

# 5. Übung

Victor Chuidde Chaim

5.1 Aufgabe:  $\Phi(t) = \exp(At)$ ?  $A = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 1 \\ -3 & 0 & -4 \end{bmatrix}$

Eigenwerte:  $\det(A - \lambda id) = 0$

$$\det(A - \lambda id) = \det \begin{pmatrix} -4-\lambda & 0 & 0 \\ 3 & -4-\lambda & 1 \\ -3 & 0 & -4-\lambda \end{pmatrix} = (-4-\lambda)^3 = 0$$

$\lambda_{1,2,3} = -4$ ,  $\Rightarrow$  Die Matrix A hat Eigenwerte, die denselben Wert haben, der von 0 verschieden ist. Daher verwenden wir den EW-Verschiebungstrick.

$$A = \lambda id + (A - \lambda id)$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \exp(At) &= \exp((\lambda id + (A - \lambda id))t) = \\ &= \exp(\lambda id t) \exp((A - \lambda id)t) \end{aligned}$$

$$\bullet \exp((\lambda id)t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda id)^n t^n}{n!} = id \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n t^n}{n!} = id e^{\lambda t} = id e^{-4t}$$

$$\bullet \exp((A - \lambda id)t) \rightarrow A - \lambda id = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Eigenwerte von  $(A - \lambda id) \Rightarrow \lambda_{1,2,3} = 0 \rightarrow$  Nilpotent!

$$(A - \lambda id)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(A - \lambda id)^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(A - \lambda id)^m = 0, \quad m \geq 3.$$

$$\exp((A - \lambda id)t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(A - \lambda id)^n t^n}{n!} = id + (A - \lambda id)t + \frac{(A - \lambda id)^2 t^2}{2}$$

$$\exp(A - \lambda id) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3t & 0 & t \\ -3t & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^2$$

$$\exp((A - \lambda id)t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3t - \frac{3t^2}{2} & 1 & t \\ -3t & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\bullet \exp(At) = \exp(\lambda id t) \exp((A - \lambda id)t)$$

$$\exp(At) = e^{-4t} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3t - \frac{3t^2}{2} & 1 & t \\ -3t & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-4t} & 0 & 0 \\ e^{-4t} (3t - \frac{3t^2}{2}) & e^{-4t} & t e^{-4t} \\ -e^{-4t} 3t & 0 & e^{-4t} \end{bmatrix}$$

### Aufgabe 5.2

$$p(s) = s^3 + ks^2 + (1+k)s + 6$$

1. Bedingung: Alle Koeffizienten  $c_0, c_1, c_2$  und  $c_3$  mit dasselben Vorzeichen.

$$c_0 = 6, c_1 = (1+k), c_2 = k, c_3 = 1 \quad \therefore$$

$$c_1 > 0: c_1 = 1+k > 0 \Leftrightarrow k > -1$$

$$c_2 > 0: c_2 = k > 0 \text{ stärker als } \boxed{k > 0}$$

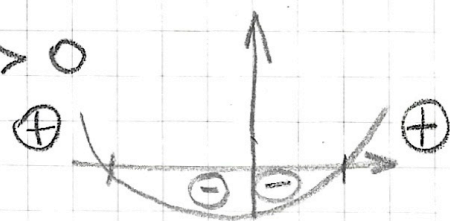
2. Bedingung: Hauptabschnittsdeterminante von  $H > 0$

$$H = \begin{bmatrix} c_1 & c_3 & c_5 \\ c_0 & c_2 & c_6 \\ 0 & c_1 & c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1+k) & 1 & 0 \\ 6 & k & 0 \\ 0 & (1+k) & 1 \end{bmatrix}$$

$$D_1 > 0: D_1 = 1+k > 0, k > -1 \text{ (} k > 0 \text{ ist stärker)}$$

$$D_2 > 0: D_2 = k(1+k) - 6 = k^2 + k - 6 > 0$$

$$k_0 = \frac{-1 \pm 5}{2} \Rightarrow k_1 = -3, k_2 = 2$$



$k^2 + k - 6 > 0$  wenn  $k < -3$  oder  $k > 2$   
 $\downarrow$  nicht möglich (1. Bedingung:  $k > 0$ )  
 $\downarrow$  stärker als  $k > 0$

$$D_3 > 0: D_3 = (-1) \cdot 1 \cdot D_2 = D_2 \rightarrow k > 2$$

$\bullet p(s)$  ist Hurwitz für  $k > 2$ . //

Aufgabe 5.3  $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & 0 \\ 5 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -4 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$   
 $D = 0$

1)  $a_2 = 0 \Rightarrow A = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -4 \end{bmatrix}$

Eigenwerte von A:  $\det(A - \lambda \text{id}) = 0$

EW:  $\det \begin{pmatrix} a_1 - \lambda & 0 & 0 \\ 5 & -1 - \lambda & 2 \\ -1 & 0 & -4 - \lambda \end{pmatrix} = (a_1 - \lambda)(-1 - \lambda)(-4 - \lambda) = 0$

$\lambda_1 = -1$ ,  $\lambda_2 = -4$ ,  $\lambda_3 = a_1 \Rightarrow$  asymptotische Stabilität

Bedingung: • Für alle  $\lambda$  von A gilt  $\text{Re}(\lambda) < 0$   
 (6.5 Satz, (iii)).

