3. Übung zur Vorlesung „Steuer- und Regelungstechnik“

Linearisierung

Felix Goßmann M.Sc.

Institut für Steuer- und Regelungstechnik
Fakultät für Luft- und Raumfahrttechnik
Universität der Bundeswehr München

Nichtlineare Differentialgleichungen

- Die Welt ist nichtlinear
- Sehr viele phys. und techn. Sachverhalte nur nichtlinear beschreibbar
  → siehe erste Übung

- Nichtlinearität in Systemtheorie: Ausgang nicht proportional zum Eingang
- Superpositionsprinzip gilt nicht

- Keine geschlossene mathematische Theorie und keine allgemeine Analyse-Methode

Nichtlineare Systeme in der Regelungstechnik

- Keine geschlossene Theorie vorhanden (im Gegensatz zu lin. Systemen)
- Es existieren Regelungsverfahren
  - Häufig nur in speziellen Fälle anwendbar
  - Verhalten kann nur für modellierte Gleichungen garantiert werden
  - Modellierungsfehler können sich fatal auswirken
  - Reale Anwendung daher häufig schwierig

- Versuch nichtlineare Systeme näherungsweise durch lineare Gleichungen zu approximieren
- Sehr viele technische System werden nur in Umgebung von Arbeitspunkten betrieben
- Lineare Approximation des Verhaltens im Bereich dieser Arbeitspunkt

Linearisierung

- Anwendung der Taylor-Reihenentwicklung
- Reihenansatz um glatte Funktionen in Umgebung eines Punktes durch Potenzreihe darzustellen

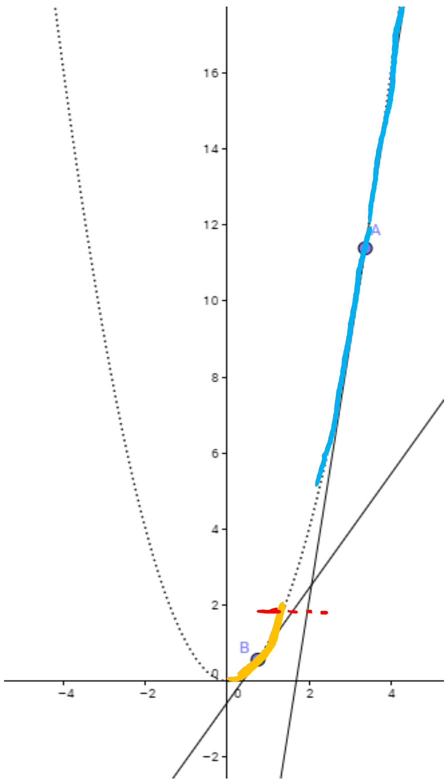
- Allgemeiner Ansatz im Punkt a: $Tf(x,a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot (x-a)^n$
- Bei Entwicklung bis $n = 1$ erhält man linearen Ausdruck
- Erhalt einer linearen Approximation der Umgebung von $x = a$

