1. Übung zur Vorlesung „Steuer- und Regelungstechnik“

Aufstellen von DGL‘s, lineare und nichtlineare Systeme

Felix Goßmann M.Sc.

Institut für Steuer- und Regelungstechnik
Fakultät für Luft- und Raumfahrttechnik
Universität der Bundeswehr München

Dozenten:

Felix Goßmann
Gebäude 41 – 2311
felix.gossmann@unibw.de

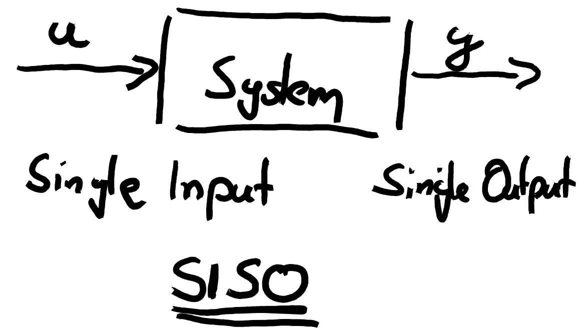
Korbinian Figel
Gebäude 41 – 2311
korbinian.figel@unibw.de

- Termine nach Vereinbarung
- Fragen zu best. Übungsaufgaben
  - Per E-Mail an jeweiligen Dozenten
  - Termin vereinbaren
- Fragen allgemein zur Übung/Veranstaltung an Felix Goßmann
- Unterlagen auf der Homepage (Lehrveranstaltungen/Unterlagen/SRT)
  - https://www.unibw.de/lrt15

Klausurinfos

- Zweigeteilte Klausur: Mess- und **Regelungstechnik**
  - Zwei unabhängige Klausuren, hintereinander geschrieben
  - Gemeinsame Bewertung (oder anders: Es müssen nicht beide Teil „bestanden“ werden)
- Klausurteil SRT besteht wiederum aus **zwei** Teilen:
  - Fragenteil (ohne Hilfsmittel), bezieht sich auf die Vorlesung
  - Rechenteil mit drei Aufgaben, alle schriftlichen Hilfsmittel zugelassen
    - Orientiert sich inhaltlich an der Übung
  - Auswahlklausur: ~70% für eine 1,0 im SRT-Teil, 4,0 bei ~30%

Einleitende Bemerkungen



- System:
  - Mathematisches Model eines technischen Vorganges
  - Zusammenwirken mehrerer technischer Komponenten
  - Differentialgleichungen

- Systeme besitzen immer Aktuatoren (Eingänge) und Sensoren (Ausgänge)
  - Eingänge in Differentialgleichungen → Inhomogene DGLs
  - Externe Beeinflussung des Systemverhaltens
  - Messung von Systemgrößen → Ausgänge

- Grundlegende Regelungstheorie beruht auf linearen Systemen
  - Lineare inhomogene Differentialgleichungen

Einleitende Bemerkungen

- Lineare Differentialgleichungen

$$a_0 y(t) + a_1 \dot{y}(t) + a_2 \ddot{y}(t) + \cdots = \cdots$$

- Zeitabhängige Größen nur in erster Ordnung
- Faktoren konstant
- Alle anderen Operationen ($y_1(t) \cdot y_2(t)$, $\sqrt{y(t)}$, etc.) nichtlinear

- Homogene DGLs: $a_0 y(t) + a_1 \dot{y}(t) + a_2 \ddot{y}(t) + \cdots = 0$

- Inhomogene DGLs: $a_0 y(t) + a_1 \dot{y}(t) + a_2 \ddot{y}(t) + \cdots = b_0 u(t) + b_1 \dot{u}(t) + \cdots$

- Inhomogene DLGs sind lösbar mit linearen Verfahren → zählen zu den linearen DGLs

Überblick der Veranstaltung

Modellbildung: (Übung 1 – 4)

- Mathematische Modellierung technischer Systeme
- Differentialgleichungen, Blockschaltbilder
- Linearisierung nichtlinearer Probleme
- (Laplace-Transformation)

Analyse: (Übung 5 – 8)

