8. Übung zur Vorlesung „Steuer- und Regelungstechnik“

Stabilität, künstliche Stabilisierung

Korbinian Figel

Institut für Steuer- und Regelungstechnik
Fakultät für Luft- und Raumfahrttechnik
Universität der Bundeswehr München

Stabilität

Aus der Vorlesung:

Definition 3.1 (*Stabilität*)

i) Eine **Ruhelage** eines dynamischen Systems heißt (*asymptotisch*) **stabil**, wenn das System nach Auslenkung aus der Ruhelage selbsttätig in die Ruhelage zurückkehrt (Bild 3.2).

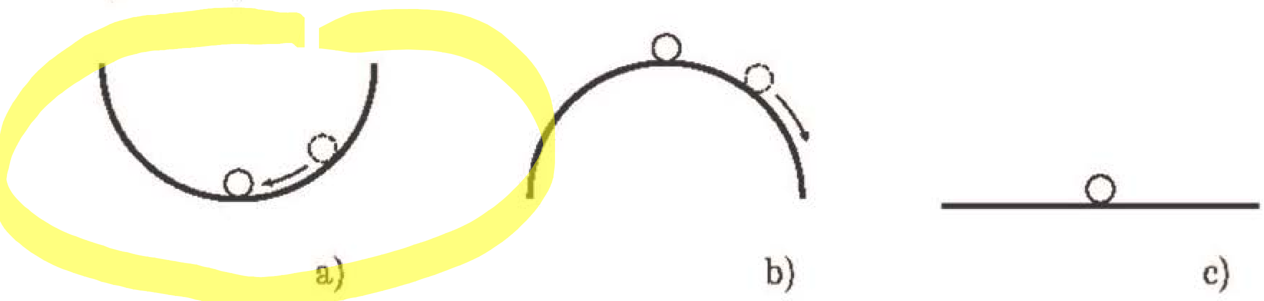


Bild 3.2: Stabilität von Ruhelagen
a) stabile Ruhelage b) instabile Ruhelage c) indifferente Ruhelage

Für lineare Übertragungssysteme folgt daraus:

- Genau dann asymptotisch stabil, wenn für die Wurzeln (=Polstellen der ÜF) seiner charakteristischen Gleichung gilt:

$$Re\,\{p_i\} < 0, \qquad i = 1, \dots, n$$

  - Realteile aller Polstellen müssen negativ sein.
  - Berechnung der Polstellen für $n > 2$ aufwendig und für $n \geq 4$ i.A. nur noch numerisch möglich.

→ Algebraische Stabilitätskriterien um Stabilität zu prüfen.

Algebraische Stabilitätskriterien

- Aussage über Lage der Polstellen, ohne diese explizit zu berechnen
- Ein Polynom

$$P(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0$$

  ist Hurwitz-Polynom genau dann, wenn alle Polstellen einen negativen Realteil haben.

- Ein System ist also asymptotisch stabil, wenn sein charakteristisches Polynom ein Hurwitz-Polynom ist.

Hurwitz-Kriterium

- Ein Polynom ist Hurwitz-Polynom, wenn:
- 1. Bedingung: alle $a_i\,, i = 0, \ldots, n$ sind vorhanden und haben das gleiche Vorzeichen. notwendig
- 2. Bedingung: Hurwitzdeterminante H_{n-1} sowie alle ihre Hauptdeterminanten $H_i, i = 1, \ldots, n-2$ sind positiv.

hin-reichend

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccccc} H_1 & H_2 & H_3 & & & & \end{array} \\
H_{n-1} = & \begin{vmatrix}
a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\
a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\
0 & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots & \cdots & \vdots \\
0 & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots & \cdots & \vdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & a_1 & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_2 & a_0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_5 & a_3 & a_1
\end{vmatrix}
\end{array}
\qquad (3.30)
$$

