5. Übung zur Vorlesung „Steuer- und Regelungstechnik“

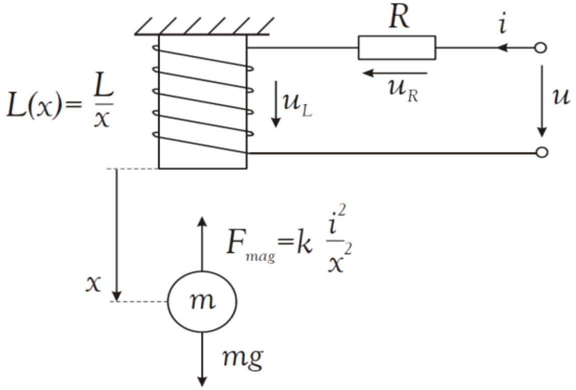
Anwendungen der Laplace-Transformation

Felix Goßmann M.Sc.

Institut für Steuer- und Regelungstechnik
Fakultät für Luft- und Raumfahrttechnik
Universität der Bundeswehr München

Aufgabe 5.1: Elektrischer Hubmagnet

Gegeben sei das System des elektrischen Hubmagneten aus Übung 3.)



Es gelten die gleichen Angaben wie in Aufgaben 3.2). Außerdem sind aus der Aufgaben die folgenden linearisierten Differentialgleichungen in einer Ruhelage mit der konstanten Spannung $u_0 \geq 0$ bekannt:

$$\frac{\partial i}{\partial t} = k_{i,1} \cdot i + k_u \cdot u \quad (1)$$

$$\ddot{x} = k_x \cdot x - k_{i,2} \cdot i \quad (2)$$

Aufgabe 5.1: Elektrischer Hubmagnet

Gegeben sei das System des elektrischen Hubmagneten aus Übung 3.)

$$\frac{\partial i}{\partial t} = k_{i,1} \cdot i + k_u \cdot u \qquad (1)$$

$$\ddot{x} = k_x \cdot x - k_{i,2} \cdot i \qquad (2)$$

<u>Hinweis</u>: Die Δ wurden in der Gleichung aus Gründen der Übersichtlichkeit weggelassen

Aufgaben: a) Transformieren Sie die beiden Differentialgleichungen mit Hilfe der Laplace-Transformation in den Bildbereich

b) Geben Sie die vollständige Laplace-Transformierte des Systems mit dem Eingang $U(s)$ und dem Ausgang $Y(s)$ an

Aufgabe 5.1: Elektrischer Hubmagnet

Aufgabe: a) Transformieren Sie die beiden Differentialgleichungen mit Hilfe der Laplace-Transformation in den Bildbereich

$$\frac{\partial i}{\partial t} \circ\!\!-\!\!\bullet \; s \cdot I(s) - i_0$$

$$i(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \; I(s)$$

$$u(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \; U(s)$$

$$\frac{\partial i}{\partial t} = K_{i,1} \cdot i(t) + K_u \cdot u(t)$$

$$\longrightarrow \boxed{s \cdot I(s) - i_0 = K_{i,1} \cdot I(s) + K_u \cdot U(s)}$$

$$I(s) = \underbrace{\frac{K_u}{s - K_{i,1}}}_{\text{part Lösung}} U(s) + \underbrace{\frac{i_0}{s - K_{i,1}}}_{\text{homogene Lösung}}$$

Aufgabe 5.1: Elektrischer Hubmagnet

Aufgabe: a) Transformieren Sie die beiden Differentialgleichungen mit Hilfe der Laplace-Transformation in den Bildbereich

$$\ddot{x} \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; s^2 X(s) - s\cdot x_0 - x_0$$

$$x \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; X(s)$$

$$i \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; I(s)$$

$$s^2 X(s) - s\cdot x_0 - \dot{x}_0 = k_x \cdot X(s) - k_{i,2}\cdot I(s)$$

$$X(s)\left(s^2 - k_x\right) = s\cdot x_0 + \dot{x}_0 - k_{i,2}\, I(s)$$

$$X(s) = \underbrace{-\frac{k_{i,2}}{s^2-k_x}\cdot I(s)}_{\text{part. Lösung}} + \underbrace{\frac{s\cdot x_0+\dot{x}_0}{s^2-k_x}}_{\text{homogene Lösung}}$$

