4. Übung zur Vorlesung „Steuer- und Regelungstechnik“

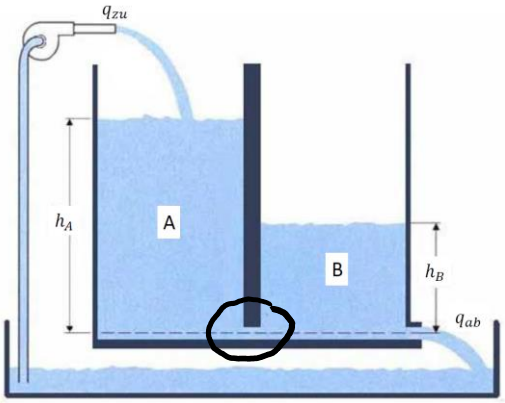
Linearisierung, Laplace-Transformation, Übertragungsfunktionen

Felix Goßmann M.Sc.

Institut für Steuer- und Regelungstechnik
Fakultät für Luft- und Raumfahrttechnik
Universität der Bundeswehr München

Aufgabe 4.1: Tankbehälter

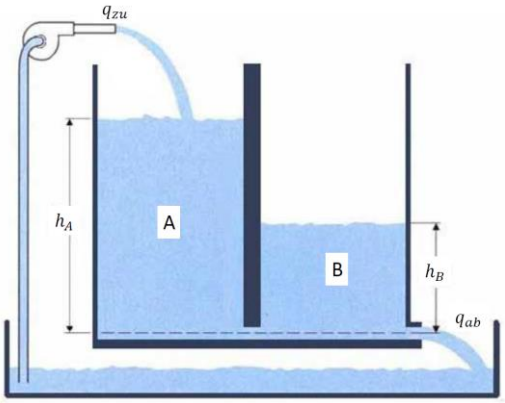
Gegeben ist der folgende Tankbehälter.



Er besteht aus den beiden baugleichen Zylindersäulen ***A*** und ***B*** mit einem konstanten Querschnitt Q. Der Behälter ***A*** wird durch den Zufluss q_{zu} gespeist und der Tankinhalt aus Behälter ***B*** fließt mit dem Volumenstrom q_{ab} ab. Die beiden zeitabhängigen Füllstände der Wassersäulen werden mit $h_A(t)$ und $h_B(t)$ bezeichnet.

Aufgabe 4.1: Tankbehälter

Gegeben ist der folgende Tankbehälter.



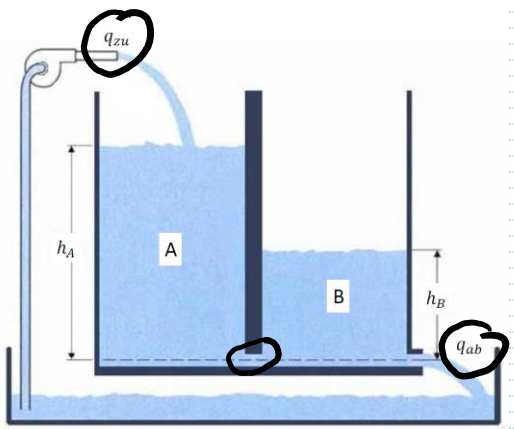
Aufgaben:

a) Bestimmen Sie die Differentialgleichungen, die die beiden Füllstände der Wassersäulen $h_A(t)$ und $h_B(t)$ beschreiben und linearisieren Sie diese um deren Ruhelage für einen konstanten Zufluss $q_{zu,0} \geq 0$.

b) Stellen Sie das linearisierte System in Form eines Blockschaltbildes dar.

Aufgabe 4.1: Tankbehälter

Aufgabe: a) Bestimmen Sie die Differentialgleichungen, die die beiden Füllstände der Wassersäulen $h_A(t)$ und $h_B(t)$ beschreiben und linearisieren Sie diese um deren Ruhelage für einen konstanten Zufluss $q_{zu,0} \geq 0$.



