9. Übung zur Vorlesung „Steuer- und Regelungstechnik“

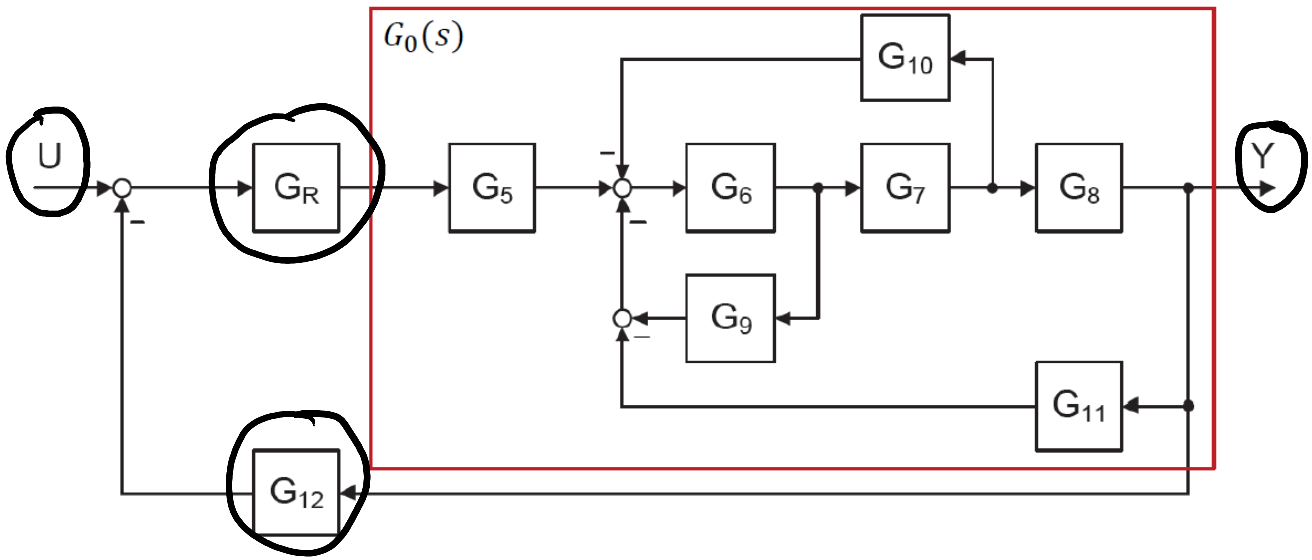
Künstliche Stabilität, Reglerentwurf, Polkompensation

Felix Goßmann M.Sc.

Institut für Steuer- und Regelungstechnik
Fakultät für Luft- und Raumfahrttechnik
Universität der Bundeswehr München

Aufgabe 9.1: Reglerentwurf nach Ziegler-Nichols

Gegeben ist das folgende System in Blockschaltbild-Form



mit den allgemeinen Übertragungsfunktionen $G_5(s) - G_{12}(s)$ sowie $G_R(s)$.

Aufgabe 9.1: Reglerentwurf nach Ziegler-Nichols

Für die Übertragungsfunktionen gilt:

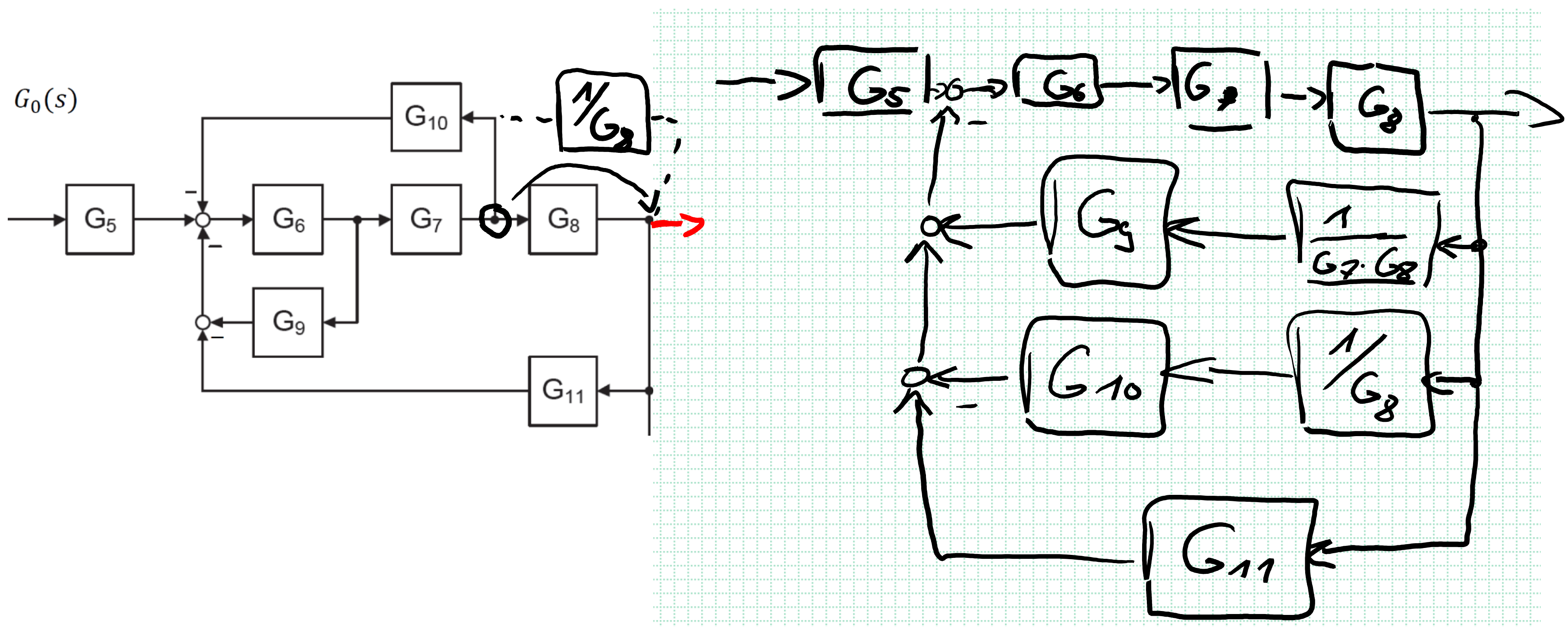
$$G_5 = K \;\; ; \;\; G_6 = \frac{2}{s+1} \;\; ; \;\; G_7 = G_8 = \frac{1}{s} \;\; ; \;\; G_9 = 2 \;\; ; \;\; G_{10} = 3 \;\; ;$$
$$G_{11} = G_{12} = \frac{1}{s+2}$$