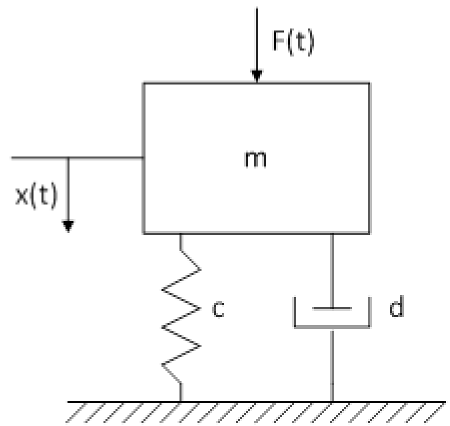
- Laplace-Transformation
- Blockschaltbild-Algebra
- Charakterisierung und Bestimmung von Systemeigenschaften
- Stabilität

Reglerentwurf: (Übung 9 – 10)

- künstliche Stabilisierung instabiler Systeme
- Beeinflussung von Systemeigenschaften
- Aufprägen von gewünschtem Verhalten

Aufgabe 1.1: Mechanisches System

Gegeben ist das folgende Feder-Masse-Dämpfer System

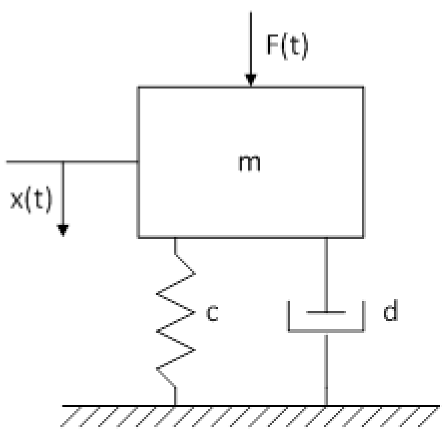


mit der Masse m, einem linearen Dämpfer mit der Dämpferkonstante d und einer linearen Feder mit der Steifigkeit c. Das System wird von einer Kraft $F(t)$ angeregt. Die Gravitation wird vernachlässigt.

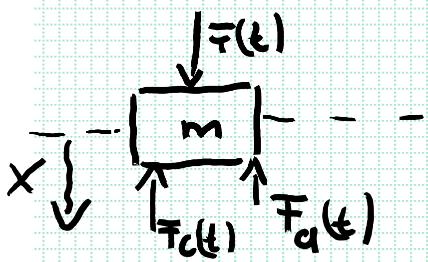
Aufgabe: Bestimmen Sie die Differentialgleichung die die Dynamik der Koordinate $x(t)$ des oben dargestellten Feder-Masse-Dämpfer Systems in Abhängigkeit der angreifenden Kraft $F(t)$ beschreibt.

Aufgabe 1.1: Mechanisches System

Aufgabe: Bestimmen Sie die Differentialgleichung die die Dynamik der Koordinate $x(t)$ des oben dargestellten Feder-Masse-Dämpfer Systems in Abhängigkeit der angreifenden Kraft $F(t)$ beschreibt.



2. Newton'sche Axiom: $\boxed{m\cdot a = \sum F}$



Klausur

$$F_D(t) = d\cdot\dot{x}(t)$$

$$F_c(t) = c\cdot x(t)$$

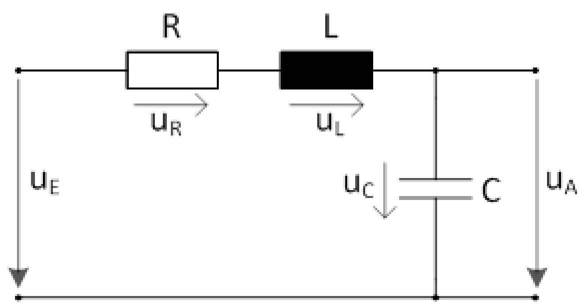
$$a = \ddot{x}(t)$$

$$m\cdot\ddot{x}(t) = F(t) - F_D(t) - F_c(t)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{m\,\ddot{x}(t) + \underbrace{d\,\dot{x}(t)}_{F_D} + \underbrace{c\,x(t)}_{F_c} = F(t)}$$

