Lösung zur 1. Übung „Steuer- und Regelungstechnik“

Einleitende Bemerkungen:

- Unter einem System versteht man ein mathematisches Modell eines realen Vorgangs
- Zusammenwirken mehrere technischer Komponenten
- Mathematisch immer durch Differentialgleichungen beschrieben
- Es existieren Eingänge, mit denen das Systemverhalten beeinflusst wird
  ➔ Inhomogene Differentialgleichungen
- Ausgänge, die gemessen werden können

- Für lineare Differentialgleichungen gilt, dass wenn zwei homogene Lösungen $y_1(t)$ und $y_2(t)$ existieren, jede Linearkombination $c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$ ebenfalls eine Lösungen ist.
- Linearität bezieht sich immer nur auf den homogenen Teil der Differentialgleichungen
- Inhomogene Differentialgleichungen streng genommen nichtlinear, können aber mit linearen Verfahren gelöst werden, daher zählen sie zu den linearen Differentialgleichungen
- Lin. Differentialgleichungen haben immer folgende Form:

$$a_0 y(t) + a_1 \dot{y}(t) + a_3 \ddot{y}(t) + \cdots = \cdots$$

- Jede zeitabhängige Größe liegt nur in der ersten Ordnung vor und alle vorkommenden Parameter sind konstant
- Alle anderen mathematischen Operationen wie $y_1(t) \cdot y_2(t), \sqrt{y(t)}, e^{y(t)}, etc$ sind nichtlinear

Aufgabe 1.1: Mechanisches System

Aufgabe: Bestimmen Sie die Differentialgleichung die die Dynamik der Koordinate $x(t)$ des oben dargestellten Feder-Masse-Dämpfer Systems in Abhängigkeit der angreifenden Kraft $F(t)$ beschreibt.

- 2. Newton’sches Axiom: $m \cdot a = \sum F$
- lineares Dämpferelement: $F_D = -d \cdot \dot{x}(t)$
- lineare Feder: $F_C = -c \cdot x(t)$

Damit ergibt sich: $\sum F = F(t) + F_D + F_C = F(t) - d \cdot \dot{x}(t) - c \cdot x(t)$
Mit $a(t) = \ddot{x}(t)$
ergibt sich dann die folgende Differentialgleichung für das Feder-Masse-Dämpfer System:

$$m \cdot \ddot{x}(t) = F(t) - d \cdot \dot{x}(t) - c \cdot x(t)$$

Umformen um Eingänge und Ausgänge zu trennen:

$$\boxed{m \cdot \ddot{x}(t) + d \cdot \dot{x}(t) + c \cdot x(t) = F(t)}$$

➔ lineare inhomogene Differentialgleichung zweiter Ordnung

Aufgabe 1.2: Elektrisches System

Aufgabe: Bestimmen Sie die Differentialgleichung die das Verhalten des aufgeführten Schaltkreises beschreibt.

- Es gilt $i_R = i_L = i_C = i$
- Bauteilgleichungen:
  - $u_R = R \cdot i$
  - $u_L = L \cdot \frac{\partial i}{\partial t}$
  - $i_C = i = C \cdot \frac{\partial u_C}{\partial t}$
- Aufstellen der Maschengleichungen (2. Kirchhoff'sches Gesetz):
  - $u_E = u_R + u_L + u_C \ (1)$
  - $u_A = u_C \ (2)$

Aufgrund von (2) und der Bauteilgleichung der Kapazität gilt

$$i = C \cdot \frac{\partial u_A}{\partial t} \ (3)$$

Einsetzen der Bauteilgleichungen in (1):

$$u_E = R \cdot i + L \cdot \frac{\partial i}{\partial t} + u_A \ (4)$$

Aus (3) folgt weiterhin:

$$L \cdot \frac{\partial i}{\partial t} = L \cdot C \cdot \frac{\partial^2 u_A}{\partial t^2} \ (5)$$

Einsetzen von (2) und (5) in (4):

$$u_E = R \cdot C \cdot \frac{\partial u_A}{\partial t} + L \cdot C \cdot \frac{\partial^2 u_A}{\partial t^2} + u_A$$

Daraus folgt unmittelbar:

$$\boxed{L \cdot C \cdot \ddot{u}_A(t) + R \cdot C \cdot \dot{u}_A(t) + u_A(t) = u_E(t)}$$

➔ lineare inhomogene Differentialgleichung zweiter Ordnung

Aufgabe 1.3: Mechanisches System

Aufgabe: Bestimmen Sie die Differentialgleichung die die Dynamik der Koordinate $x(t)$ des oben dargestellten Feder-Masse-Dämpfer Systems in Abhängigkeit der angreifenden Kraft $F(t)$ beschreibt.

Das System entspricht nahezu dem in Aufgabe 1.1 behandelten Feder-Masse-Dämpfer-System. Der einzige Unterschied besteht in dem nichtlinearen Verhalten der Feder. Somit folgt für die Differentialgleichung:

$$m \cdot \ddot{x}(t) + d \cdot \dot{x}(t) + \sqrt{C_0 \cdot x(t)} = F(t)$$

Durch die verwendete Feder liegt die zeitabhängige Größe $x(t)$ nur innerhalb einer Wurzel, bzw. mit der Potenz $x^{1/2}$ vor

➔ Es liegt eine <u>nichtlineare inhomogene</u> Differentialgleichung vor.

Aufgabe 1.4: Tankbehälter

Aufgabe: Bestimmen Sie die Differentialgleichung die den zeitlichen Verlauf der Füllhöhe $h(t)$ in Abhängigkeit des Zuflusses $q_{zu}(t)$ beschreibt.

- Für den Volumenstrom durch den Tank gilt: $\dot{V}(t) = q_{zu}(t) - q_{ab}(t)$
- Desweitern gilt: $V(t) = A \cdot h(t)$

Differenzieren ergibt: $\dot{V}(t) = A \cdot \dot{h}(t)$.
Somit ergibt sich für die Änderung der Füllhöhe:

$$\dot{h}(t) = \frac{1}{A}\dot{V}(t) = \frac{1}{A}\left(q_{zu}(t) - q_{ab}(t)\right) \quad (1)$$

Aus der Aufgabenstellung ist bekannt, dass für das abfließende Wasser $q_{ab}(t) = a \cdot \sqrt{2gh(t)}$ gilt. Eingesetzt in (1) ergibt sich dann die gesuchte Differentialgleichung zu:

$$\dot{h}(t) = -\frac{a}{A} \cdot \sqrt{2gh(t)} + \frac{1}{A} q_{zu}(t)$$