Routh-Kriterium

- Hurwitz-Kriterium: Ja/Nein-Entscheidung
- Routh: Aussage über Anzahl instabiler Polstellen/Eigenwerte
- 1. Bedingung: alle a_i , $i = 0, \dots , n$ sind vorhanden und haben das gleiche Vorzeichen (identisch zu Hurwitz) notw.
- 2. Bedingung: Alle Elemente der ersten Spalte des Routh-Schemata (s. nächste Folie) sind positiv

hin-reichend

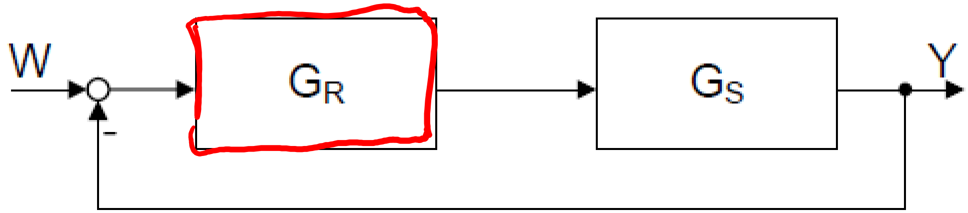
- Zusätzlich: Anzahl der Vorzeichenwechsel in erster Spalte entspricht Anzahl der Wurzeln mit positivem Realteil und damit der Anzahl an instabilen Polstellen/Eigenwerten

Routh-Kriterium

a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	$\dots$
a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	$\dots$
$A_1 = \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}}$	$B_1 = \frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}}$	$C_1 = \frac{a_{n-1}a_{n-6} - a_n a_{n-7}}{a_{n-1}}$	$\dots$
$A_2 = \frac{A_1 a_{n-3} - a_{n-1}B_1}{A_1}$	$B_2 = \frac{A_1 a_{n-5} - a_{n-1}C_1}{A_1}$	$C_2 = \frac{A_1 a_{n-7} - a_{n-1}D_1}{A_1}$	$\dots$
$A_3 = \frac{A_2 B_1 - A_1 B_2}{A_2}$	$B_3 = \frac{A_2 C_1 - A_1 C_2}{A_2}$	$\dots$	$\dots$
$A_4 = \frac{A_3 B_2 - A_2 B_3}{A_3}$	$\dots$	$\dots$	$\dots$

Aufgabe 8.1 a)

Gegeben ist folgendes Blockschaltbild



mit den Streckenübertragungsfunktionen

1. $G_s(s) = \frac{10}{(s+1)\cdot(s+2)\cdot(s+3)}$ 2. $G_s(s) = \frac{10\cdot(s+5)}{(s+1)\cdot(s+2)\cdot(s+3)}$

Aufgaben:

a) Der Regelkreis wird mit einem P-Regler $G_R(s) = K_R$ geschlossen.
Überprüfen Sie mit dem Hurwitz- bzw. Routh-Kriterium für welche K_R der Regelkreis stabil ist.

Aufgabe 8.1 a)

a) Der Regelkreis wird mit einem P-Regler $G_R(s) = K_R$ geschlossen. Überprüfen Sie mit dem Hurwitz- bzw. Routh-Kriterium für welche K_R der Regelkreis stabil ist.

1. $G_s(s) = \frac{10}{(s+1)\cdot(s+2)\cdot(s+3)}$

$$G_{wy} = \frac{G_R G_S}{1 + G_R G_S} = \frac{\frac{10 \cdot K_R}{(s+1)(s+2)(s+3)}}{1 + \frac{10 K_R}{(s+1)(s+2)(s+3)}} = \frac{10 K_R}{(s+1)(s+2)(s+3) + 10 K_R}$$

$$= \frac{10 K_R}{\underbrace{1}_{a_3} \cdot s^3 + \underbrace{6}_{a_2} s^2 + \underbrace{11}_{a_1} s + \underbrace{(6 + 10 K_R)}_{a_0}}$$

a) Der Regelkreis wird mit einem P-Regler $G_R(s) = K_R$ geschlossen. Überprüfen Sie mit dem Hurwitz- bzw. Routh-Kriterium für welche K_R der Regelkreis stabil ist.

