Prof. G. Reißig
Seminarübungen-Dozent: Victor C. Chaim
E–Mail: victor.chaim@unibw.de

Universität der Bundeswehr München
Fakultät für Luft- und Raumfahrttechnik
Inst. f. Steuer- und Regelungstechnik (LRT-15)
85577 Neubiberg

Steuer- und Regelungstechnik, WT 2023

1 Übung, 16.01.2023

Aufgabe 1.1. Berechnen Sie die Multiplikation Ax, gegeben

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -6 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad x = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Finden Sie einen Lösungsvektor x für das System $Ax = 0$ mit der gleichen Matrix A. Gibt es mehr als eine Lösung?

Aufgabe 1.2. Transformieren Sie das folgende System $Ax = b$ in die Dreiecksform $Ux = c$, wobei U eine obere Dreiecksmatrix ist. Berechnen Sie die Lösung des Gleichungssystems und die Determinante von A.

$$\begin{aligned} 2u + 4v \phantom{{}+3w} + 2z &= 6 \\ 3v + 3w + z &= 4 \\ 2u + 7v + 9w + 7z &= 8 \\ 6w + 5z &= -4. \end{aligned}$$

Aufgabe 1.3. Berechnen Sie die Inversen von

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

Aufgabe 1.4. Bilden die Vektoren $u = [1, 1, 3]$, $v = [2, 3, 6]$ and $w = [1, 4, 3]$ eine Basis für $\mathbb{R}^3$?

Aufgabe 1.5. Berechnen Sie die Determinante und alle 9 Kofaktoren von

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Bilden Sie dann eine neue Matrix B, deren Eintrag i, j der Kofaktor A_{ji} ist. Verifizieren, dass AB die Identitätsmatrix mal der Determinante ist. Berechnen Sie A^{-1}.

Aufgabe 1.6. Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Verifizieren Sie für dieses Beispiel, dass die Spur gleich der Summe der Eigenwerte ist und dass die Determinante gleich dem Produkt der Eigenwerte ist. Beweisen Sie, dass diese Identitäten auch im Allgemeinen gelten.

Angenommen, wir verschieben die Matrix A durch Subtraktion von $7\,\mathrm{id}$:

$$B = A - 7\,\mathrm{id} = \begin{bmatrix} -6 & -1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Was sind die Eigenwerte und Eigenvektoren von B, und wie hängen sie mit denen von A zusammen?

Aufgabe 1.7. Berechnen Sie den Rang und alle vier Eigenwerte sowohl für die Einsermatrix A als auch für die Schachbrettmatrix C, wobei Sie auf die algebraische und geometrische Vielfachheit der Eigenwerte achten:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Welche Eigenvektoren entsprechen den Eigenwerten ungleich Null? Wie lauten der Rang r und die Eigenwerte, wenn die Matrizen $n \times n$ sind? Denken Sie daran, dass der Eigenwert Null $(n - r)$ -mal wiederholt wird.

Aufgabe 1.8. Berechnen Sie eine Matrix T, so dass $T^{-1}AT = D$, wobei D eine Diagonalmatrix ist.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Aufgabe 1.9. Für die komplexen Zahlen $z_1 = 3 + 4i$ und $z_2 = 1 - i$ lösen Sie die folgenden Aufgaben:

(i) Ermitteln Sie ihrer Positionen in der komplexen Ebene;

(ii) Berechnen Sie ihre Summe, ihr Produkt und ihren Quotienten;

(iii) Berechnen ihre Konjugierte, ihren Betrag und ihr Argument.

Aufgabe 1.10. Zeigen Sie, dass:

$$|(a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2)| = |a_1 + ib_1||a_2 + ib_2| \quad \text{und} \quad |(r_1 e^{i\phi_1})(r_2 e^{i\phi_2})| = r_1 r_2$$

Aufgabe 1.11. Berechnen Sie den Betrag und das Skalarprodukt in $\mathbb{C}^2$ von

$$x = \begin{bmatrix} 2 - 4i \\ 4i \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad y = \begin{bmatrix} 2 + 4i \\ 4 \end{bmatrix}$$

Aufgabe 1.12. Wenn A die Eigenwerte 0 und 1 hat, zu denen die Eigenvektoren $v_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}^T$ und $v_2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix}^T$ gehören, wie kann man dann im Voraus erkennen, dass A symmetrisch ist? Berechnen Sie die Matrix A. Wie lauten die Eigenwerte und Eigenvektoren von A^2? Welche Beziehung besteht zwischen A und A^2?