Aufgaben: a) Fassen Sie das in dem roten Kasten dargestellte Übertragungssystem zu einer doppelbruchfreien Übertragungsfunktion $G_0(s)$ zusammen.

b) Prüfen Sie mit ob die Übertragungsfunktion $G_0(s)$ stabil ist.

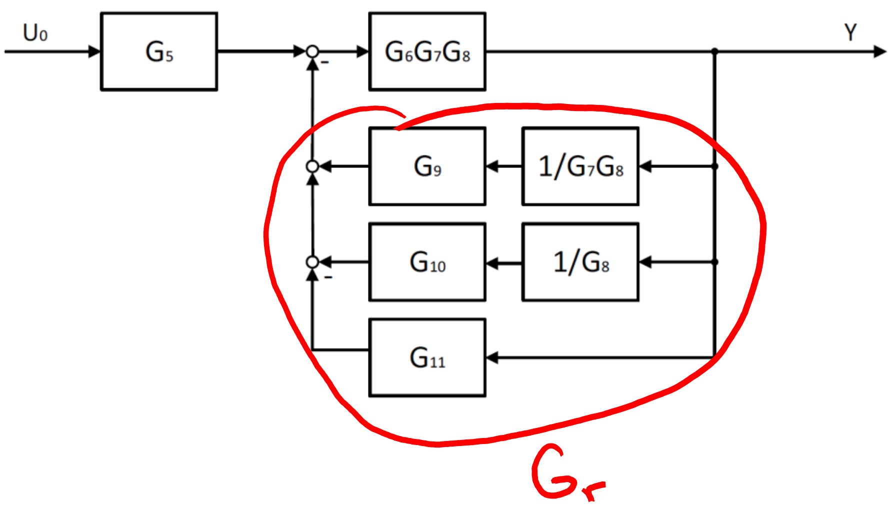
Aufgabe 9.1: Reglerentwurf nach Ziegler-Nichols

Aufgaben: a) Fassen Sie das in dem roten Kasten dargestellte Übertragungssystem zu einer doppelbruchfreien Übertragungsfunktion $G_0(s)$ zusammen.

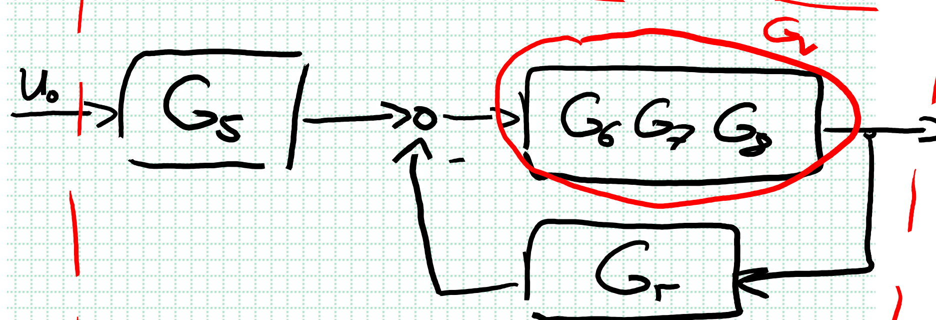


Aufgabe 9.1: Reglerentwurf nach Ziegler-Nichols

Aufgaben: a) Fassen Sie das in dem roten Kasten dargestellte Übertragungssystem zu einer doppelbruchfreien Übertragungsfunktion $G_0(s)$ zusammen.



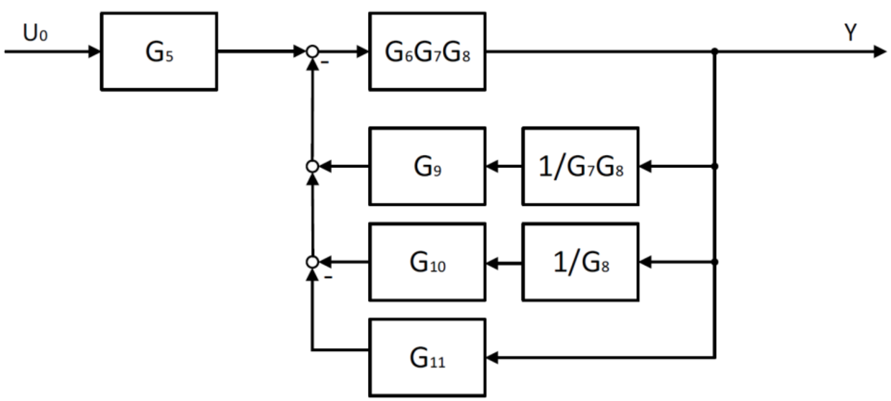
$$G_r = \frac{G_9}{G_7 \cdot G_8} + \frac{G_{10}}{G_8} - G_{11}$$



$$G_0 = G_5 \cdot \frac{G_v}{1 + G_v G_r}$$

Aufgabe 9.1: Reglerentwurf nach Ziegler-Nichols

Aufgaben: a) Fassen Sie das in dem roten Kasten dargestellte Übertragungssystem zu einer doppelbruchfreien Übertragungsfunktion $G_0(s)$ zusammen.