1. Bed.

$a_3, a_2, a_1 > 0 \Rightarrow a_0 = 6 + 10 K_R \overset{!}{>} 0 \Rightarrow K_R > -0{,}6$

2. Bed.

$H_1 = a_{n-1} = a_2 = 6 > 0$ ✓

$$H_2 = \det \begin{bmatrix} a_2 & a_0 \\ a_3 & a_1 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 6 & 6+10K_R \\ 1 & 11 \end{bmatrix} =$$

$$= 66 - 6 - 10 K_R \overset{!}{>} 0 \Rightarrow -0{,}6 < K_R < 6$$

Aufgabe 8.1 a)

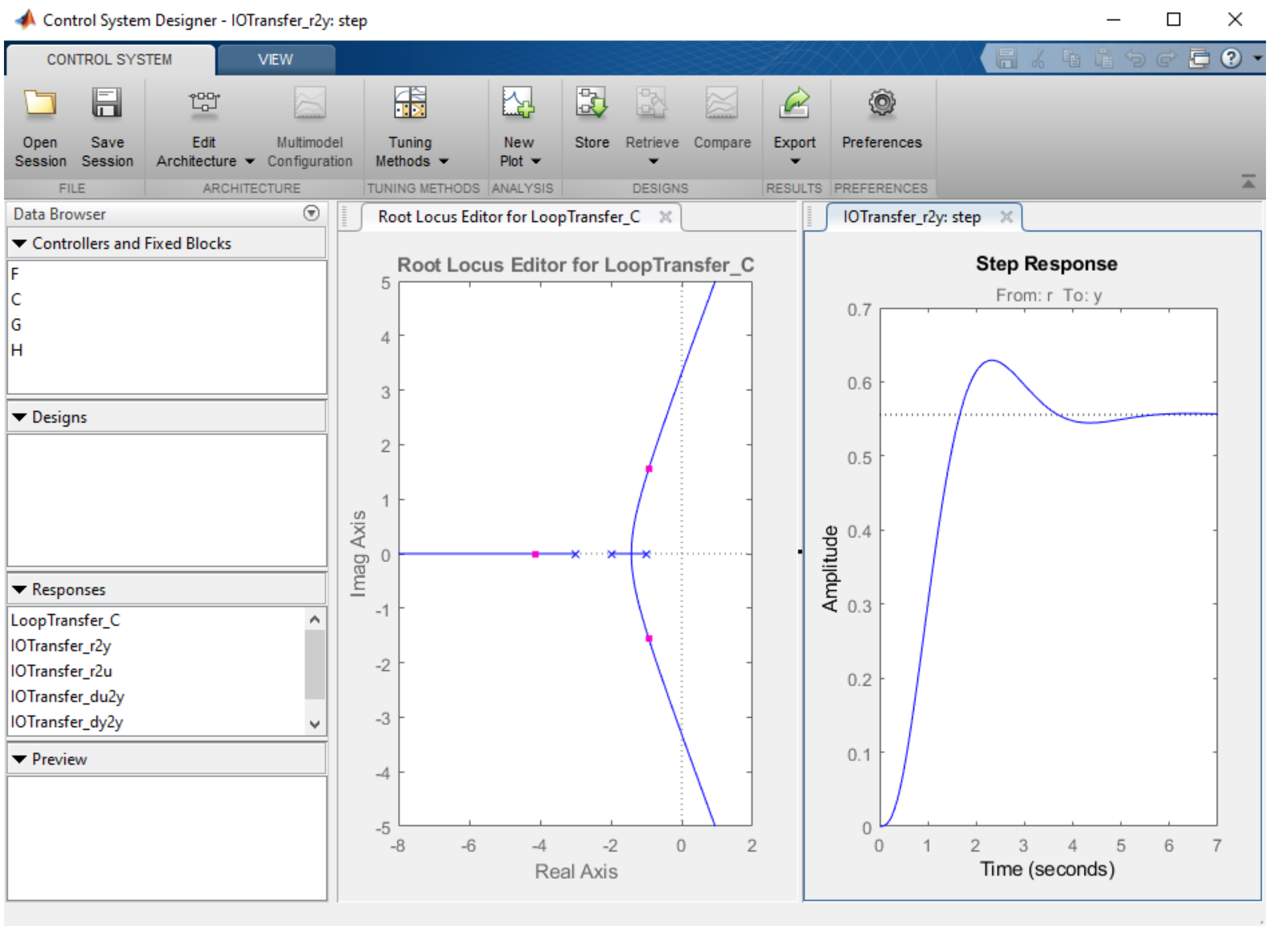
a) Der Regelkreis wird mit einem P-Regler $G_R(s) = K_R$ geschlossen. Überprüfen Sie mit dem Hurwitz- bzw. Routh-Kriterium für welche K_R der Regelkreis stabil ist.