$$q_{ab,A} = q_{zu,B}$$

$$V(t) = Q\, h(t)$$

$$q_{ab,A} = a \cdot \sqrt{2g\,(h_A(t) - h_B(t))}$$

$$V(t) = q_{zu}(t) - q_{ab}(t)$$

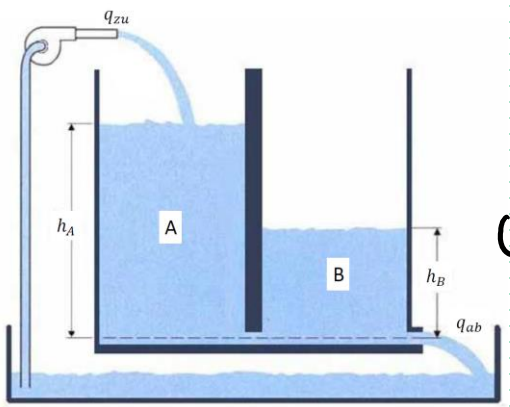
$$\dot{h}(t) = \frac{1}{Q}\,(q_{zu} - q_{ab})$$

$$q_{ab,B} = a \cdot \sqrt{2g\, h_B(t)}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{h}_A(t) &= \frac{1}{Q}\left[q_{zu} - a\sqrt{2g\,(h_A(t) - h_B(t))}\right] \\ \dot{h}_B(t) &= \frac{1}{Q}\left[a\sqrt{2g\,(h_A(t) - h_B(t))} - a\sqrt{2g\, h_B(t)}\right] \end{aligned}}$$

Aufgabe 4.1: Tankbehälter

Aufgabe: a) Bestimmen Sie die Differentialgleichungen, die die beiden Füllstände der Wassersäulen $h_A(t)$ und $h_B(t)$ beschreiben und linearisieren Sie diese um deren Ruhelage für einen konstanten Zufluss $q_{zu,0} \geq 0$.



Ruhelagen: $\dot{h}_A(t) = \dot{h}_B(t) = 0$

$$0 = q_{zu,0} - a\sqrt{2g(h_{A,0} - h_{B,0})} \qquad (1)$$

$$0 = a\sqrt{2g(h_{A,0} - h_{B,0})} - a\sqrt{2g\, h_{B,0}} \qquad (2)$$

(2): $h_{A,0} - h_{B,0} = h_{B,0} \iff \frac{1}{2} h_{A,0} = h_{B,0}$

(1): $q_{zu,0}^2 = 2a^2 g(h_{A,0} - h_{B,0})$

$\ldots \quad h_{B,0} = h_{A,0} - \frac{q_{zu,0}^2}{2a^2 g}$

Aufgabe 4.1: Tankbehälter

Aufgabe: a) Bestimmen Sie die Differentialgleichungen, die die beiden Füllstände der Wassersäulen $h_A(t)$ und $h_B(t)$ beschreiben und linearisieren Sie diese um deren Ruhelage für einen konstanten Zufluss $q_{zu,0} \geq 0$.

$$h_{A,0} = \frac{q_{zu,0}^2}{a^2 g} \qquad h_{B,0} = \frac{q_{zu,0}^2}{2 a^2 g}$$

$$0 = \frac{1}{Q} q_{zu} - \frac{a}{Q}\sqrt{2g(h_A - h_B)} - h_A \quad \hat{=} f$$

$$0 = \frac{1}{Q}(q_{zu,0} + \Delta q_{zu}) - \frac{a}{Q}\sqrt{2g\left[(h_{A,0} + \Delta h_A) - (h_{B,0} + \Delta h_B)\right]} - (h_{A,0} + \Delta h_A)$$

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x_0} \Delta x$$

Aufgabe 4.1: Tankbehälter

Aufgabe: a) Bestimmen Sie die Differentialgleichungen, die die beiden Füllstände der Wassersäulen $h_A(t)$ und $h_B(t)$ beschreiben und linearisieren Sie diese um deren Ruhelage für einen konstanten Zufluss $q_{zu,0} \geq 0$.