Aufgabe 1.2: Elektrisches System

Gegeben ist der folgende Schaltkreis

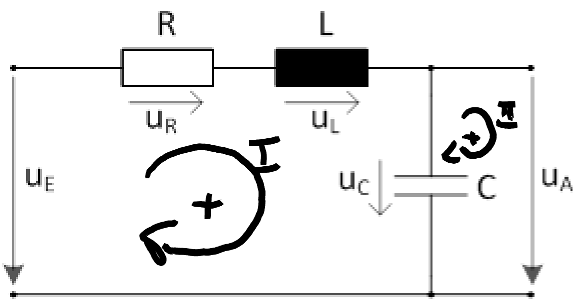


mit einem Widerstand R, einer Induktivität L und einer Kapazität C. Der Schaltkreis wird mit einer Eingangsspannung von $u_E(t)$ beaufschlagt und es fällt eine Spannung $u_A(t)$ am Ausgang an.

Aufgabe: Bestimmen Sie die Differentialgleichung die das Ausgangsverhalten $u_A(t)$ des aufgeführten Schaltkreises in Abhängigkeit von der Eingangsspannung $u_E(t)$ beschreibt.

Aufgabe 1.2: Elektrisches System

Aufgabe: Bestimmen Sie die Differentialgleichung die das Ausgangsverhalten $u_A(t)$ des aufgeführten Schaltkreises in Abhängigkeit von der Eingangsspannung $u_E(t)$ beschreibt.



$$\mathrm{I}: 0 = u_R + u_L + u_C - u_E \Leftrightarrow u_E = u_R + u_L + u_C$$

$$\mathrm{II}: 0 = u_A - u_C \Leftrightarrow u_A = u_C$$

$$u_E(t) = u_R(t) + u_L(t) + u_A(t)$$

$$i = i_R = i_L = i_C$$

<u>Bauteilgl.</u>:

$$\boxed{\begin{aligned} u_R &= R \cdot i \\ u_L &= L \cdot \frac{\partial i}{\partial t} \\ i_C &= C \cdot \frac{\partial u_C}{\partial t} \end{aligned}} \rightarrow \text{Klausur}$$

Aufgabe 1.2: Elektrisches System

Aufgabe: Bestimmen Sie die Differentialgleichung die das Ausgangsverhalten $u_A(t)$ des aufgeführten Schaltkreises in Abhängigkeit von der Eingangsspannung $u_E(t)$ beschreibt.

$$i = C \cdot \frac{\partial u_C}{\partial t} = C \cdot \frac{\partial u_A}{\partial t} \qquad L \frac{\partial i}{\partial t} = L \cdot C \cdot \frac{\partial^2 u_A}{\partial t^2}$$

$$u_E = R \cdot i + L \cdot \frac{\partial i}{\partial t} + u_A$$

$$u_E = R\,C \cdot \frac{\partial u_A}{\partial t} + L \cdot C \cdot \frac{\partial^2 u_A}{\partial t^2} + u_A$$

$$\Leftrightarrow \quad u_E(t) = R\,C \cdot \dot{u}_A(t) + L \cdot C\, \ddot{u}_A(t) + u_A(t)$$

Aufgabe 1.3: Mechanisches System

Gegeben ist das folgende Feder-Masse-Dämpfer System aus der ersten Aufgabe

Aufgabe 1.3: Mechanisches System

Gegeben ist das folgende Feder-Masse-Dämpfer System aus der ersten Aufgabe

mit der Masse m und einem linearen Dämpfer mit der Dämpferkonstante d. Die Feder hat in diesem Fall eine nichtlineare Kennlinie der Form $F_c(x(t)) = \sqrt{C_0 \cdot x(t)}$. Das System wird von einer Kraft $F(t)$ angeregt.

Aufgabe: Bestimmen Sie die Differentialgleichung die die Dynamik der Koordinate $x(t)$ des oben dargestellten Feder-Masse-Dämpfer Systems in Abhängigkeit der angreifenden Kraft $F(t)$ beschreibt.

mit der Masse m und einem linearen Dämpfer mit der Dämpferkonstante d. Die Feder hat in diesem Fall eine nichtlineare Kennlinie der Form $F_c(x(t)) = \sqrt{C_0 \cdot x(t)}$. Das System wird von einer Kraft $F(t)$ angeregt.