$a_n = a_3 = 1$	$a_{n-2} = a_1 = 11$	$a_{n-4} = 0$
$a_{n-1} = a_2 = 6$	$a_{n-3} = a_0 = 6 + 10 K_R$	$a_{n-5} = 0$
$A_1 = \frac{a_{n-1} \cdot a_{n-2} - a_n \cdot a_{n-3}}{a_{n-1}} =$ $\frac{6 \cdot 11 - 1 \cdot (6 + 10 K_R)}{6} = 10 - \frac{10}{6} K_R$	$B_1 = \frac{a_{n-1} \cdot a_{n-4} - a_n \cdot a_{n-5}}{a_{n-1}} = 0$	$C_1 = 0$
$A_2 = \frac{A_1 \cdot a_{n-3} - a_{n-1} \cdot B_1}{A_1} =$ $6 + 10 K_R$	$B_2 = \frac{A_1 \cdot a_{n-5} - a_{n-1} \cdot C_2}{A_1} = 0$	$C_2 = 0$

$10 - 10/6\, K_R > 0 \quad \Rightarrow \quad K_R < 6$

$6 + 10 K_R > 0 \quad K_R > -0{,}6$

Matlab


Control System Designer - IOTransfer_r2y: step
CONTROL SYSTEM
VIEW
Open Session
Save Session
Edit Architecture
Multimodel Configuration
Tuning Methods
New Plot
Store
Retrieve
Compare
Export
Preferences
FILE
ARCHITECTURE
TUNING METHODS
ANALYSIS
DESIGNS
RESULTS
PREFERENCES
Data Browser
Controllers and Fixed Blocks
F
C
G
H
Designs
Responses
LoopTransfer_C
IOTransfer_r2y
IOTransfer_r2u
IOTransfer_du2y
IOTransfer_dy2y
Preview
Root Locus Editor for LoopTransfer_C
IOTransfer_r2y: step
Root Locus Editor for LoopTransfer_C
Imag Axis
Real Axis
Step Response
From: r To: y
Amplitude
Time (seconds)

Aufgabe 8.1 a)

a) Der Regelkreis wird mit einem P-Regler $G_R(s) = K_R$ geschlossen. Überprüfen Sie mit dem Hurwitz- bzw. Routh-Kriterium für welche K_R der Regelkreis stabil ist.

2. $G_s(s) = \frac{10 \cdot (s+5)}{(s+1)\cdot(s+2)\cdot(s+3)}$

$$G_w = \frac{10\,(s+5)\cdot K_R}{(s+1)(s+2)(s+3) + 10(s+5)\,K_R} =$$

$$= \frac{10\,(s+5)\,K_R}{\underbrace{1}_{a_3} s^3 + \underbrace{6}_{a_2} s^2 + \underbrace{(11 + K_R \cdot 10)}_{a_1} s + \underbrace{(6 + 50\,K_R)}_{a_0}}$$

Aufgabe 8.1 a)

a) Der Regelkreis wird mit einem P-Regler $G_R(s) = K_R$ geschlossen. Überprüfen Sie mit dem Hurwitz- bzw. Routh-Kriterium für welche K_R der Regelkreis stabil ist.

1. Bed.

$a_3, a_2 > 0 \Rightarrow$

$a_1 = 11 + 10 K_R > 0 \rightarrow K_R > -1{,}1$

$a_0 = 6 + 50 K_R > 0 \qquad K_R > -0{,}12$

2. Bed.

$H_1 = a_2 > 0$ ✓

$$H_2 = \det \begin{bmatrix} 6 & 6 + 50 K_R \\ 1 & 11 + 10 K_R \end{bmatrix} = 60 + 10 K_R \overset{!}{>} 0$$

$\rightarrow K_R > -6$

$\Rightarrow -0{,}12 < K_R < \infty$

Aufgabe 8.1 a)

a) Der Regelkreis wird mit einem P-Regler $G_R(s) = K_R$ geschlossen.
Überprüfen Sie mit dem Hurwitz- bzw. Routh-Kriterium für welche K_R der Regelkreis stabil ist.