- $\boxed{T_1 f(x,a) = f(a) + f'(a) \cdot (x-a)}$

- Diese Näherung wird allgemein als Linearisierung bezeichnet

Linearisierung

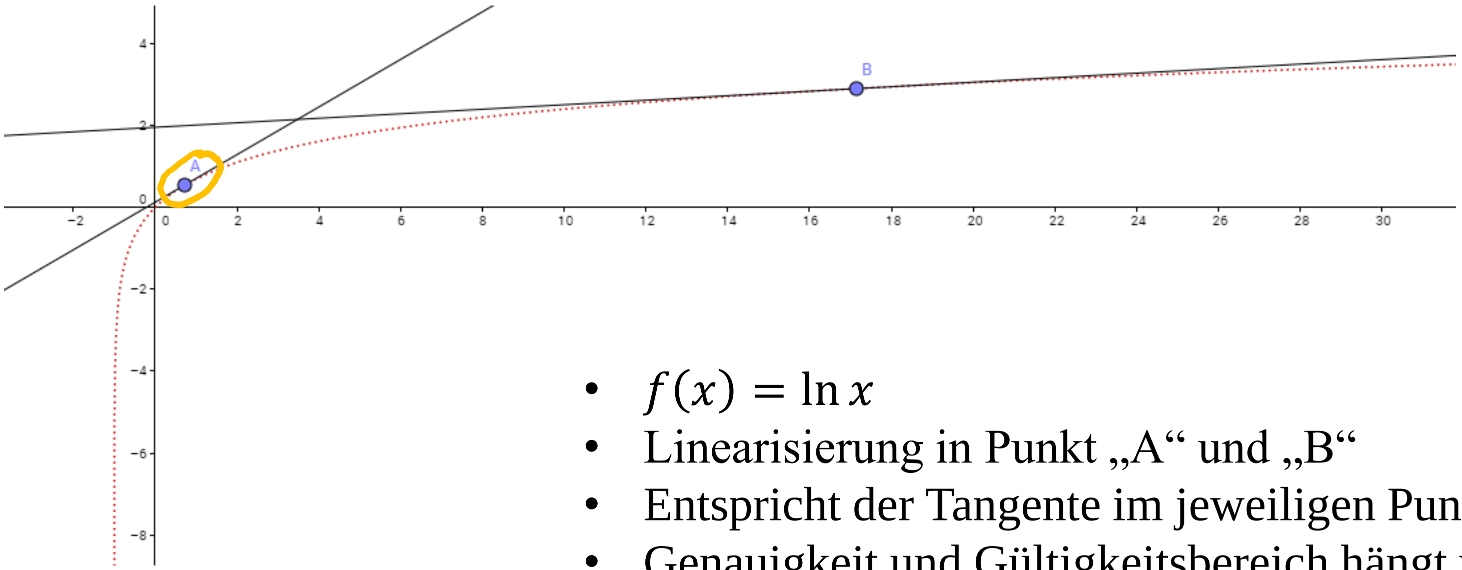
- Graphische Beispiele



- $f(x) = x^2$
- Linearisierung in Punkt „A“ und „B“
- Entspricht der Tangente im jeweiligen Punkt
- Genauigkeit und Gültigkeitsbereich hängt von Funktionsverlauf ab

Linearisierung

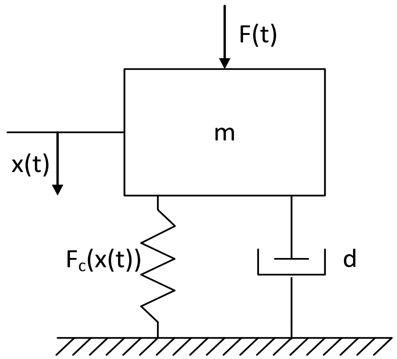
- Graphische Beispiele



- $f(x) = \ln x$
- Linearisierung in Punkt „A“ und „B“
- Entspricht der Tangente im jeweiligen Punkt
- Genauigkeit und Gültigkeitsbereich hängt von Funktionsverlauf ab

Aufgabe 3.1: Mechanisches System

Gegeben ist das folgende Feder-Masse-Dämpfer System aus Übung 1)



mit der Masse **m** und einem linearen Dämpfer mit der Dämpferkonstante **d**. Die Feder hat eine nichtlineare Kennlinie der Form $F_c(x(t)) = \sqrt{C_0 \cdot x(t)}$. Das System wird von einer Kraft **F(t)** angeregt.

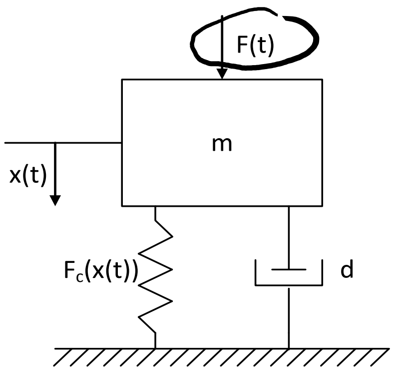
Aufgaben:

a) Bestimmen Sie die Differentialgleichung die die Dynamik des oben dargestellten Feder-Masse-Dämpfer Systems beschreibt. Linearisieren Sie anschließend die erhaltene Differentialgleichung um deren Ruhelage bei einer konstanten Anregung $F_0 \geq 0$.