Aufgabe 5.1: Elektrischer Hubmagnet

Aufgabe: b) Geben Sie die vollständige Laplace-Transformierte des Systems mit dem Eingang $U(s)$ und dem Ausgang $Y(s)$ an

$= X(s)$

$$X(s) = \frac{s \cdot x_0 + x_0}{s^2 - K_x} - \frac{K_{i,2}}{s^2 - K_x}\left(\frac{K_4}{s - K_{i,1}} U(s) + \frac{i_0}{s - K_{i,1}} \right)$$

$\vdots$

$$= \underbrace{\frac{(s \cdot x_0 + \dot{x}_0)(s - K_{i,1}) - K_{i,2} i_0}{(s^2 - K_x)(s - K_{i,1})}}_{\text{Eigenverhalten aufg. Anfangsbed.}} + \underbrace{\frac{-K_{i,2} K_4}{(s^2 - K_x)(s - K_{i,1})}}_{G(s):\ \text{Übertragungsfunktion}} U(s)$$

Aufgabe 5.2: Anwendung der Laplace-Transformation

Gegeben ist die folgende Differentialgleichung

$$\dddot{y}(t) + 6 \cdot \ddot{y}(t) + 11 \cdot \dot{y}(t) + 6 \cdot y(t) = 2 \cdot u(t)$$

mit den Anfangswerten
$$y(t = 0) = y_0,$$
$$\dot{y}(t = 0) = \dot{y}_0,$$
$$\ddot{y}(t = 0) = \ddot{y}_0.$$

Aufgaben: a) Berechnen Sie die vollständige Laplace-Transformierte Y(s).

b) Teilen Sie die Laplace-Transformierte in die Übertragungsfunktion $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$ und dem Verhalten infolge der Anfangswerte auf.

Aufgabe 5.2: Anwendung der Laplace-Transformation

Aufgabe: a) Berechnen Sie die vollständige Laplace-Transformierte Y(s).

$$\dddot{y}(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \; s^3\, Y(s) - s^2 y_0 - s\dot{y}_0 - \dot{y}_0$$

$$\ddot{y}(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \; s^2 \cdot Y(s) - s y_0 - \dot{y}_0$$

$$\dot{y}(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \; s \cdot Y(s) - y_0$$

$$y(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \; Y(s)$$

$$u(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \; U(s)$$

Aufgabe 5.2: Anwendung der Laplace-Transformation

Aufgabe: b) Teilen Sie die Laplace-Transformierte in die Übertragungsfunktion $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$ und dem Verhalten infolge der Anfangswerte auf.

$$\left(s^3 Y(s) - s^2 y_0 - s\dot{y}_0 - \ddot{y}_0\right) + 6\left(s^2 Y(s) - s y_0 - \dot{y}_0\right) + 11\left(s Y(s) - y_0\right) + 6 Y(s)$$

$$= 2\,U(s)$$

$$Y(s)\left(s^3 + 6s^2 + 11s + 6\right) - s^2 y_0 - \left(\dot{y}_0 + 6y_0\right)s - \left(11y_0 + 6\dot{y}_0 + \ddot{y}_0\right)$$

$$= 2\,U(s)$$

Aufgabe 5.2: Anwendung der Laplace-Transformation

Aufgabe: b) Teilen Sie die Laplace-Transformierte in die Übertragungsfunktion $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$ und dem Verhalten infolge der Anfangswerte auf.

$$Y(s)\left(s^3+6s^2+11s+6\right) = 2U(s) + y_0 s^2 + (6\cdot y_0 + \dot{y}_0)s + (11y_0 + 6\dot{y}_0 + \ddot{y}_0)$$

$$\Leftrightarrow Y(s) = \underbrace{\frac{2}{s^3+6s^2+11s+6}}_{G(s)} U(s) + \underbrace{\frac{y_0 s^2 + (6y_0+\dot{y}_0)s + (11y_0+6\dot{y}_0+\ddot{y}_0)}{s^3+6s^2+11s+6}}_{\text{Anfangswerte}}$$

Superpositionsprinzip

Aufgabe 5.2: Anwendung der Laplace-Transformation

Gegeben ist die folgende Differentialgleichung

$$\dddot{y}(t) + 6 \cdot \ddot{y}(t) + 11 \cdot \dot{y}(t) + 6 \cdot y(t) = 2 \cdot u(t)$$

mit den Anfangswerten $y(t=0) = y_0$,
$\dot{y}(t=0) = \dot{y}_0$,
$\ddot{y}(t=0) = \ddot{y}_0$.