$$G_0 = G_5 \cdot \frac{\overbrace{G_6 G_7 G_8}^{G_v}}{1 + G_6 G_7 G_8 (*)}$$

$$* \left(\frac{G_9}{G_7 G_8} + \frac{G_{10}}{G_8} - G_{11} \right)$$

$$\boxed{G_0 = \frac{G_5 G_6 G_7 G_8}{1 + G_6 G_9 + G_6 \cdot G_7 G_{10} - G_6 G_7 G_8 G_{11}}}$$

Aufgabe 9.1: Reglerentwurf nach Ziegler-Nichols

Aufgaben: b) Prüfen Sie mit ob die Übertragungsfunktion $G_0(s)$ stabil ist.

$$G_0 = \frac{2K(s+2)}{s^4 + 7s^3 + 16s^2 + 12s \underline{-2}}$$

not Bed nicht erfüllt $\longrightarrow$ $\underline{\underline{\text{instabil}}}$

Aufgabe 9.1: Reglerentwurf nach Ziegler-Nichols

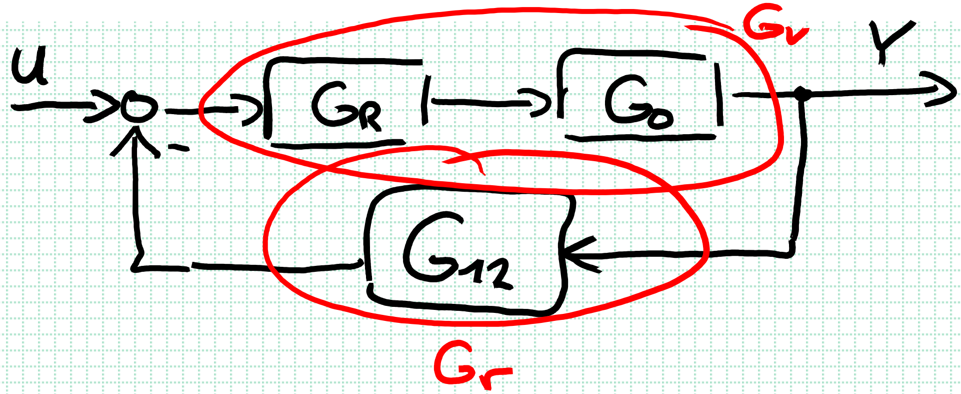
Das System $G_0(s)$ wird nun mit einem Regler $G_R(s)$ geregelt. Zusätzlich ist zur Betrachtung des Sensorverhaltens die Übertragungsfunktion $G_{12}(s)$ in der Rückführung enthalten.

Aufgaben: c) Stellen Sie die Gesamtübertragungsfunktion $\boxed{G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}}$ in doppelbruchfreier Form in Abhängigkeit von $G_R(s)$ auf

d) Ist das System mit einem P-Regler $G_R(s) = K_R$ für ein $K > 0$ stabilisierbar? Falls ja, bestimmen sie mit Hilfe des Hurwitz-Kriteriums den Bereich für K_R in Abhängigkeit von K, für den der geschlossene Regelkreis asymptotisch stabil ist.

Aufgabe 9.1: Reglerentwurf nach Ziegler-Nichols

Aufgaben: c) Stellen Sie die Gesamtübertragungsfunktion $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$ in doppelbruchfreier Form in Abhängigkeit von $G_R(s)$ auf



$$G = \frac{Y}{u} = \frac{G_v}{1 + G_v G_r}$$

$$1 + G_v G_R = 1 + \frac{2K\, G_R}{s^4 + 7s^3 + 16s^2 + 12s - 2} = \frac{s^4 + 7s^3 + 16s^2 + 12s - 2 + 2KG_R}{s^4 + 7s^3 + 16s^2 + 12s - 2}$$

Aufgabe 9.1: Reglerentwurf nach Ziegler-Nichols

Aufgaben: c) Stellen Sie die Gesamtübertragungsfunktion $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$ in doppelbruchfreier Form in Abhängigkeit von $G_R(s)$ auf

$$G = \frac{2K\,G_R(s+2)}{\cancel{s^4+7s^3+16s^2+12s-2}} \cdot \frac{\cancel{s^4+7s^3+16s^2+12s-2}}{s^4+7s^3+16s^2+12s-2+2K\,G_R}$$

$$= \frac{2K\,G_R(s+2)}{s^4+7s^3+16s^2+12s-2+2K\,G_R}$$

Aufgabe 9.1: Reglerentwurf nach Ziegler-Nichols

Aufgaben: d) Ist das System mit einem P-Regler $G_R(s) = K_R$ für ein $K > 0$ stabilisierbar? Falls ja, bestimmen sie mit Hilfe des Hurwitz-Kriteriums den Bereich für K_R in Abhängigkeit von K, für den der geschlossene Regelkreis asymptotisch stabil ist.

$K > 0$

$$N(s) = s^4 + 7s^3 + 16s^2 + 12s \underbrace{-2 + 2 K K_R}_{a_0}$$

$$a_0 \overset{!}{>} 0 \implies -2 + 2KK_R > 0$$

$$-2 + 2KK_R = 0$$

$$\cancel{2}KK_R = \cancel{2}$$

$$K_R = \frac{1}{K}$$

$$\boxed{K_R > \frac{1}{K}}$$

Aufgabe 9.1: Reglerentwurf nach Ziegler-Nichols

Aufgaben: d) Ist das System mit einem P-Regler $G_R(s) = K_R$ für ein $K > 0$ stabilisierbar? Falls ja, bestimmen sie mit Hilfe des Hurwitz-Kriteriums den Bereich für K_R in Abhängigkeit von K, für den der geschlossene Regelkreis asymptotisch stabil ist.