$\lambda_1 < 0 \checkmark$ ,  $\lambda_2 < 0 \checkmark$  und  $\lambda_3 = a_1 < 0$ .

ZS asymptotisch stabil für  $a_1 < 0$ .

2)  $a_2 = 10 \Rightarrow A = \begin{bmatrix} a_1 & 10 & 0 \\ 5 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -4 \end{bmatrix}$

$p(s)$ : charakteristisches Polynom von A

$p(s) = \det(s \text{id} - A)$

$\det(s \text{id} - A) = \det \begin{pmatrix} s - a_1 & -10 & 0 \\ -5 & s + 1 & -2 \\ 1 & 0 & s + 4 \end{pmatrix} =$

$= (s - a_1)(s + 1)(s + 4) + 20 - 50(s + 4)$

$p(s) = (s - a_1)(s^2 + 5s + 4) + 20 - 50s - 200$

$p(s) = s^3 + 5s^2 + 4s - a_1 s^2 - 5a_1 s - 4a_1 + 20 - 50s - 200$

$p(s) = s^3 + s^2(s - a_1) + s(-46 - 5a_1) + (-4a_1 - 180)$

1. Bedingung: Alle Koeffizienten mit dasselben VZ.

$c_0 = -4a_1 - 180$ ,  $c_1 = -5a_1 - 46$ ,  $c_2 = 5 - a_1$ ,  $c_3 = 1$

$$c_0 > 0: -4a_1 - 180 > 0, -4a_1 > 180 \Leftrightarrow a_1 < -45$$

$$c_1 > 0: -5a_1 - 46 > 0, -5a_1 > 46 \Leftrightarrow a_1 < -46/5$$

$$c_2 > 0: 5 - a_1 > 0, -a_1 > -5 \Leftrightarrow a_1 < 5$$

\* Stärkste Ungleichung:  $a_1 < -45$  //  
(wenn  $a_1 < -45$ , dann sind  $a_1 < 5$  und  $a_1 < -46/5$  auch wahr)

2. Bedingung: Hauptabschnittsdeterminante von  $H > 0$

$$H = \begin{bmatrix} c_1 & c_3 & c_5 \\ c_0 & c_2 & c_6 \\ 0 & c_4 & c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5a_1 - 46 & 1 & 0 \\ -180 - 4a_1 & 5 - a_1 & 0 \\ 0 & -(5a_1 - 46) & 1 \end{bmatrix}$$

$$D_1 > 0: D_1 = -5a_1 - 46, a_1 < -46/5 \text{ (} a_1 < -45 \text{ stärker)}$$

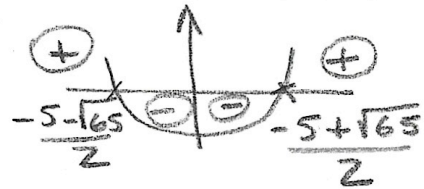
$$D_2 > 0: (-5a_1 - 46)(5 - a_1) - (-180 - 4a_1) = D_2$$

$$-25a_1 + 5a_1^2 - 46 \cdot 5 + 46 \cdot a_1 + 180 + 4a_1 = D_2$$

$$D_2 = 5a_1^2 + 25a_1 - 50 > 0$$

$$\text{Wurzeln: } 5a_1^2 + 25a_1 - 50 = 0 \Rightarrow a_1^2 + 5a_1 - 10 = 0$$

$$a_{1,0} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 40}}{2}$$



$$D_2 > 0 \text{ für } a_1 < -5 - \frac{\sqrt{65}}{2} \text{ oder}$$

$$a_1 > -5 + \frac{\sqrt{65}}{2} \text{ (nicht möglich, 1. Bedingung)}$$

$$a_1 < -5 - \frac{\sqrt{65}}{2} \text{ (} a_1 < -45 \text{ stärker)}$$

\*  $p(s)$  ist Hurwitz für  $a_1 < -45$ . Das bedeutet, dass das ZS für  $a_1 < -45$  asympt. stabil ist.

$$3) a_1 = -2, a_2 = 0, u(t) = 3 - t^{-2} e^{-3t}$$

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -4 \end{bmatrix}, \quad \varphi(\infty, x_0, u) = -\bar{A}^{-1} B u(\infty)$$

$$\bullet u(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} (3 - t^{-2} e^{-3t}) = \lim_{t \rightarrow \infty} 3 - \lim_{t \rightarrow \infty} t^{-2} - \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-3t} = 3$$

$$\bullet \bar{A}^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A) = -\frac{1}{8} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 18 & 8 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \varphi(\infty, x_0, u) = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 18 & 8 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot 3$$

$$\varphi(\infty, x_0, u) = \frac{3}{8} \begin{bmatrix} -4 \\ -30 \\ 3 \end{bmatrix} //$$

4