Aufgaben:

c) Berechnen sie die Lösungen der charakteristischen Gleichung. Gegeben ist eine Lösung $s_1 = -2$

d) Ermitteln Sie die Eigenbewegungen infolge der Anfangsbedingungen im Zeitbereich für:

$$\ddot{y}_0 = \dot{y}_0 = 0; \; y_0 = 1$$

Aufgabe 5.2: Anwendung der Laplace-Transformation

Aufgabe: c) Berechnen sie die Lösungen der charakteristischen Gleichung. Gegeben ist eine Lösung $s_1 = -2$

$$
\begin{aligned}
& s^3 + 6s^2 + 11s + 6 = \underbrace{(s+2)}\underbrace{(s^2 + 4s + 3)} \\
& -(s^3 + 2s^2) \\
& \quad 4s^2 + 11s \\
& \quad -(4s^2 + 8s) \\
& \qquad 3s + 6 \\
& \qquad -(3s + 6) \\
& \qquad\quad 0
\end{aligned}
$$

$$s^2 + 4s + 3 = 0$$

$$s = -\frac{4}{2} \pm \sqrt{\frac{16}{4} - 3}$$

$$= -2 \pm \sqrt{\frac{4}{4}}$$

$$s = -3 \quad \wedge \quad s = -1$$

$$(s^3 + 6s^2 + 11s + 6) = \underbrace{(s+1)(s+2)(s+3)}$$ $\rightarrow$ Eigenwerte d. DGL

Aufgabe 5.2: Anwendung der Laplace-Transformation

Aufgabe: d) Ermitteln Sie die Eigenbewegungen infolge der Anfangsbedingungen im Zeitbereich für: $\ddot{y}_0 = \dot{y}_0 = 0;\ y_0 = 1$

$$Y_A(s) = \frac{y_0 s^2 + (6y_0 + \dot{y}_0)s + (11y_0 + 6\dot{y}_0 + \ddot{y}_0)}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6} = \frac{s^2 + 6s + 11}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

3	$e^{-at} \cdot 1(t)$	$\frac{1}{s+a}$

$$\frac{s^2 + 6s + 11}{(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{s+3}$$

$$\frac{s^2 + 6s + 11}{(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{A(s+2)(s+3) + B(s+1)(s+3) + C(s+1)(s+2)}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

Zählergl.: $s^2 + 6s + 11 = A(s^2 + 5s + 6) + B(s^2 + 4s + 3) + C(s^2 + 3s + 2)$

Aufgabe 5.2: Anwendung der Laplace-Transformation

Aufgabe: d) Ermitteln Sie die Eigenbewegungen infolge der Anfangsbedingungen im Zeitbereich für: $\ddot{y}_0 = \dot{y}_0 = 0;\ y_0 = 1$