b) Stellen sie die linearisierte Dierentialgleichung in Form eines Blockschaltbildes dar

Aufgabe 3.1: Mechanisches System

Aufgabe: a) Bestimmen Sie die Differentialgleichung die die Dynamik des oben dargestellten Feder-Masse-Dämpfer Systems beschreibt. Linearisieren Sie anschließend die erhaltene Differentialgleichung um deren Ruhelage bei einer konstanten Anregung $F_0 \geq 0$.



$$m \cdot \ddot{x} + d \cdot \dot{x} + \boxed{\sqrt{C_0 \cdot x}} = F$$

nicht linear

Ruhelage

$$F(t) = F_0$$

$$\ddot{x}_0 = \dot{x}_0 = 0$$

$$\sqrt{C_0 x_0} = F_0$$

$$x_0 = \frac{F_0^2}{C_0}$$

Aufgabe 3.1: Mechanisches System

Aufgabe: a) Bestimmen Sie die Differentialgleichung die die Dynamik des oben dargestellten Feder-Masse-Dämpfer Systems beschreibt. Linearisieren Sie anschließend die erhaltene Differentialgleichung um deren Ruhelage bei einer konstanten Anregung $F_0 \geq 0$.

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + \Delta x \\ \dot{x} &= \dot{x}_0 + \Delta \dot{x} \\ \ddot{x} &= \ddot{x}_0 + \Delta \ddot{x} \\ F &= F_0 + \Delta F \end{aligned}\right] \longrightarrow \overbrace{m(\ddot{x}_0 + \Delta \ddot{x})}^{f_1} + \overbrace{d(\dot{x}_0 + \Delta \dot{x})}^{f_2} + \overbrace{\underline{\underline{\sqrt{c_0(x_0 + \Delta x)}}}}^{f_3} = \overbrace{F_0 + \Delta F}^{f_4}$$

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x_0} \cdot \Delta x + \underbrace{\ldots}_{\text{vernachlässigt}}$$

$$f_1 \Rightarrow \cancelto{0}{\ddot{x}_0} + \left.\frac{\partial f_1}{\partial \ddot{x}}\right| \Delta \ddot{x} = m \cdot \Delta \ddot{x}$$

$$f_2 \Rightarrow \cancelto{0}{\dot{x}_0} +$$

$$f_3 \approx \sqrt{c_0 x_0} + \overbrace{\frac{1}{2}\sqrt{c_0} \cdot \frac{1}{\sqrt{x_0}}}^{\left.\frac{\partial f_3}{\partial x}\right|_{x_0}} \cdot \Delta x$$

$$f_4 \Rightarrow$$

Aufgabe 3.1: Mechanisches System

Aufgabe: a) Bestimmen Sie die Differentialgleichung die die Dynamik des oben dargestellten Feder-Masse-Dämpfer Systems beschreibt. Linearisieren Sie anschließend die erhaltene Differentialgleichung um deren Ruhelage bei einer konstanten Anregung $F_0 \geq 0$.