$a_n = a_3 = 1$	$a_{n-2} = a_1 = 11 + 10K_R$	$a_{n-4} = 0$
$a_{n-1} = a_2 = 6$	$a_{n-3} = a_0 = 6 + 50K_R$	$a_{n-5} = 0$
$A_1 = \frac{a_{n-1} \cdot a_{n-2} - a_n \cdot a_{n-3}}{a_{n-1}} = \frac{6 \cdot (11 + 10K_R) - 1 \cdot (6 + 50K_R)}{6} = 1 + \frac{1}{6}K_R$	$B_1 = \frac{a_{n-1} \cdot a_{n-4} - a_n \cdot a_{n-5}}{a_{n-1}} = 0$	$C_1 = 0$
$A_2 = \frac{A_1 \cdot a_{n-3} - a_{n-1} \cdot B_1}{A_1} = 6 + 50K_R$	$B_2 = \frac{A_1 \cdot a_{n-5} - a_{n-1} \cdot C_2}{A_1} =$	$C_2 = 0$

$1 + \frac{1}{6}K_R \overset{!}{>} 0 \Rightarrow K_R > -6$

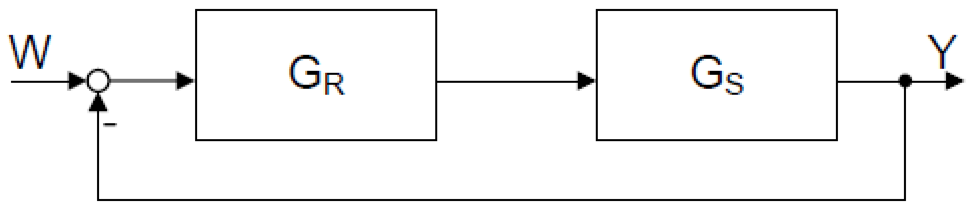
$6 + 50K_R \overset{!}{>} 0 \Rightarrow K_R > -0{,}12$

aus Bed. 1.
$K_R > -0{,}12$

$\Rightarrow -0{,}12 < K_R < \infty$

Aufgabe 8.1 b)

Gegeben ist folgendes Blockschaltbild



mit der Streckenübertragungsfunktion

$$G_s(s) = \frac{10}{(s+2)\cdot(s+3)\cdot(s+4)}$$

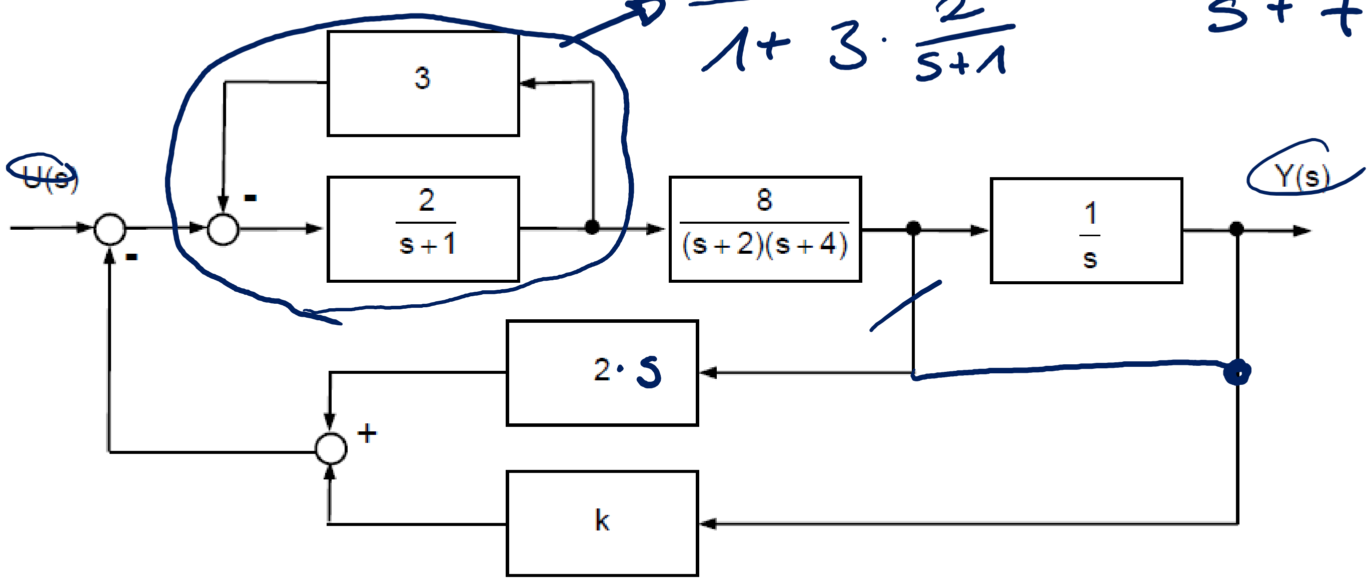
b) Der Regelkreis wird mit einem PDT_1-Regler $G_R(s) = \frac{K_R\cdot(s+1.5)}{(s+1)}$ geschlossen. Überprüfen sie mit dem Hurwitz- bzw. Routh-Kriterium für welche K_R der Regelkreis stabil ist.