$$\left.\frac{\partial f}{\partial q_{zu}}\right|_0 = \frac{1}{Q} \qquad \left.\frac{\partial f}{\partial h_A}\right|_0 = -\frac{a \cdot g}{Q\sqrt{2g(h_{A,0}-h_{B,0})}}$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial h_B}\right|_0 = \frac{a \cdot g}{Q\sqrt{2g(h_{A,0}-h_{B,0})}} \qquad \left.\frac{\partial f}{\partial h_A}\right|_0 = -1$$

$$f(x_0) = \underline{\frac{1}{Q} q_{zu,0}} - \underbrace{\frac{a}{Q}\sqrt{2g(h_{A,0}-h_{B,0})}}_{\hookrightarrow \frac{a}{Q}\sqrt{2g\left(\frac{q_{zu,0}^2}{a^2 g} - \frac{q_{zu,0}^2}{2a^2 \cdot g}\right)} = \frac{a}{Q}\sqrt{\cancel{2}g\left(\frac{2q_{zu,0}^2 - q_{zu,0}^2}{\cancel{2}a^2 \cdot \cancel{g}}\right)}} - \cancel{h_{A,0}} \to 0$$

$$\frac{a}{Q}\sqrt{\frac{q_{zu,0}^2}{a^2}}$$

$$//$$

Aufgabe 4.1: Tankbehälter

Aufgabe: a) Bestimmen Sie die Differentialgleichungen, die die beiden Füllstände der Wassersäulen $h_A(t)$ und $h_B(t)$ beschreiben und linearisieren Sie diese um deren Ruhelage für einen konstanten Zufluss $q_{zu,0} \geq 0$.

$$0 = \underbrace{\frac{1}{Q}}_{k_q} \Delta q_{zu} \underbrace{- \frac{a \cdot g}{Q\sqrt{2g(h_{A,0} - h_{B,0})}}}_{k_{A,1}} \Delta h_A + \underbrace{\frac{a \cdot g}{Q\sqrt{2g(h_{A,0} - h_{B,0})}}}_{k_{A,2}} \Delta h_B - \Delta \dot{h}_A$$

$$\Leftrightarrow \quad \Delta \dot{h}_A = k_q \Delta q_{zu} + k_{A,1} \Delta h_A + k_{B,1} \Delta h_B$$

Aufgabe 4.1: Tankbehälter

Aufgabe: a) Bestimmen Sie die Differentialgleichungen, die die beiden Füllstände der Wassersäulen $h_A(t)$ und $h_B(t)$ beschreiben und linearisieren Sie diese um deren Ruhelage für einen konstanten Zufluss $q_{zu,0} \geq 0$.

$$h_B(t) = \frac{1}{Q}\left(a \cdot \sqrt{2g(h_A - h_B)} - a\sqrt{2g h_B}\right)$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial h_A}\right|_0 = \frac{a \cdot g}{\sqrt{2g(h_{A,0} - h_{B,0})}} = K_{h_{A,2}}$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial h_B}\right|_0 = -\frac{a \cdot g}{\sqrt{2g(h_{A,0} - h_{B,0})}} - \frac{a \cdot g}{\sqrt{2g h_{B,0}}} = K_{h_{B,2}}$$