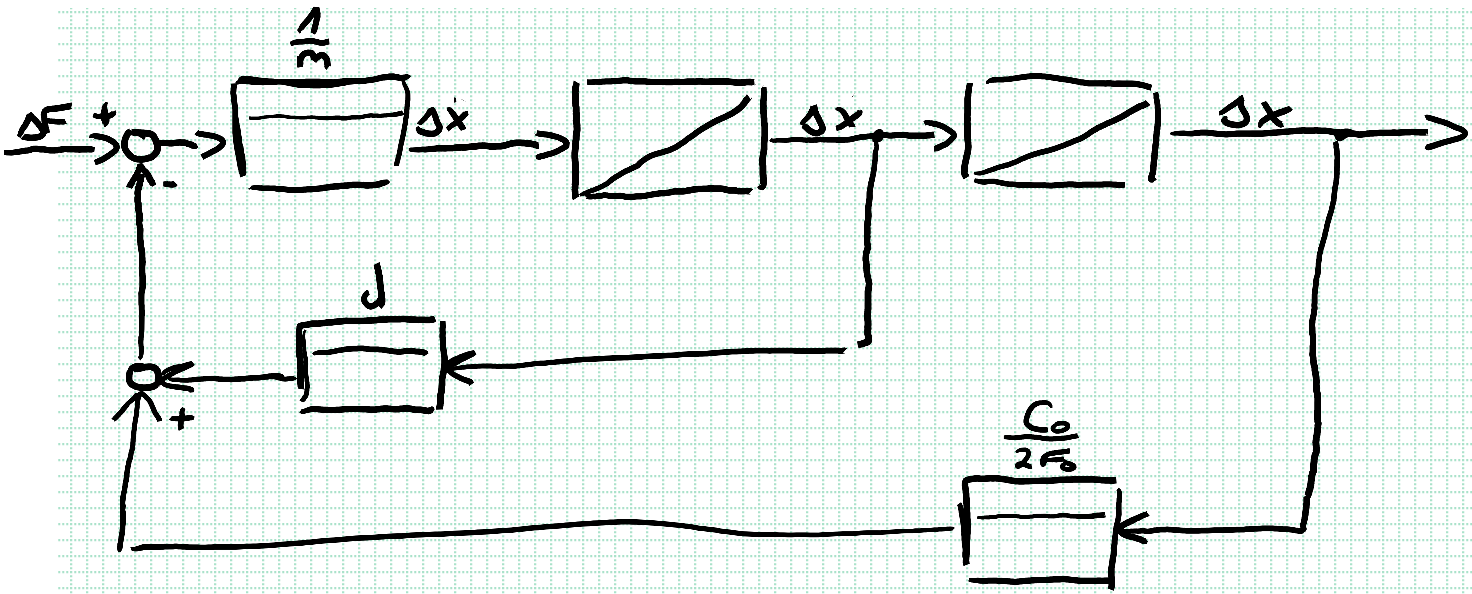
$$f_3 \approx \sqrt{\cancel{c_0} \cdot \underbrace{\frac{F_0^2}{\cancel{c_0}}}_{x_0}} + \frac{1}{2}\sqrt{c_0 \frac{c_0}{F_0^2}} \cdot \Delta x = \underline{\underline{F_0 + \frac{1}{2}\frac{c_0}{F_0} \cdot \Delta x}}$$

$$m(\cancel{\ddot{x}_0}^{\to 0} + \Delta \ddot{x}) + d(\cancel{\dot{x}_0}^{\to 0} + \Delta \dot{x}) + \cancel{F_0} + \frac{1}{2}\frac{c_0}{F_0} \cdot \Delta x = \cancel{F_0} + \Delta F$$

$$\Leftrightarrow \quad m \, \Delta \ddot{x} + d \, \Delta \dot{x} + \underbrace{\frac{1}{2}\frac{c_0}{F_0}}_{\text{konst.}} \Delta x = \Delta F$$

Aufgabe 3.1: Mechanisches System

Aufgabe: b) Stellen sie die linearisierte Differentialgleichung in Form eines Blockschaltbildes dar



$$\underline{m \cdot \Delta\ddot{x}} + d \cdot \Delta\dot{x} + \frac{c_0}{2F_0}\Delta x = \Delta F$$

$$\Delta\ddot{x} = \frac{1}{m}\left[\Delta F - \left(d \cdot \Delta\dot{x} + \frac{c_0}{2F_0}\Delta x\right)\right]$$

