} \cdot \Delta h_B$$

In Differentialgleichung (5) muss aus den gleichen Gründen ebenfalls nur der Klammerausdruck linearisiert werden. Die Koeffizienten der linearisierten Differentialgleichungen ergeben sich zu:

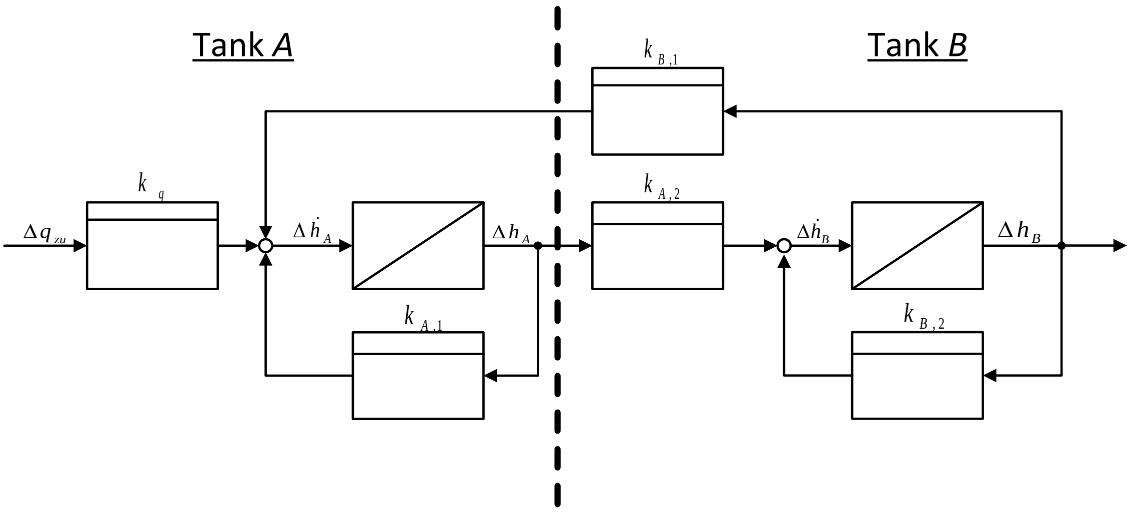
$$\frac{\partial f}{\partial h_A}\Big|_{q_{zu,0},h_{A,0},h_{B,0}} = \frac{a \cdot g}{\sqrt{2g(h_{A,0} - h_{B,0})}} = k_{h_{A,2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial h_B}\Big|_{q_{zu,0},h_{A,0},h_{B,0}} = -\frac{a \cdot g}{\sqrt{2g\left(h_{A,0} - h_{B,0}\right)}} - \frac{a \cdot g}{\sqrt{2gh_{B,0}}} = k_{h_{B,2}}$$

Daraus ergibt sich die linearisierte Differentialgleichung für Tank ***B***:

$$\Delta\dot{h}_B = \underbrace{\frac{k_{h_{A,2}}}{Q}}_{k_{A,2}} \cdot \Delta h_A + \underbrace{\frac{k_{h_{B,2}}}{Q}}_{k_{B,2}} \cdot \Delta h_B$$

b)



Allgemeines Vorgehen bei einer Linearisierung:

- Definition eines Arbeitspunktes y_0 (häufig Ruhelage oder gewünschter Betriebspunkt)
- Differentialgleichung nach 0 oder einer linear vorliegenden zeitvarianten Größe auflösen
  - Allgemein: $0 = f(y(t), \dot{y}(t), \ddot{y}(t), \dots, u(t), \dot{u}(t), \dots)$
- Bilden der zeitlichen Ableitung aller zeitvarianten Größen im Arbeitspunkt
  - $\frac{\delta f}{\delta y}|_{AP}, \frac{\delta f}{\delta \dot{y}}|_{AP}, \frac{\delta f}{\delta \ddot{y}}|_{AP}, \dots, \frac{\delta f}{\delta u}|_{AP}, \frac{\delta f}{\delta \dot{u}}|_{AP}, \dots$
- Aufstellen der linearisierten Differentialgleichung im gewünschten Arbeitspunkt
- $0 = f(AP) + \frac{\delta f}{\delta y}|_{AP} \cdot (y - y_0) + \frac{\delta f}{\delta \dot{y}}|_{AP} \cdot (\dot{y} - \dot{y}_0) + \frac{\delta f}{\delta \ddot{y}}|_{AP} \cdot (\ddot{y} - \ddot{y}_0) + \cdots$
  $+ \frac{\delta f}{\delta u}|_{AP} \cdot (u - u_0) + \frac{\delta f}{\delta \dot{u}}|_{AP} \cdot (\dot{u} - \dot{u}_0) + \cdots$
- Einsetzen der Größen im Arbeitspunkt
  - Bei Ruhelage y_0 durch den von u_0 abhängigen Wert ersetzen (siehe Aufgabe 3.1 und 3.2) , alle anderen Ableitungen $\dot{y}_0, \ddot{y}_0, \dots$ gleich Null setzen