Aufgabe 4.1: Tankbehälter

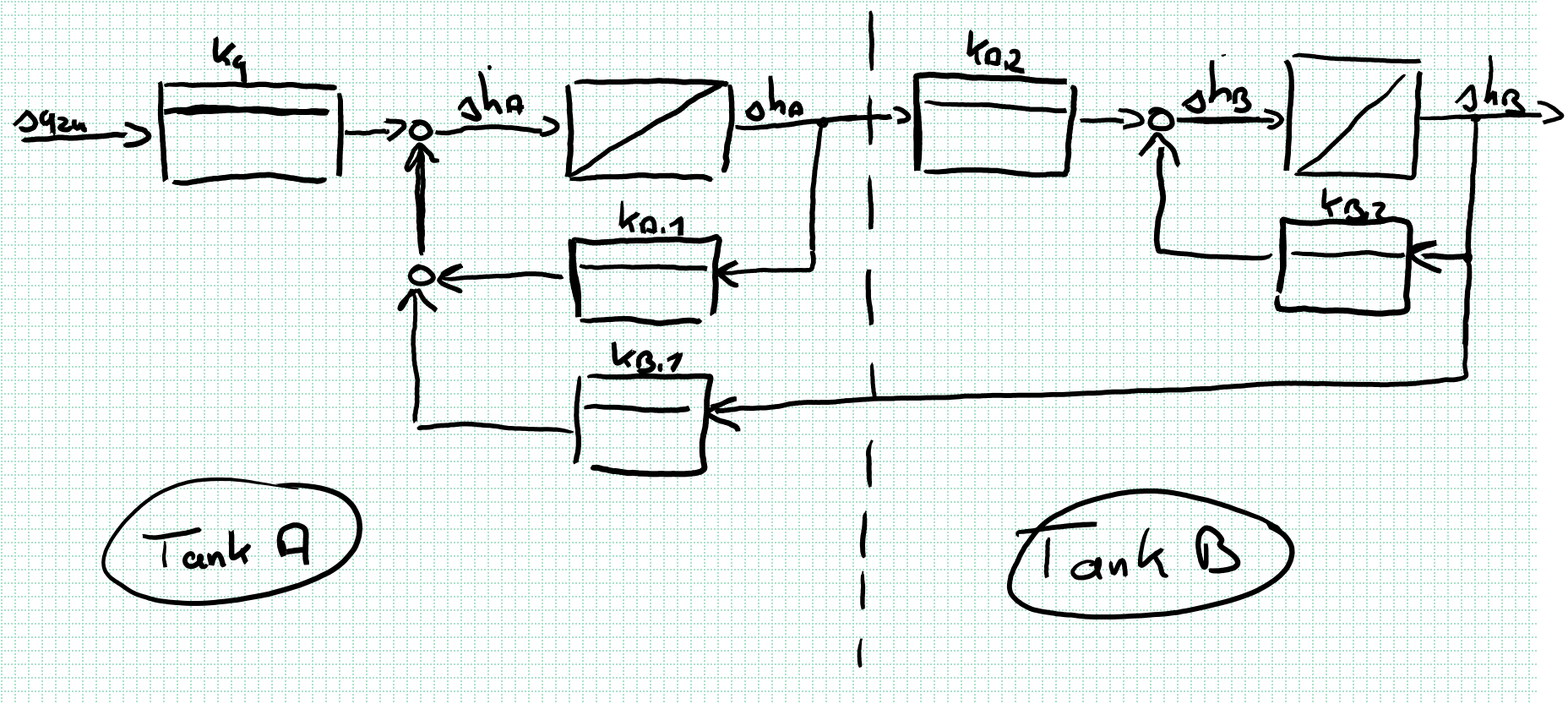
Aufgabe: a) Bestimmen Sie die Differentialgleichungen, die die beiden Füllstände der Wassersäulen $h_A(t)$ und $h_B(t)$ beschreiben und linearisieren Sie diese um deren Ruhelage für einen konstanten Zufluss $q_{zu,0} \geq 0$.

$$\Delta\dot{h}_B = \frac{1}{Q}\left(k_{h_{A,2}} \cdot \Delta h_A + k_{h_{B,2}} \cdot \Delta h_B\right)$$

$$= \underbrace{\frac{k_{h_{A,2}}}{Q}}_{k_{A,2}} \Delta h_A + \underbrace{\frac{k_{h,B2}}{Q}}_{k_{B,2}} \Delta h_B$$

Aufgabe 4.1: Tankbehälter

Aufgabe: b) Stellen Sie das linearisierte System in Form eines Blockschaltbildes dar.



Laplace-Transformation

- Ordnet einer Zeitfunktion $f(t)$ eine andere Funktion $F(s)$ im Bildbereich zu
- Eindeutig und umkehrbar
- Anwendbar bei **linearen** Differentialgleichungen
    - Konstante Koeffizienten
    - Vorgegebene Anfangswerte und Eingangsgrößen
    - $f(t) = 0$ für $t < 0$

- Differentiation und Integration gehen in algebraische Operationen über
- Abbilder von Differentialgleichungen ergeben algebraische Gleichungen
- Einfacheres Umformen und Verknüpfen

Transformation

- Zusammenhang zwischen Zeit- und Bildfunktion
- $F(s) = \int_0^\infty f(t) \cdot e^{-st} dt = \mathrm{L}\{f(t)\}$
- $f(t) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi j} \cdot \int_{\alpha - j\infty}^{\alpha + j\infty} F(s) \cdot e^{st} ds & \text{für } t \geq 0 \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases} = \mathrm{L}^{-1}\{f(t)\}$
- Komplexe Frequenz $s = \sigma + j\omega$ mit positivem Realteil
- s ist dimensionslos
- Schreibweise der Verknüpfung: $f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, F(s)$ bzw. $F(s) \bullet\!\!-\!\!\circ\, f(t)$