Anmerkungen zur linearisierten Differentialgleichung

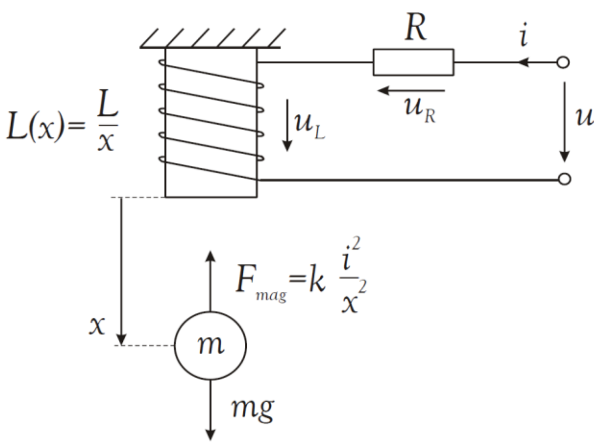
- Beschreibt nur Abweichungen vom definierten Arbeitspunkt - AP (hier Ruhelage)
- Nur in der Nähe von AP gültig, je größer der Abstand, desto größer wird der Fehler durch die Linearisierung
- Kann nur dazu benutzt werden um ein System in Umgebung des AP zu regeln

- System muss durch F_0 in x_0 gebracht und dort gehalten werden
- Durch ein Aufbringen von ΔF kann das System in Nähe des AP, also Δx beeinflusst werden

- Durch Linearisierung kann also eine lin. Approximation einer nichtlin. Differentialgleichung in der Umgebung eines definierten Punktes gewonnen werden
- Viele Probleme in der Regelungstechnik erfüllen diese Problematik, daher ist die Linearisierung ein sehr oft verwendeter Ansatz

Aufgabe 3.2: Elektrischer Hubmagnet

Gegeben ist der folgende Schaltkreis eines elektrischen Hubmagneten.



Durch das Aufbringen eines Stroms i auf die abstandabhängige Induktivität $L(x)$ wird ein Magnetfeld erzeugt, welches eine Kraft $F_{mag} = k \cdot \frac{i^2}{x^2}$ auf die Eisenkugel mit der Masse m ausübt und diese anhebt.

Aufgabe 3.2: Elektrischer Hubmagnet

Der Stromkreis enthält neben der Induktivität einen ohmschen Widerstand R und es liegt eine Spannungsquelle u an. Die Kugel selbst wirkt das Schwerefeld der Erde mit der Gravitation g. Der Abstand zwischen der Kugel und dem Kern des Hubmagneten wird mit x bezeichnet.

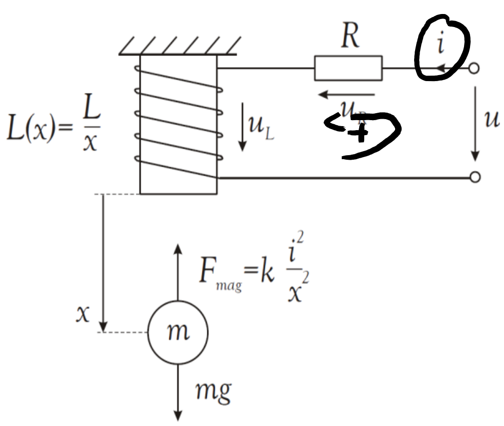
Aufgaben:

a) Bestimmen Sie die Differentialgleichungen, die das Verhalten des aufgeführten Systems in Abhängigkeit der Spannung u beschreiben und linearisieren Sie diese um deren Ruhelage bei einer konstanten Eingangsspannung $u_0 \geq 0$.

b) Stellen Sie das linearisierte System in Form eines Blockschaltbildes dar.

Aufgabe 3.2: Elektrischer Hubmagnet

Aufgabe: a) Bestimmen Sie die Differentialgleichungen, die das Verhalten des aufgeführten Systems in Abhängigkeit der Spannung u beschreiben und linearisieren Sie diese um deren Ruhelage bei einer konstanten Eingangsspannung $u_0 \geq 0$.