$$H_1 = a_3 = 7 > 0$$

$$H_2 \overset{\det}{=} \begin{vmatrix} 7 & 12 \\ 1 & 16 \end{vmatrix} = 100 > 0$$

$$H_3 = \det \begin{vmatrix} 7 & 12 & 0 \\ 1 & 16 & -2+2KK_R \\ 0 & 7 & 12 \end{vmatrix} = 1344 - 144 + 98 - 98KK_R > 0$$

$$K_R < \frac{13{,}25}{K}$$

$$\boxed{\frac{1}{K} < K_R < \frac{13{,}25}{K}}$$

K_R so wählbar, das System stabil ist

Aufgabe 9.1: Reglerentwurf nach Ziegler-Nichols

Aufgaben: e) Das System $G(s)$ wird nun mit einem $K_R = 12$ geregelt und mit einem Einheitssprung $u(t) = 1(t)$ beaufschlagt. Es stellt sich ein stationärer Endwert von $y_\infty = 12$ ein. Bestimmen Sie K.

$$G(s) = \frac{24K(s+2)}{s^4 + 7s^3 + 16s^2 + 12s - 2 + 24K}$$

$$H(s) = \underbrace{\frac{1}{s}}_{\text{Einheitsspr.}} \, G(s)$$

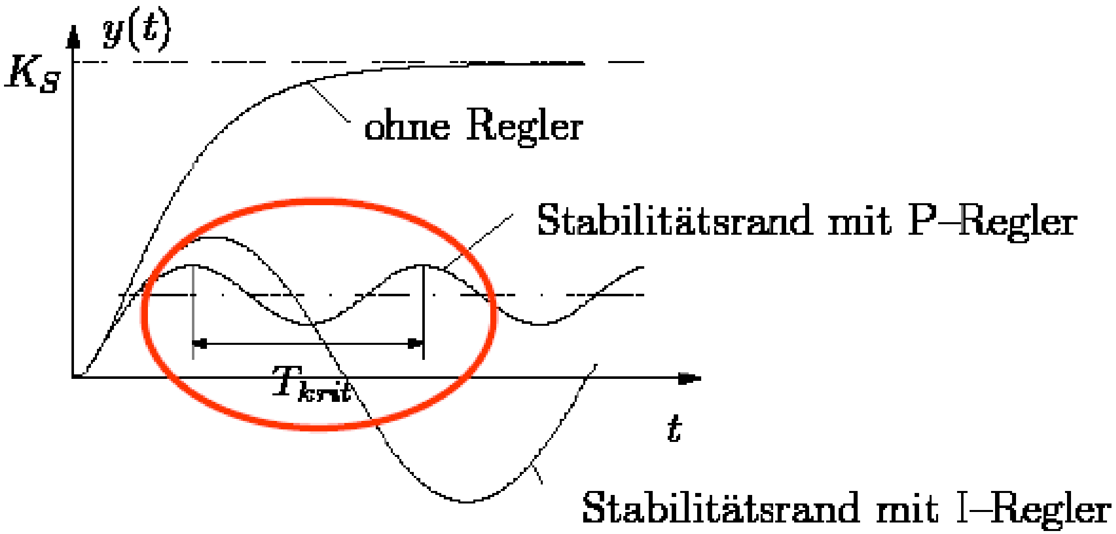
$$y_\infty = \lim_{t \to \infty} h(t) = \lim_{s \to 0} s\, H(s) = \underline{\underline{\lim_{s \to 0} G(s)}}$$

$$y_\infty = \frac{48K}{-2 + 24K} = 12 \quad \Rightarrow K = \frac{1}{10}$$

Mit $K = \frac{1}{10}$: $\boxed{10 < K_R < 132{,}5} \longrightarrow K_R = 12$ ist stabil

Reglerentwurf nach Ziegler & Nichols

- Auch unter Methode des Stabilitätsrands bekannt
- System wird mit einem P-Regler geschlossen und die Reglerverstärkung so lange erhöht, bis das System Dauerschwingungen ausführt (Stabilitätsrand)



Reglerentwurf nach Ziegler & Nichols

- Die dafür notwendige Reglerverstärkung wird K_{krit} genannt
- Die Periodendauer der Dauerschwingung wird mit T_{krit} bezeichnet

- Ermittlung der Reglerparameter aus folgender Tabelle:

	Reglertypen	Reglereinstellwerte K_R	T_I	T_D
Methode I	P	$0{,}5\ K_{Rkrit}$	-	-
	PI	$0{,}45\ K_{Rkrit}$	$0{,}85\ T_{krit}$	-
	PID	$0{,}6\ K_{Rkrit}$	$0{,}5\ T_{krit}$	$0{,}12\ T_{krit}$