→ zum selbstständigen Üben

Aufgabe 8.2 a)

Gegeben ist folgendes Blockschaltbild

$$\frac{\frac{2}{s+1}}{1+3\cdot\frac{2}{s+1}} = \frac{2}{s+7}$$



a) Bestimmen sie die Übertragungsfunktion $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$ mit dem noch freien Parameter k

a) Bestimmen sie die Übertragungsfunktion $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$ mit dem noch freien Parameter k

$$\frac{Y}{U} = \frac{\frac{2}{s+7} \cdot \frac{8}{(s+2)(s+4)} \cdot \frac{1}{s}}{1 + \frac{16}{(s+2)(s+4)(s+7)s}(k+2s)} =$$

$$= \frac{16}{(s+2)(s+4)(s+7)s + 16(k+2s)} =$$

$$= \frac{16}{\underbrace{s^4}_{a_4} + \underbrace{13}_{a_3} s^3 + \underbrace{50}_{a_2} s^2 + \underbrace{88}_{a_1} s + \underbrace{16k}_{a_0}}$$

Aufgaben 8.2 b)-e)

b) Ermitteln sie mit dem Hurwitz-Kriterium den k-Bereich, für den das System asymptotisch stabil ist.

c) Überprüfen Sie das Ergebnis mit dem Routh-Kriterium.

d) Wie viele Pole mit positivem Realteil hat das System, wenn der in c) ermittelte Bereich unter-/überschritten wird?

e) Bestimmen Sie den stat. Endwert für den Fall $u(t) = 1(t)$ und $\mathrm{k} = \frac{k_{max}}{4}$ mit dem in b) bzw. c) ermittelten k_{max}.
Was können sie bzg. des stat. Endwertes im Fall $k = 2k_{max}$ aussagen?

Aufgabe 8.2 b)

b) Ermitteln sie mit dem Hurwitz-Kriterium den k-Bereich, für den das System asymptotisch stabil ist.

1. Bed

$a_4, a_3, a_2, a_1 > 0 \rightarrow a_0 = 16K \overset{!}{>} 0 \rightarrow K > 0$

2. Bed.

$H_1 = a_3 = 13 > 0$ ✓

$H_2 = \det \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ a_4 & a_2 \end{vmatrix} = \det \begin{vmatrix} 13 & 88 \\ 1 & 50 \end{vmatrix} = 562 > 0$ ✓

$H_3 = \det \begin{vmatrix} a_3 & a_1 & 0 \\ a_4 & a_2 & a_0 \\ 0 & a_3 & a_1 \end{vmatrix} = \det \begin{vmatrix} 13 & 88 & 0 \\ 1 & 50 & 16K \\ 0 & 13 & 88 \end{vmatrix}$

Aufgabe 8.2 b)

b) Ermitteln sie mit dem Hurwitz-Kriterium den k-Bereich, für den das System asymptotisch stabil ist.

$$13 \cdot 50 \cdot 88 + 0 + 0 - 0 - 13 \cdot 16K \cdot 13 - 88 \cdot 1 \cdot 88$$

$$= 49456 - 2704\,K \overset{!}{>} 0$$

$$K < 18{,}295$$

$$0 < K < 18{,}295$$

c) Überprüfen Sie das Ergebnis mit dem Routh-Kriterium.