el. Teilsystem

$$0 = u_R + u_L - u$$

$$u_R = R \cdot i$$

$$u_L = L(x)\,\frac{\partial i}{\partial t} = \frac{L}{x}\,\frac{\partial i}{\partial t}$$

$$0 = R \cdot i + \frac{L}{x}\,\frac{\partial i}{\partial t} - u$$

$$\boxed{\frac{\partial i}{\partial t} = -\frac{R}{L}\, i\, x + \frac{1}{L}\, x\, u}$$

mech. Teilsystem

$$m \cdot \ddot{x} = \sum F$$

$$F_g = m \cdot g$$

$$F_{mag} = k \cdot \frac{i^2}{x^2}$$

$$m \cdot \ddot{x} = m \cdot g - k\,\frac{i^2}{x^2}$$

$$\boxed{\ddot{x} = g - \frac{k}{m} \cdot \frac{i^2}{x^2}}$$

Aufgabe 3.2: Elektrischer Hubmagnet

Aufgabe: a) Bestimmen Sie die Differentialgleichungen, die das Verhalten des aufgeführten Systems in Abhängigkeit der Spannung u beschreiben und linearisieren Sie diese um deren Ruhelage bei einer konstanten Eingangsspannung $u_0 \geq 0$.

$$\frac{\partial \cdot}{\partial t} = \dot{x} = 0$$

$$0 = -\frac{R}{L}\, i_0 \cdot x_0 + \frac{1}{L}\, x_0\, u_0 \qquad (1)$$

$$0 = g - \frac{k}{m}\,\frac{i_0^2}{x_0^2} \qquad (2)$$

$$(2)\quad x_0 = i_0 \sqrt{\frac{k}{m \cdot g}}$$

$$(1):\quad 0 = -i_0^2\,\frac{R}{L}\sqrt{\frac{k}{m g}} + i_0 \cdot \frac{1}{L}\sqrt{\frac{k}{m g}}\, u_0$$

$$= i_0 \underbrace{\left(-i_0\,\frac{R}{L}\sqrt{\frac{k}{m g}} + \frac{1}{L}\sqrt{\frac{k}{m \cdot g}}\, u_0\right)}$$

$$i_0 = \frac{u_0}{R}$$

$$x_0 = \sqrt{\frac{k}{m \cdot g}} \cdot \frac{1}{R} \cdot u_0$$

Aufgabe 3.2: Elektrischer Hubmagnet

Aufgabe: a) Bestimmen Sie die Differentialgleichungen, die das Verhalten des aufgeführten Systems in Abhängigkeit der Spannung u beschreiben und linearisieren Sie diese um deren Ruhelage bei einer konstanten Eingangsspannung $u_0 \geq 0$.

$$f(x_{10}+\Delta x_1;\, x_{20}+\Delta x_2) = f(x_{10};\, x_{20}) + \frac{\partial f}{\partial x_1}\Big|_{AP}\cdot \Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\Big|_{AP}\cdot \Delta x_2 + \dots$$

$$\cancelto{0}{\left(\frac{\partial i}{\partial t}\right)_0} + \Delta\left(\frac{\partial i}{\partial t}\right) = -\frac{R}{L}(i_0+\Delta i)(x_0+\Delta x) + \frac{1}{L}(x_0+\Delta x)(u_0+\Delta u)$$

$$f(\vec{x}+\Delta\vec{x})$$

$$f = -\frac{R}{L}\cdot i\, x + \frac{1}{L}\, x\, u$$

$$\frac{\partial f}{\partial i}\Big|_{i_0,x_0,u_0} = -\frac{R}{L}\cdot x_0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{i_0,x_0,u_0} = -\frac{R}{L}\, i_0 + \frac{1}{L}\, u_0$$

$$\frac{\partial f}{\partial u}\Big|_{i_0,x_0,u_0} = \frac{1}{L}\, x_0$$

Aufgabe 3.2: Elektrischer Hubmagnet

Aufgabe: a) Bestimmen Sie die Differentialgleichungen, die das Verhalten des aufgeführten Systems in Abhängigkeit der Spannung u beschreiben und linearisieren Sie diese um deren Ruhelage bei einer konstanten Eingangsspannung $u_0 \geq 0$.