Aufgabe: Bestimmen Sie die Differentialgleichung die die Dynamik der Koordinate $x(t)$ des oben dargestellten Feder-Masse-Dämpfer Systems in Abhängigkeit der angreifenden Kraft $F(t)$ beschreibt.

Aufgabe 1.3: Mechanisches System

Aufgabe: Bestimmen Sie die Differentialgleichung die die Dynamik der Koordinate $x(t)$ des oben dargestellten Feder-Masse-Dämpfer Systems in Abhängigkeit der angreifenden Kraft $F(t)$ beschreibt.

$$m \cdot \ddot{x}(t) = F(t) - F_D(t) - F_C(t)$$

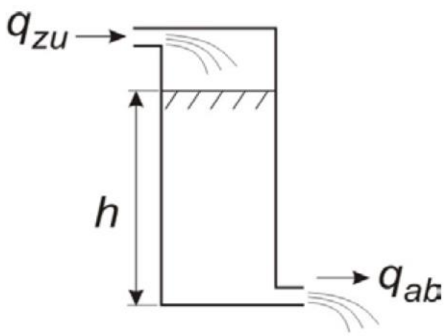
$$= \underbrace{F(t)} - d \cdot \dot{x}(t) - \sqrt{c_0 \cdot x(t)}$$

nichtlineare inhomogene DGL $\longrightarrow$ lin. Approximation

↳ Ü 3

Aufgabe 1.4: Tankbehälter

Geben ist der folgende Tankbehälter

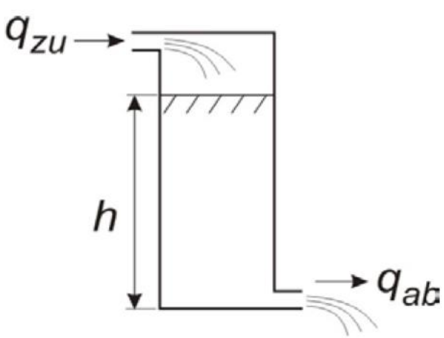


mit dem Zufluss $q_{zu}(t)$, dem Abfluss $q_{ab}(t)$ und der Grundfläche A. Die im Tank enthaltene Flüssigkeitsmenge hat das Volumen $V(t)$ und die Füllhöhe $h(t)$.

Aufgabe: Bestimmen Sie die Differentialgleichung die den zeitlichen Verlauf der Füllhöhe $h(t)$ in Abhängigkeit des Zuflusses $q_{zu}(t)$ beschreibt.

Aufgabe 1.4: Tankbehälter

Aufgabe: Bestimmen Sie die Differentialgleichung die den zeitlichen Verlauf der Füllhöhe $h(t)$ in Abhängigkeit des Zuflusses $q_{zu}(t)$ beschreibt.



$$\dot{V}(t) = q_{zu}(t) - q_{ab}(t) \qquad V(t) = A \cdot h(t)$$

$$= A \cdot \dot{h}(t)$$

$$q_{ab}(t) = a\sqrt{2g\,h(t)}$$

$$\dot{h}(t) = \frac{1}{A}\left(q_{zu}(t) - q_{ab}(t)\right)$$

$$\Leftrightarrow \dot{h}(t) = \frac{1}{A}\left(q_{zu}(t) - a \cdot \sqrt{2g\,h(t)}\right)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{1}{A} q_{zu}(t) = \dot{h}(t) + \frac{a}{A}\sqrt{2g\,h(t)}}$$

Aufgabe 1.4: Tankbehälter

Aufgabe: Bestimmen Sie die Differentialgleichung die den zeitlichen Verlauf der Füllhöhe $h(t)$ in Abhängigkeit des Zuflusses $q_{zu}(t)$ beschreibt.

$$b_1 u(t) + \ldots = a_1 x(t) + a_2 \cdot \dot{x}(t) + \ldots$$