$$s^2 + 6s + 11 = A(s^2 + 5s + 6) + B(s^2 + 4s + 3) + C(s^2 + 3s + 2)$$

s^2: $1 = A + B + C$

s^1: $6 = 5A + 4B + 3C$

s^0: $11 = 6A + 3B + 2C$

Korrespondenz Nr. 3

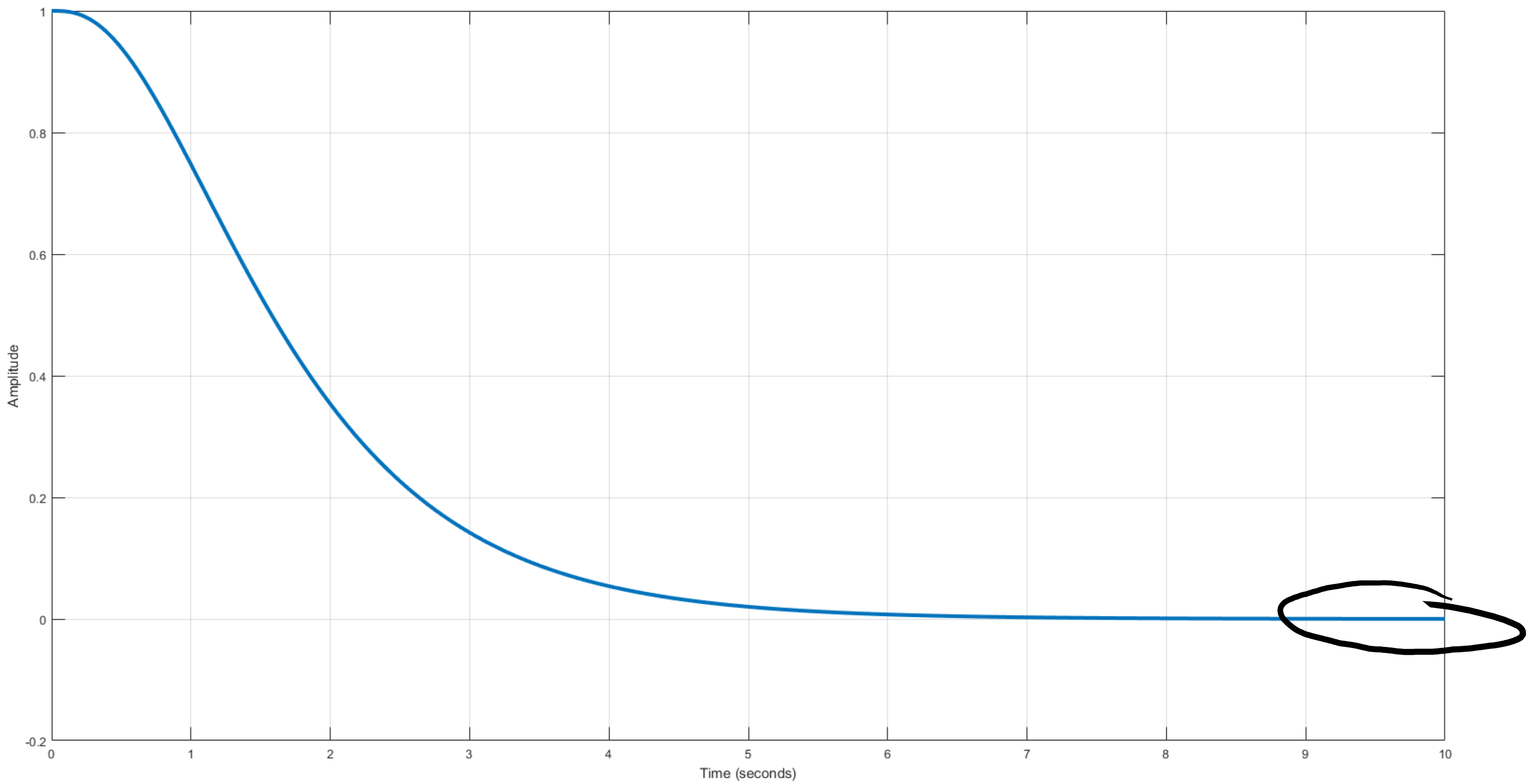
⋮

$A = 3, \quad B = -3; \quad C = 1$

$$Y_A = \frac{3}{s+1} - \frac{3}{s+2} + \frac{1}{s+3} \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad \boxed{y_A(t) = 3 \cdot e^{-t} - 3e^{-2t} + e^{-3t}}$$

Aufgabe 5.2: Anwendung der Laplace-Transformation

Eigenbewegung infolge der Anfangswerte:



Aufgabe 5.2: Anwendung der Laplace-Transformation

Gegeben ist die folgende Differentialgleichung

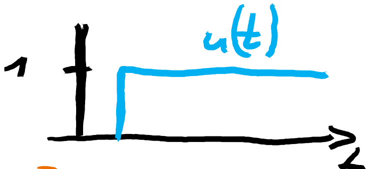
$$\dddot{y}(t) + 6 \cdot \ddot{y}(t) + 11 \cdot \dot{y}(t) + 6 \cdot y(t) = 2 \cdot u(t)$$

mit den Anfangswerten
$$y(t=0) = y_0,$$
$$\dot{y}(t=0) = \dot{y}_0,$$
$$\ddot{y}(t=0) = \ddot{y}_0.$$

Aufgaben:

e) Ermitteln Sie die Sprungantwort des Systems im Zeitbereich für das System im eingeschwungenen Zustand.
f) Berechnen sie den stationären Anfangs- und Endwert der in e) ermittelten Sprungantwort.

Einheitssprung



$\longrightarrow$ $y(t)$? Sprungantwort

$u(t) = 1(t)$

$\circ\!\!-\!\!\bullet$

$U(s) = \frac{1}{s}$

Aufgabe 5.2: Anwendung der Laplace-Transformation

Aufgabe: e) Ermitteln Sie die Sprungantwort des Systems im Zeitbereich für das System im eingeschwungenen Zustand. $Y_A(s) = 0$

$$Y(s) = \underbrace{\frac{2}{s^3+6s^2+11s+6}}_{\substack{\text{Übertragungsfkt.} \\ G(s)}} \cdot U(s) \qquad U(s) = \frac{1}{s}$$

1	$1(t)$	$\frac{1}{s}$
3	$e^{-at} \cdot 1(t)$	$\frac{1}{s+a}$

$$H(s) = G(s) \cdot \frac{1}{s} = \frac{2}{(s^3+6s^2+11s+6)s} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s+2} + \frac{D}{s+3}$$

Aufgabe 5.2: Anwendung der Laplace-Transformation

Aufgabe: e) Ermitteln Sie die Sprungantwort des Systems im Zeitbereich für das System im eingeschwungenen Zustand.