Anwendung der Transformation

- Bildfunktion des Einheitssprunges $f(t) = 1(t)$
- Anwendung der vorgestellten Transformation:

- $F(s) = \int_0^\infty 1(\mathrm{t}) \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{st}} \mathrm{dt} = \left[-\frac{1}{s} \cdot e^{-st}\right] = -\frac{1}{s}(0-1) = \frac{1}{s}$

- Bildfunktion der Exponentialfunktion $f(t) = e^{at}$

- $F(s) = \int_0^\infty e^{at} \cdot e^{-st} dt = \int_0^\infty e^{-t(s-a)} dt = \left[-\frac{1}{s-a} \cdot e^{-t(s-a)}\right] = \frac{1}{s-a}$

Laplace-Korrespondenzen

- Zahlreiche häufig vorkommende Funktionen liegen in Korrespondenztafeln vor
- Vereinfacht Anwendung in der Praxis, keine Transformation notwendig

Nr.	Zeitfunktion	Transformierte
1	$1(t)$	$\frac{1}{s}$
2	$t^n \cdot 1(t)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
3	$e^{-at} \cdot 1(t)$	$\frac{1}{s+a}$
4	$\frac{1}{T} e^{-\frac{t}{T}} \cdot 1(t)$	$\frac{1}{1+sT}$
5	$\frac{1}{a}\left(1-e^{-at}\right) \cdot 1(t)$	$\frac{1}{s(s+a)}$
6	$\left(1-e^{-t/T}\right) \cdot 1(t)$	$\frac{1}{s(1+sT)}$
7	$\frac{1}{b-a}\left(e^{-at}-e^{-bt}\right) \cdot 1(t)$	$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$

- Auszug
- Vollständige Tabelle im Skript S.123-125
- Hilfsblatt auf Homepage

Eigenschaften der Laplace-Transformation

- <u>Linearität</u>: $a \cdot f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, a \cdot F(s)$; $a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, a_1 F_1(s) + a_2 F_2(s)$

- <u>Verschiebung</u>: $f(t - T_t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, F(s) \cdot e^{-sT_t} \quad (T_t \geq 0)$

- <u>Differentiation</u>:
$$\boxed{\begin{aligned} \dot{f}(t) &\circ\!\!-\!\!\bullet\, s \cdot F(s) - f(0) \\ \ddot{f}(t) &\circ\!\!-\!\!\bullet\, s^2 \cdot F(s) - s \cdot f(0) - \dot{f}(0) \\ f^{(n)}(t) &\circ\!\!-\!\!\bullet\, s^n \cdot F(s) - \textstyle\sum_{k=1}^{n} s^{n-k} \cdot f^{(k-1)}(0) \end{aligned}}$$

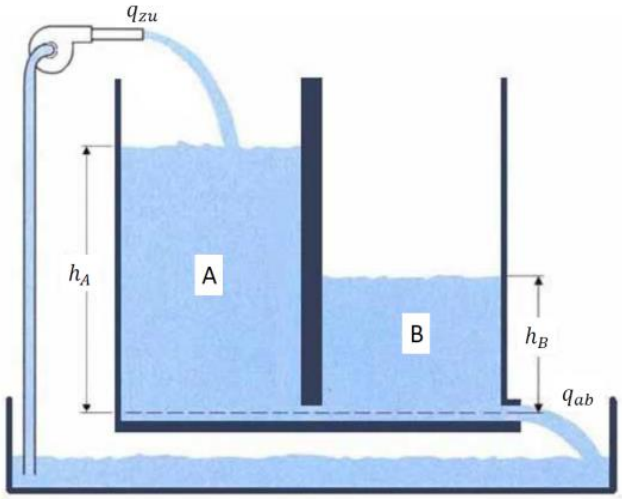
- <u>Integration</u>: $\int_0^t f(\tau) d\tau \circ\!\!-\!\!\bullet\, \frac{1}{s} \cdot F(s)$

- <u>Anfangswert</u>: $\lim\limits_{t \to 0} f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, \lim\limits_{s \to \infty} s \cdot F(s)$

- <u>Endwert</u>: $\lim\limits_{t \to \infty} f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, \lim\limits_{s \to 0} s \cdot F(s)$