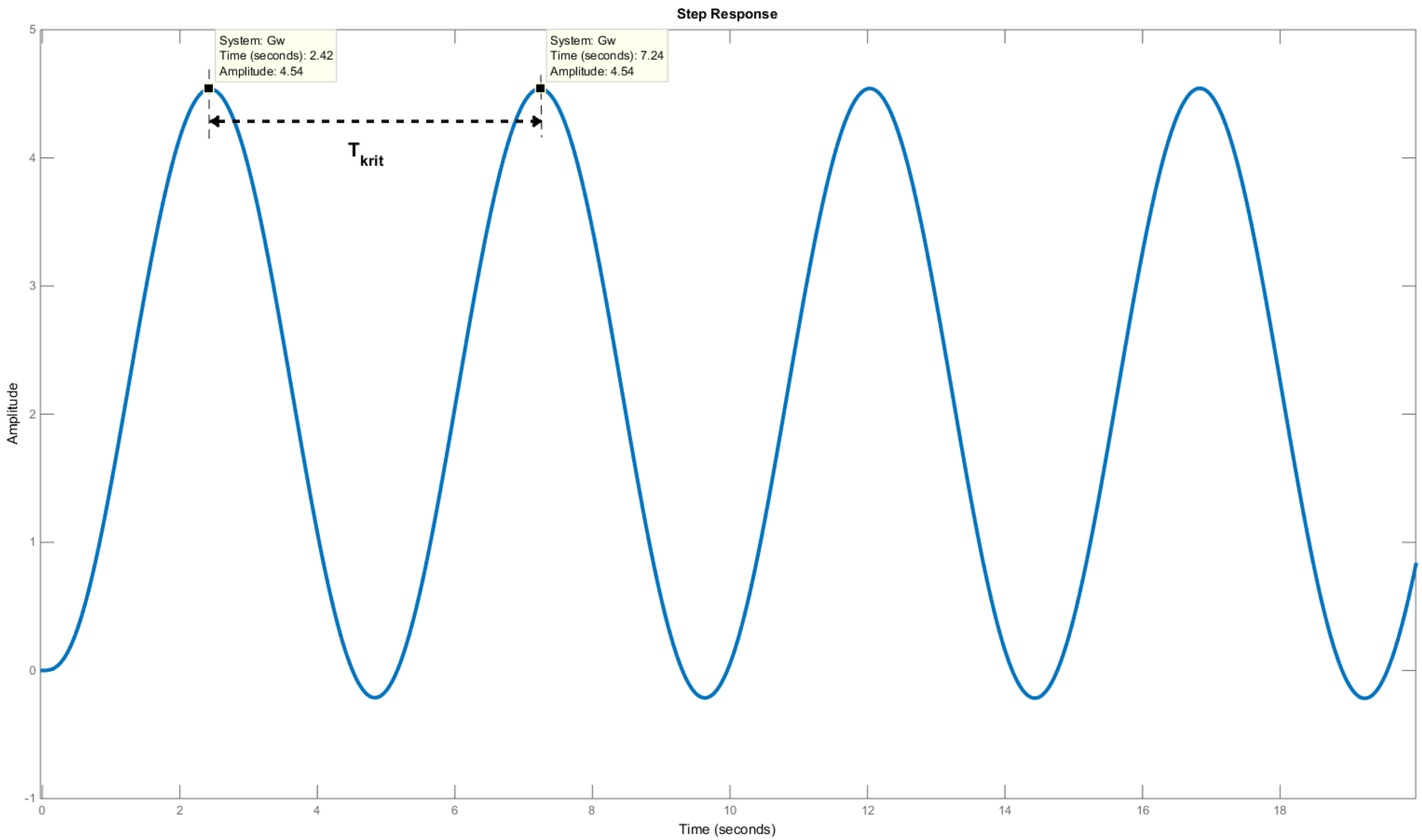
Aufgabe 9.1: Reglerentwurf nach Ziegler-Nichols

Aufgaben: f) Der Regler $G_R(s)$ soll nun mit dem Verfahren nach Ziegler-Nichols ausgelegt werden. Hierbei sollen sowohl ein P- als auch PI- Regler entworfen werden.

Bei einem Schwingversuch wurde an der oberen Stabilitätsgrenze eine Periodendauer von $T_{krit} = 5s$ gemessen.

Aufgabe 9.1: Reglerentwurf nach Ziegler-Nichols

Bestimmung der kritischen Zeitkonstante/Periodendauer:



Aufgabe 9.1: Reglerentwurf nach Ziegler-Nichols

Aufgaben: f) Der Regler $G_R(s)$ soll nun mit dem Verfahren nach Ziegler-Nichols ausgelegt werden. Hierbei sollen sowohl ein P- als auch PI-Regler entworfen werden.

	Reglertypen	Regl… K_R
Methode I	P	$0{,}5\ K_{Rkrit}$
	PI	$0{,}45\ K_{Rkrit}$
	PID	$0{,}6\ K_{Rkrit}$

P-Regler $\quad G_R = K_R$

$K_{krit} = 132{,}5$

$\Rightarrow \underline{\underline{K_R = 66{,}25}}$

Aufgabe 9.1: Reglerentwurf nach Ziegler-Nichols

Aufgaben: f) Der Regler $G_R(s)$ soll nun mit dem Verfahren nach Ziegler-Nichols ausgelegt werden. Hierbei sollen sowohl ein P- als auch PI-Regler entworfen werden.

	Reglertypen	Reglereinstellwe	
		K_R	$T_I = T_n$
Methode I	P	$0{,}5\ K_{Rkrit}$	-
	PI	$0{,}45\ K_{Rkrit}$	$0{,}85\ T_{krit}$
	PID	$0{,}6\ K_{Rkrit}$	$0{,}5\ T_{krit}$