$$2 = A(s+1)(s+2)(s+3) + Bs(s+2)(s+3) + Cs(s+1)(s+3) + Ds(s+1)(s+2)$$

$s=0$: $2 = 6A \Rightarrow A = \frac{1}{3}$

$s=-1$: $2 = -2B \Rightarrow B = -1$

$s=-2$: $2 = 2C \Rightarrow C = 1$

$s=-3$: $2 = -6D \Rightarrow D = -\frac{1}{3}$

Aufgabe 5.2: Anwendung der Laplace-Transformation

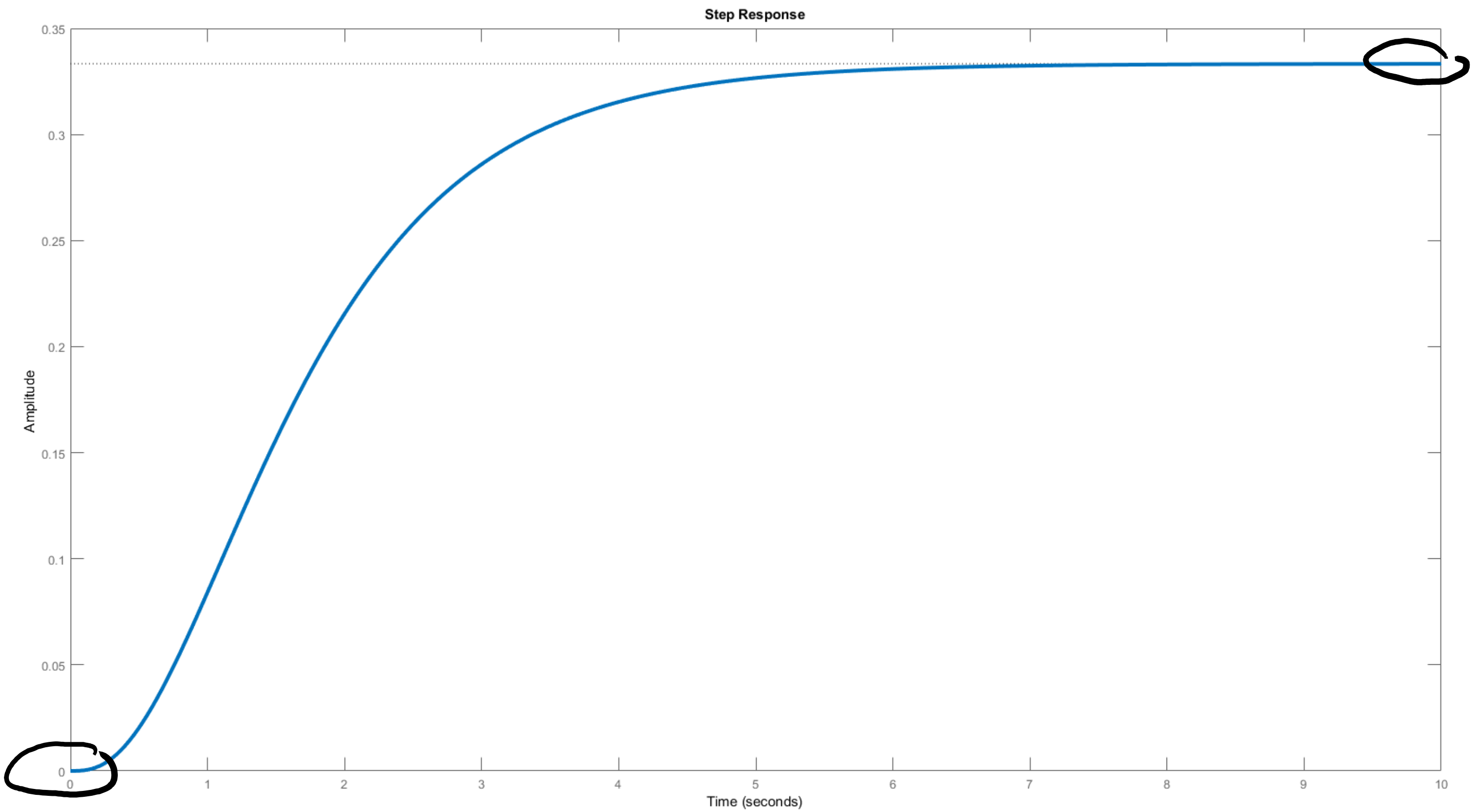
Aufgabe: e) Ermitteln Sie die Sprungantwort des Systems im Zeitbereich für das System im eingeschwungenen Zustand.

$$H(s) = \frac{1}{3}\,\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+2} - \frac{1}{3}\,\frac{1}{s+3}$$

$$\rightarrow \boxed{h(t) = \frac{1}{3} - e^{-t} + e^{-2t} - \frac{1}{3}e^{-3t}}$$

Aufgabe 5.1: Anwendung der Laplace-Transformation

Sprungantwort:



Aufgabe 5.2: Anwendung der Laplace-Transformation

Aufgabe: f) Berechnen sie den stationären Anfangs- und Endwert der in e) ermittelten Sprungantwort.

$$\lim_{t \to 0} f(t) = \lim_{s \to \infty} s \cdot F(s)$$ → stat. Anfangswertsatz

$$\lim_{s \to \infty} \cancel{s} \cdot \frac{2}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6} \cdot \frac{1}{\cancel{s}} = \lim_{s \to \infty} \frac{2/s^3}{1 + 6/s + 11/s^2 + 6/s^3} = 0$$

Aufgabe 5.2: Anwendung der Laplace-Transformation

Aufgabe: f) Berechnen sie den stationären Anfangs- und Endwert der in e) ermittelten Sprungantwort.

$$\lim_{t \to \infty} f(t) = \lim_{s \to 0} s \cdot F(s) \quad \rightarrow \text{stat. } \underline{\text{Endwertsatz}}$$

$$\lim_{s \to 0} \cancel{s} \cdot \frac{2}{\underbrace{s^3}_{\to 0} + \underbrace{6s^2}_{\to 0} + \underbrace{11s}_{\to 0} + 6} \cdot \frac{1}{\cancel{s}} = \frac{2}{6} = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$$

Die Regeln gelten nur für <u>stabile</u> Systeme