Aufgabe 4.1: Tankbehälter

Betrachtet wird das bereits linearisierte Tankbehälter System



Aus den vorherige Aufgaben ist bekannt, dass die linearisierten Differentialgleichungen in der Ruhelage bei einem konstanten Zufluss $q_{zu,0} \geq 0$ die folgende Form haben:

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{h}_A &= k_q \cdot q_{zu} + k_{A,1} \cdot h_A + k_{B,1} \cdot h_B \quad (1) \\ \dot{h}_B &= k_{A,2} \cdot h_A + k_{B,2} \cdot h_B \quad (2) \end{aligned}}$$

Aufgabe 4.1: Tankbehälter

Betrachtet wird das bereits linearisierte Tankbehälter System

$$\dot{h}_A = k_q \cdot q_{zu} + k_{A,1} \cdot h_A + k_{B,1} \cdot h_B \qquad (1)$$
$$\dot{h}_B = k_{A,2} \cdot h_A + k_{B,2} \cdot h_B \qquad (2)$$

<u>Hinweis</u>: Die Δ wurden in der Gleichung aus Gründen der Übersichtlichkeit weggelassen

Aufgaben: a) Geben Sie eine Differentialgleichung an, die den Füllstand h_B in Abhängigkeit vom Zufluss q_{zu} beschreibt.

b) Transformieren Sie diese Differentialgleichung in den Laplace-Bereich unter der Annahme, dass keine zusätzliche Flüssigkeit in den Tank ***A*** fließt ($q_{zu} = 0$).

Aufgabe 4.1: Tankbehälter

Aufgabe: a) Geben Sie eine Differentialgleichung an, die den Füllstand h_B in Abhängigkeit vom Zufluss q_{zu} beschreibt.

$$\dot{h}_A = k_{A,2} \cdot h_A + k_{B,2} \cdot h_B$$

$$h_A = k_q \, q_{zu} + k_{A,1} h_A + k_{B,1} h_B$$

$$\dot{h}_B = k_{A,2} h_A + k_{B,2} h_B$$

$$\vdots$$

$$\ddot{h}_B = (k_{A,1} + k_{B,2}) \dot{h}_B + (k_{A,2} k_{B,1} - k_{A,1} k_{B,2}) h_B + k_{A,2} k_q q_{zu}$$

Aufgabe 4.1: Tankbehälter

Aufgabe: b) Transformieren Sie diese Differentialgleichung in den Laplace-Bereich unter der Annahme, dass keine zusätzliche Flüssigkeit in den Tank ***A*** fließt ($q_{zu} = 0$).

$$\ddot{h}_B(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\; s^2 \cdot H_B(s) - s \cdot h_{B,0} - \dot{h}_{B,0} \qquad q_{zu}(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\; Q_{zu}(s)$$

$$\dot{h}_B(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\; s\, H_B(s) - h_{B,0}$$

$$h_B(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\; H_B(s)$$

$$\Rightarrow \quad s^2 \cdot H_B(s) - s \cdot h_{B,0} - \dot{h}_{B,0} = (k_{A,1} + k_{B,2})(s\, H_B(s) - h_{B,0})$$

$$+ (k_{A,2} k_{B,1} - k_{A,1} k_{B,2})\, H_B(s) + \cancelto{0}{k_{A,2} k_q\, Q_{zu}(s)}$$

Aufgabe 4.1: Tankbehälter

Aufgabe: b) Transformieren Sie diese Differentialgleichung in den Laplace-Bereich unter der Annahme, dass keine zusätzliche Flüssigkeit in den Tank ***A*** fließt ($\underline{q_{zu} = 0}$).

$$H_B(s)\left[s^2 - (k_{A,1} + k_{B,2})s - (k_{A,2}k_{B,1} - k_{A,1}k_{B,2})\right] = (s - k_{A,1} - k_{B,2})h_{B,0} + h_{B,0}$$

$$\underline{H_B(s)} = \frac{(s - k_{A,1} - k_{B,2})h_{B,0} + h_{B,0}}{s^2 - (k_{A,1} + k_{B,2})s - (k_{A,2}k_{B,1} - k_{A,1}k_{B,2})}$$