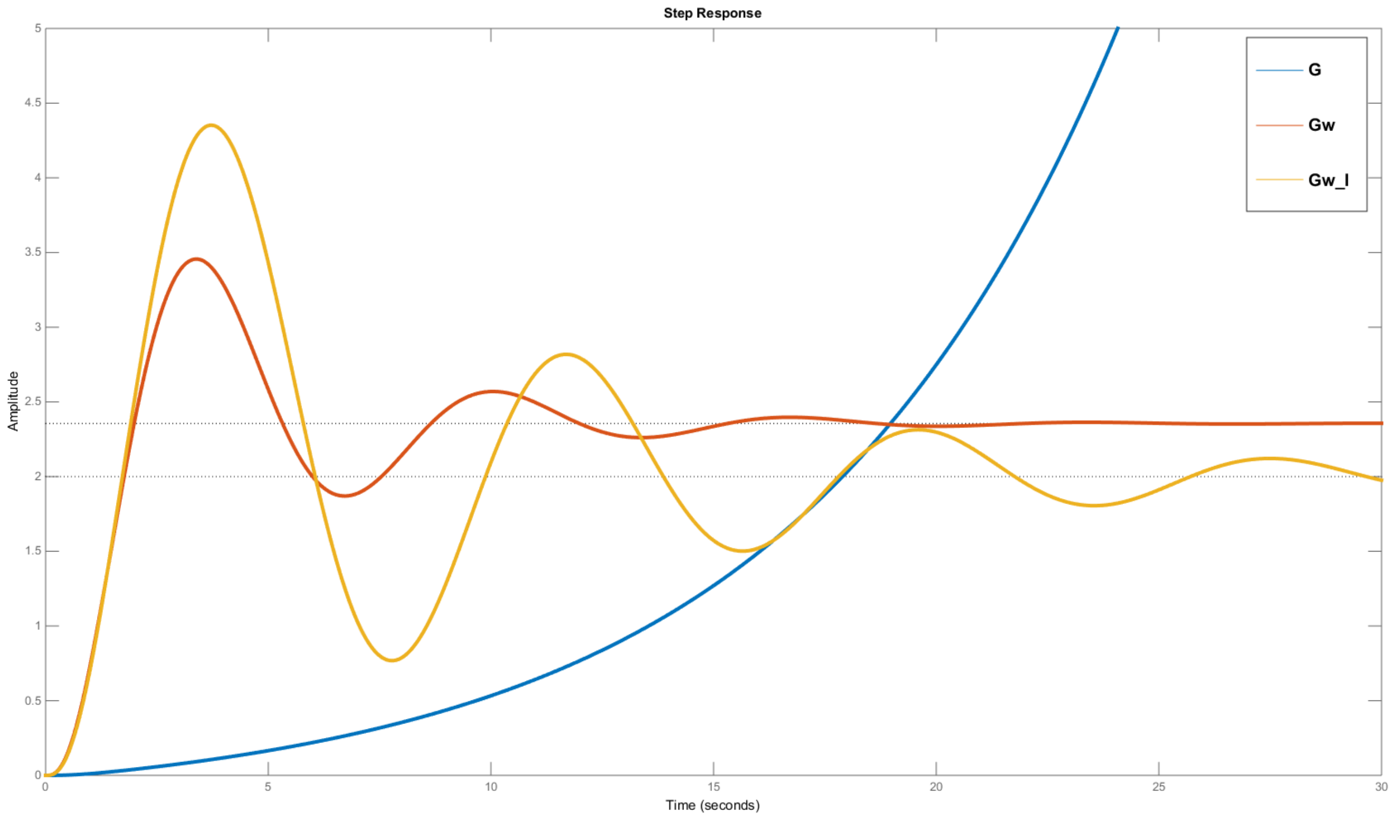
PI-Regler: $G_R = K_R\left(1 + \frac{1}{s T_n}\right)$

$$\boxed{\begin{aligned} K_R &= 59{,}625 \\ T_n &= 4{,}25 \end{aligned}}$$

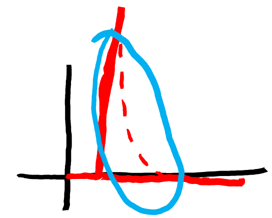
$$G_R = 59{,}625 \cdot \left(1 + \frac{1}{4{,}25 \cdot s}\right)$$

Aufgabe 9.1: Reglerentwurf nach Ziegler-Nichols

- Sprungantworten von $G_0(s)$ und $G(s)$ mit den beiden bestimmten Reglern



Aufgabe 9.2: Polstellen-Kompensation



Gegeben ist die folgende Regelstrecke (siehe 5. Übung)

$$G_S(s) = \frac{2}{(s+1)\cdot \underbrace{\left((s+\delta)^2+\omega_e^2\right)}_{(s+\delta+j\omega_e)(s+\delta-j\omega_e)}}$$

mit $\delta = 1/2$ und $\omega_e^2 = 15/4$.

Aufgaben: a) Kompensieren Sie das konjugiert komplexe Polpaar mit einem realisierbaren PID-Regler mit der parasitären Zeitkonstante $T = 1/8$ und geben Sie die Übertragungsfunktion $G_0(s)$ des resultierenden offenen Regelkreises an

$$G_R = K\left(1 + \frac{1}{s\cdot T_I} + \frac{s\cdot T_D}{1+sT}\right)$$

Aufgabe 9.2: Polstellen-Kompensation

Aufgaben: a) Kompensieren Sie das konjugiert komplexe Polpaar mit einem realisierbaren PID-Regler mit der parasitären Zeitkonstante $T = 1/8$ und geben Sie die Übertragungsfunktion $G_0(s)$ des resultierenden offenen Regelkreises an

$$G_R = K \frac{sT_I(1+sT) + (1+sT) + s^2 T_I T_D}{sT_I(1+sT)}$$

$$= K \frac{s^2 T_I (T_D + T) + s(T_I + T) + 1}{sT_I(1+sT)}$$

$$= K_R \frac{(s - s_{R1})(s - s_{R2})}{s\left(s + \frac{1}{T}\right)} \qquad K_R = K \cdot \frac{1}{T_I T}$$

Aufgabe 9.2: Polstellen-Kompensation

Aufgaben: a) Kompensieren Sie das konjugiert komplexe Polpaar mit einem realisierbaren PID-Regler mit der parasitären Zeitkonstante $T = 1/8$ und geben Sie die Übertragungsfunktion $G_0(s)$ des resultierenden offenen Regelkreises an

$$s_{R1/2} = -\underbrace{\frac{T_I + T}{2T_I(T_D+T)}}_{\delta} \pm \underbrace{\frac{\sqrt{(T_I-T)^2 - 4T_I T_D}}{2T_I(T_D+T)}}_{-\omega}$$

$$\left((s+\delta)^2 + \omega_e^2\right) = (s+\delta+j\omega_e)(s+\delta-j\omega_e) = (s-s_{R1})(s-s_{R2})$$

$$\delta_R = \frac{T_I + T}{2T_I(T_D+T)} \qquad \omega_R^2 = \frac{4T_I T_D - (T_I - T)^2}{4T_I^2(T_D+T)^2}$$