$$\left(\cancel{\frac{\partial i}{\partial t}}\right)_0^{\to 0} + \Delta\left(\frac{\partial i}{\partial t}\right) = f(i_0, x_0, u_0) - \left[\frac{R}{L}\cdot x_0\right]\Delta i + \left[-\frac{R}{L}\, i_0 + \frac{1}{L}\, u_0\right]\Delta x + \left[\frac{1}{L}\, x_0\right]\Delta u$$

$$f(i_0, x_0, u_0) = -\frac{\cancel{R}}{L}\cdot\frac{u_0}{\cancel{R}}\cdot\frac{1}{R}\sqrt{\frac{k}{m\cdot g}}\; u_0 + \frac{1}{L}\cdot\frac{1}{R}\sqrt{\frac{k}{m g}}\; u_0^2 = \underline{0}$$

$$\Rightarrow \Delta\left(\frac{\partial i}{\partial t}\right) = \underbrace{\left[-\frac{R}{L}\cdot x_0\right]\cdot\Delta i}_{} + \underbrace{\left[-\frac{R}{L}\cdot i_0 + \frac{1}{L}\, u_0\right]}_{=0}\cdot\Delta x + \left[\frac{1}{L}\, x_0\right]\cdot\Delta u$$

Aufgabe 3.2: Elektrischer Hubmagnet

Aufgabe: a) Bestimmen Sie die Differentialgleichungen, die das Verhalten des aufgeführten Systems in Abhängigkeit der Spannung u beschreiben und linearisieren Sie diese um deren Ruhelage bei einer konstanten Eingangsspannung $u_0 \geq 0$.

$$\ddot{x} = \underbrace{g - \frac{k}{m} \cdot \frac{i^2}{x^2}}_{f}$$

$$f(i_0, x_0) = + \frac{k}{m} \cdot \frac{i_0^2}{x_0^2}$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial i}\right|_{x_0, i_0} = -2 \frac{k}{m} \cdot \frac{i_0}{x_0^2}$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x_0, i_0} = 2 \cdot \frac{k}{m} \cdot \frac{i_0^2}{x_0^3}$$

$$\cancel{\ddot{x}_0}^{\,0} + \Delta\ddot{x} = g - \frac{k}{m} \frac{i_0^2}{x_0^2} + \left(2 \frac{k}{m} \frac{i_0^2}{x_0^3}\right) \Delta x - \left(2 \frac{k}{m} \frac{i_0}{x_0^2}\right) \Delta i$$

Aufgabe 3.2: Elektrischer Hubmagnet

Aufgabe: a) Bestimmen Sie die Differentialgleichungen, die das Verhalten des aufgeführten Systems in Abhängigkeit der Spannung u beschreiben und linearisieren Sie diese um deren Ruhelage bei einer konstanten Eingangsspannung $u_0 \geq 0$.

$$\Delta\ddot{x} = g - \frac{\cancel{k}}{\cancel{m}}\, \cancel{i_0^2}\, \frac{\cancel{m}\cdot g}{\cancel{k}\, \cancel{i_0^2}} - \left(2\, \frac{\cancel{k}}{\cancel{m}}\, \cancel{i_0^2}\, \frac{\cancel{m}\cdot g}{i_0^{\cancel{3}}\, \cancel{k}} \sqrt{\frac{m\cdot g}{k}}\right) \Delta x - \left(2\, \frac{\cancel{k}}{\cancel{m}}\, \cancel{i_0}\, \frac{\cancel{m}\cdot g}{\cancel{k}\cdot i_0^{\cancel{2}}}\right) \Delta i$$

$$\Delta\ddot{x} - \left(2\, \frac{g}{i_0} \sqrt{\frac{m\cdot g}{k}}\right) \Delta x = -2\, \frac{g}{i_0} \cdot \Delta i$$

Hinweis:

Die Mitschrift wurde nachträglich korrigiert, da sich einige kleine Fehler eingeschlichen hatten.

Aufgabe 3.2: Elektrischer Hubmagnet

Aufgabe: b) Stellen Sie das linearisierte System in Form eines Blockschaltbildes dar.