Aufgabe 4.1: Tankbehälter

Betrachtet wird das bereits linearisierte Tankbehälter System

$$\dot{h}_A = k_q \cdot q_{zu} + k_{A,1} \cdot h_A + k_{B,1} \cdot h_B \qquad (1)$$
$$\dot{h}_B = k_{A,2} \cdot h_A + k_{B,2} \cdot h_B \qquad (2)$$

<u>Hinweis</u>: Die Δ wurden in der Gleichung aus Gründen der Übersichtlichkeit weggelassen

<u>Hinweis</u>: Im Folgenden gilt: $k_{A,1} = k_{B,1} = 1,\ k_{A,2} = k_{B,2} = -2,\ \ h_{A,0} = 2,\ h_{B,0} = 1$

Aufgaben: c) Bestimmen Sie den zeitlichen Verlauf des Füllstandes $h_B(t)$ der aus den gegebenen Anfangswerten für $h_{A,0}$ und $h_{B,0}$ resultiert.

Aufgabe 4.1: Tankbehälter

Aufgabe: b) Transformieren Sie diese Differentialgleichung in den Laplace-Bereich unter der Annahme, dass keine zusätzliche Flüssigkeit in den Tank ***A*** fließt ($q_{zu} = 0$).

$$\dot{h}_{A,0} = k_{A,2}\, h_{A,0} + k_{B,2}\, h_{B,0} = 3$$

$$H_0(s) = \frac{(s+2-1)\,1 + 3}{s^2 - (-2+1)s + (1\cdot(-2) - (-2)\,1)} = \frac{s+4}{s(s+1)}$$

Korrespondenz Nr. 11

11	$\left(\frac{a}{b} + \frac{b-a}{b}\cdot e^{-bt}\right)\cdot 1(t)$	$\frac{(s+a)}{s(s+b)}$

$$H_0(s)\ \frac{s+4}{s(s+1)} \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad h_0(t) = \frac{4}{1} - \frac{1-4}{1}\, e^{-1\cdot t} = 4 - 3\cdot e^{-t}$$

- **Übertragungsfunktion - Anwendung in der Regelungstechnik**

- Anwendung auf die bisher behandelten lin. Differentialgleichungen
- $a_n y^{(n)} + \cdots + a_2 \ddot{y} + a_1 \dot{y} + a_0 y = b_0 u + b_1 \dot{u} + \cdots + b_m u^{(m)} \;\; ; \; m \leq n$

- Anfangsbedingungen werden alle zu Null angenommen
- $y(0) = \dot{y}(0) = \ddot{y}(0) = \cdots = y^{(n)}(0) = 0$

- Anwendung des Differentiationssatzes:
- $[s^n a_n + \cdots + s^2 a_2 + s a_1 + a_o] \cdot Y(s) = [b_0 + s b_1 + \cdots + s^m b_m] \cdot U(s)$

- Verhältnis von Ein- und Ausgangsgrößen ergibt **Übertragungsfunktion**
- $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 + b_1 \cdot s + \cdots + b_m \cdot s^m}{a_0 + a_1 \cdot s + a_2 \cdot s^2 + \cdots + a_n \cdot s^n}$

Aufgabe 4.2: Lineare Übertragungsglieder

Gegeben sind die folgenden Differentialgleichungen:

- $T_1 \cdot \dot{y}(t) + y(t) = K \cdot u(t)$
- $\ddot{y}(t) + 2D\omega_0 \cdot \dot{y}(t) + \omega_0^2 \cdot y(t) = K \cdot u(t)$
- $T_1 \cdot \ddot{y}(t) + \dot{y}(t) = K \cdot u(t)$
- $T_1 \cdot \ddot{y}(t) + T_2 \cdot \dot{y}(t) + y(t) = K(u(t) + T_D \cdot \dot{u}(t))$

Aufgabe: Stellen Sie die Übertragungsfunktionen der vier Differentialgleichungen im eingeschwungenen Zustand mit Hilfe der Laplace-Transformation auf. Klassifizieren Sie anschließend deren Übertragungsverhalten.