Aufgabe 9.2: Polstellen-Kompensation

Aufgaben: a) Kompensieren Sie das konjugiert komplexe Polpaar mit einem realisierbaren PID-Regler mit der parasitären Zeitkonstante $T = 1/8$ und geben Sie die Übertragungsfunktion $G_0(s)$ des resultierenden offenen Regelkreises an

$$G_R = K_R \cdot \frac{(s+\delta_R)^2 + \omega_R^2}{s\left(s+\frac{1}{T}\right)}$$

$$\left.\begin{aligned} \delta_R &= \delta \\ \omega_R &= \omega_e \end{aligned}\right\} \text{aus A.S}$$

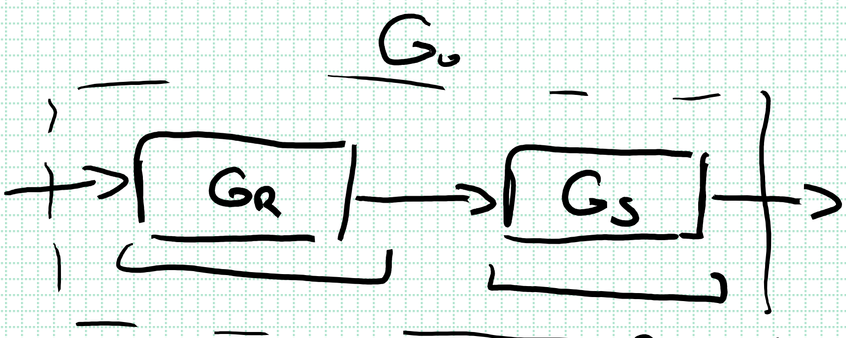
$$T_I = \frac{2\delta_R}{\delta_R^2 + \omega_R^2} - T = \underline{\underline{0{,}125}}$$

$$T_D = \frac{1}{2\delta_R - T(\delta_R^2 + \omega_R^2)} - T = \underline{1{,}875}$$

Aufgabe 9.2: Polstellen-Kompensation

Aufgaben: a) Kompensieren Sie das konjugiert komplexe Polpaar mit einem realisierbaren PID-Regler mit der parasitären Zeitkonstante $T = 1/8$ und geben Sie die Übertragungsfunktion $G_0(s)$ des resultierenden offenen Regelkreises an

$$G_0 = G_R \cdot G_S = K_R \frac{\cancel{(s+\delta_R)^2+\omega_R^2}}{s(s+\frac{1}{T})} \cdot \frac{2}{(s+1)(\cancel{(s+\delta)^2+\omega_e^2})}$$



$$G_S = \frac{2}{(s+1)\cdot((s+\delta)^2+\omega_e^2)}$$

$$\boxed{= \frac{2K_R}{s(s+1)(s+8)}}$$

Aufgabe 9.2: Polstellen-Kompensation

Gegeben ist die folgende Regelstrecke (siehe 5. Übung)

$$G_S(s) = \frac{2}{(s+1)\cdot\left((s+\delta)^2 + \omega_e^2\right)}$$

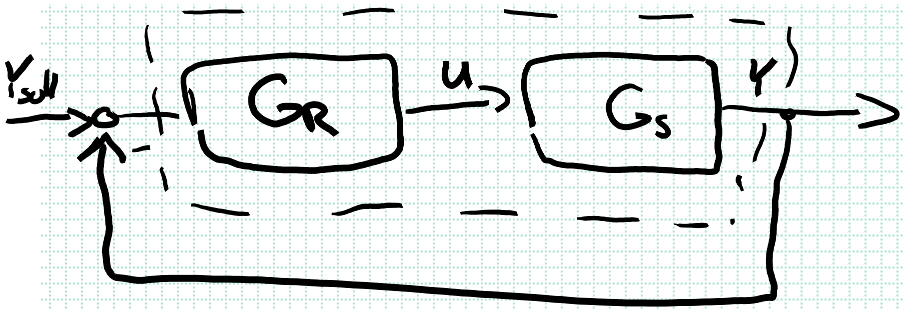
mit $\delta = 1/2$ und $\omega_e^2 = 15/4$.

Aufgaben: b) Berechnen Sie den stationären Endwert der Sprungantwort des geregelten Systems $G(s)$ mit Einheitsrückführung.

Beschreiben Sie, wie sich das Systemverhalten durch die Polstellen-Kompensation verändert. Was würde sich ändern, wenn anstatt des PID- nur ein P-Regler verwendet werden würde.

Aufgabe 9.2: Polstellen-Kompensation

Aufgaben: b) Berechnen Sie den stationären Endwert der Sprungantwort des geregelten Systems $G(s)$ mit Einheitsrückführung.



Standard-Regelkreis

$G_r = 1$; $G_v = G_0$

$$G(s) = \frac{G_0(s)}{1 + G_0(s)}$$

G_0 : offener Regelkreis

(offene Regelstrecke)

Aufgabe 9.2: Polstellen-Kompensation

Aufgaben: b) Berechnen Sie den stationären Endwert der Sprungantwort des geregelten Systems $G(s)$ mit Einheitsrückführung.

$$1+G_0 = 1 + \frac{2K_R}{s(s+1)(s+8)} = \frac{s(s+1)(s+8)+2K_R}{s(s+1)(s+8)}$$

$$G = \underbrace{\frac{2K_R}{\cancel{s(s+1)(s+8)}}}_{G_0} \cdot \frac{\cancel{s(s+1)(s+8)}}{s(s+1)(s+8)+2K_R} = \frac{2K_R}{s(s+1)(s+8)+2K_R}$$