$a_n = a_4 = 1$	$a_{n-2} = a_2 = 50$	$a_{n-4} = a_0 = 16K$
$a_{n-1} = a_3 = 13$	$a_{n-3} = a_1 = 88$	$a_{n-5} = 0$
$A_1 = \frac{a_{n-1} \cdot a_{n-2} - a_n \cdot a_{n-3}}{a_{n-1}} =$ $= 43{,}23$	$B_1 = \frac{\cancel{a_{n-1}} \cdot a_{n-4} - a_n \cdot \cancel{a_{n-5}}}{\cancel{a_{n-1}}} =$ $= 16\,K$	$C_1 = 0$
$A_2 = \frac{A_1 \cdot a_{n-3} - a_{n-1} \cdot B_1}{A_1} =$ $= 88 - 4{,}81$	$B_2 = \frac{A_1 \cdot \cancel{a_{n-5}} - a_{n-1} \cdot \cancel{C_2}}{A_1} =$	$C_2 = 0$
$A_3 = \frac{\cancel{A_2} \cdot B_1 - A_1 \cdot \cancel{B_2}}{\cancel{A_2}} = 16K$	$B_3 = \frac{A_3 \cdot \cancel{C_1} - A_1 \cdot \cancel{C_2}}{A_2} = 0$	$C_3 = 0$

Aufgabe 8.2 c)

c) Überprüfen Sie das Ergebnis mit dem Routh-Kriterium.

$a_4 = 1$
$a_3 = 13$
$A_1 = 43{,}23$
$A_2 = 88 - 4{,}81k$
$A_3 = 16k$

$\left.\begin{matrix} a_4 \\ a_3 \\ A_1 \end{matrix}\right\} > 0$

$A_2 \overset{!}{>} 0 \Rightarrow K < 18{,}295$

$A_3 \overset{!}{>} 0 \Rightarrow K > 0$

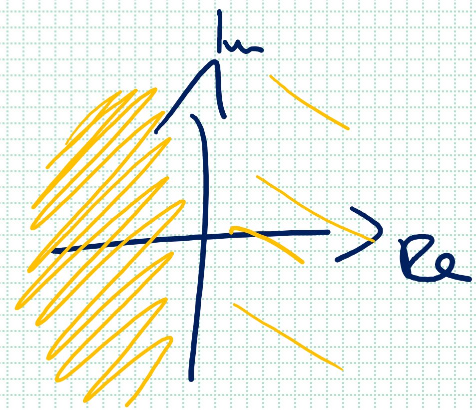
Mit 1. Bed

$$0 < K < 18{,}295$$

Aufgabe 8.2 d)

d) Wie viele Pole mit positivem Realteil hat das System, wenn der in c) ermittelte Bereich unter-/überschritten wird?

	$k < 0$	$k > 18{,}295$
a_4, a_3, A_1	> 0	> 0
A_2	> 0	< 0
A_3	< 0	> 0
	→ 1 VZW	2 VZW
	→ 1 Pol in rechten kpl. HE	→ 2 Pole rechts



Aufgabe 8.2 e)

e) 1. Bestimmen Sie den stat. Endwert für den Fall $u(t) = 1(t)$ und
$\mathrm{k} = \frac{k_{max}}{4}$ mit dem in b) bzw. c) ermittelten k_{max}.
2. Was können sie bzg. des stat. Endwertes im Fall $k = 2k_{max}$ aussagen?

$$y_\infty = \lim_{t \to \infty} y(t) = \lim_{s \to 0} s\, Y(s) = \lim_{s \to 0} s\, G(s) \cdot \frac{1}{s}$$

$$= \lim_{s \to 0} G(s) = \lim_{s \to 0} \frac{16}{s^4 + 13s^3 + 50s^2 + 88s + 16k} =$$

$$= \frac{1}{k}$$

$$1. = \frac{4}{k_{max}} = \frac{4}{18{,}295} \approx 0{,}219$$

2. Grenzwert für instabiles System nicht gültig

Aufgabe 8.2 e)

e) Bestimmen Sie den stat. Endwert für den Fall $u(t) = 1(t)$ und $\mathrm{k} = \frac{k_{max}}{4}$ mit dem in b) bzw. c) ermittelten k_{max}.
Was können sie bzg. des stat. Endwertes im Fall $k = 2k_{max}$ aussagen?