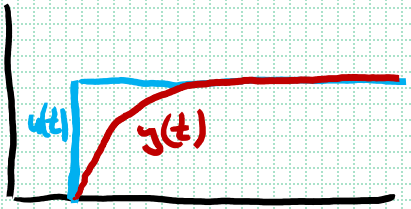
Aufgabe 4.2: Lineare Übertragungsglieder

Aufgabe: Stellen Sie die Übertragungsfunktionen der folgenden Differentialgleichung auf

$$T_1 \cdot \dot{y}(t) + y(t) = K \cdot u(t)$$

$$T_1 \cdot s\,Y(s) + Y(s) = K \cdot U(s) \quad \Leftrightarrow \quad Y(s)\left[T_1 \cdot s + 1\right] = K \cdot U(s)$$

$$\Rightarrow G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K}{T_1 s + 1} \quad \longrightarrow PT_1\text{-System}$$



Aufgabe 4.2: Lineare Übertragungsglieder

Aufgabe: Stellen Sie die Übertragungsfunktionen der folgenden Differentialgleichung auf

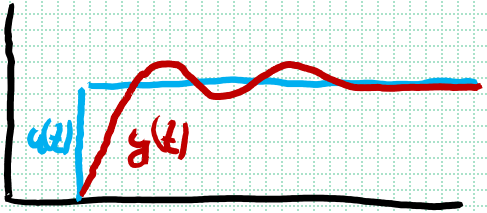
$$\ddot{y}(t) + 2D\omega_0 \cdot \dot{y}(t) + \omega_0^2 \cdot y(t) = K \cdot u(t)$$

$$s^2 \cdot Y(s) + 2D\omega_0 s \cdot Y(s) + \omega_0^2 \cdot Y(s) = K \cdot U(s)$$

$$Y(s)\left[s^2 + 2D\omega_0 \cdot s + \omega_0^2\right] = K\, U(s)$$

$$\rightarrow \quad G(s) = \frac{K}{s^2 + 2D\omega_0 s + \omega_0^2}$$

$\rightarrow$ PT_2 - System



Aufgabe 4.2: Lineare Übertragungsglieder

Aufgabe: Stellen Sie die Übertragungsfunktionen der folgenden Differentialgleichung auf

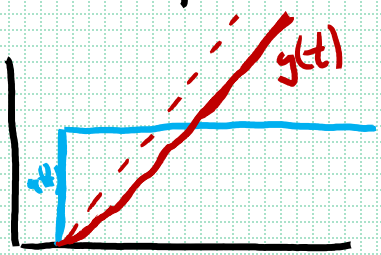
$$T_1 \cdot \ddot{y}(t) + \dot{y}(t) = K \cdot u(t)$$

$$T_1 s^2 \cdot Y(s) + s\, Y(s) = K \cdot U(s)$$

$$Y(s)\left[T_1 s^2 + s\right] = K \cdot U(s)$$

$$\rightarrow G(s) = \frac{K}{T_1 s^2 + s} = \underbrace{\frac{1}{s}}_{I} \cdot \underbrace{\frac{K}{T_1 s + 1}}_{PT_1}$$

$\rightarrow$ IT_1-Verhalten



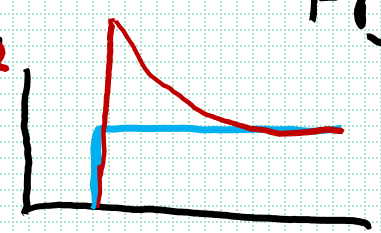
Aufgabe 4.2: Lineare Übertragungsglieder

Aufgabe: Stellen Sie die Übertragungsfunktionen der folgenden Differentialgleichung auf

$$T_1 \cdot \ddot{y}(t) + T_2 \cdot \dot{y}(t) + y(t) = K(u(t) + T_D \cdot \dot{u}(t))$$

$$T_1 s^2 Y(s) + T_2 \cdot s\, Y(s) + Y(s) = K\left(U(s) + T_D s\, U(s)\right)$$

$$Y(s)\left[T_1 s^2 + T_2 \cdot s + 1\right] = K \cdot U(s)\left[1 + T_D \cdot s\right]$$

$$G(s) = \frac{K(1 + T_D \cdot s)}{T_1 s^2 + T_2 s + 1} = \underbrace{\frac{K}{T_1 s^2 + T_2 s + 1}}_{PT_2} \cdot \underbrace{(1 + T_D s)}_{PD}$$

$$\Rightarrow PDT_2$$