$$= \frac{2K_R}{s^3+9s^2+8s+2K_R}$$

Aufgabe 9.2: Polstellen-Kompensation

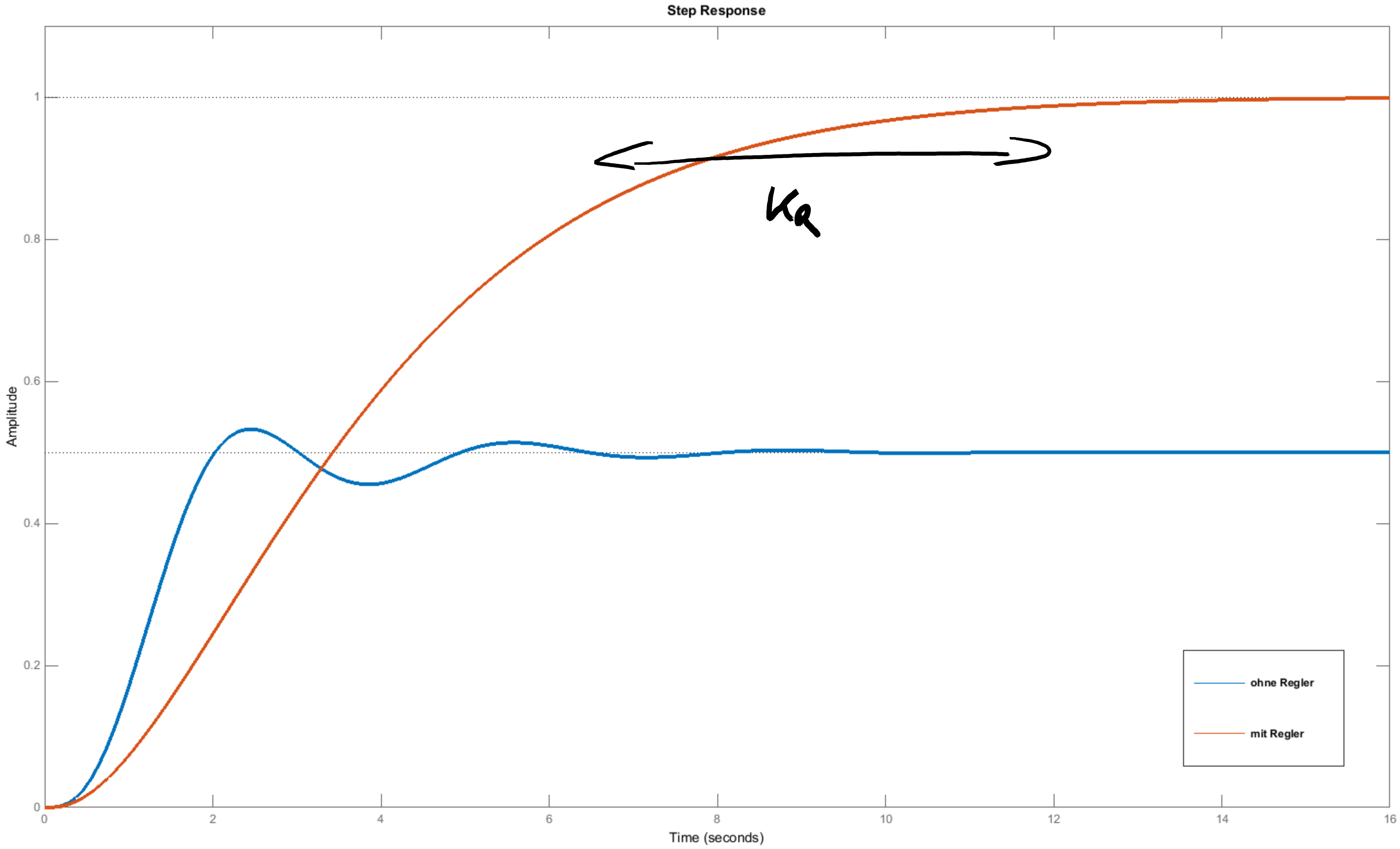
Aufgaben: b) Beschreiben Sie, wie sich das Systemverhalten durch die Polstellen-Kompensation verändert

$$\lim_{s \to 0} \cancel{s} \cdot G(s) \frac{1}{\cancel{s}} = \lim_{s \to 0} \frac{2K_R}{s^3 + 9s^2 + 8s + 2K_R} = \frac{2K_R}{2K_R} = 1$$

stationärer Genauigkeit

$$\lim_{s \to 0} \cancel{s} \, G_s(s) \frac{1}{\cancel{s}} = \lim_{s \to 0} \frac{2}{(s+1)\left((s+\frac{1}{2})^2 + \frac{15}{4}\right)} = 0{,}5$$

Sprungantworten des geregelten und ungeregeltem Systems (PID)

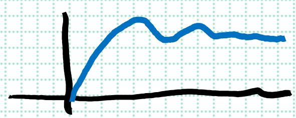


Aufgabe 9.2: Polstellen-Kompensation

Aufgaben: b) Beschreiben Sie, wie sich das Systemverhalten durch die Polstellen-Kompensation verändert

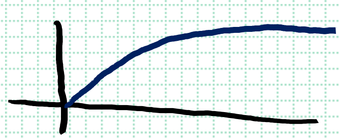
<u>ungeregelt</u>

- nicht stationär genau (Eingang 1 → Ausgang 0,5)
- schwingendes System



<u>geregelt</u>

- stationär genau (Eingang 1 → Ausgang 1) → I-Anteil im Regler bei Einheitsrückführung
- aperiodisches System



Aufgabe 9.2: Polstellen-Kompensation

Aufgaben: b) Was würde sich ändern, wenn anstatt des PID- nur ein P-Regler verwendet werden würde.

$$G_R = K_R$$

$$G_0 = \frac{2K_R}{(s+1)\cdot\left((s+\delta)^2 + \omega_e^2\right)} \qquad G = \frac{G_0}{1+G_0}$$

$$G(s) = \frac{2K_R}{s^3 + 2s^2 + 5s + 4 + 2K_R}$$

$$\lim_{s\to 0} \cancel{s}\cdot G(s)\cdot \frac{1}{\cancel{s}} = \ldots = \frac{K_R}{2+K_R}$$

Sprungantworten des geregelten und ungeregeltem Systems (P)