1. Übung

Victor C. Chaim

- Aufgabe 1.1

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -6 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A.x = \begin{bmatrix} 3 & -6 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 2.3 - 1.6 + 1.2 - 1.2 + 2.1 - 1.1 - 1.1$$

$$\Rightarrow A.x = 6 - 6 + 2 - 2 + 2 - 1 - 1 = 0$$

~~Jetzt~~, $A.x = 0$, aber $x = [x_1 \;\; x_2 \;\; x_3]^T$:

$$A.x = \begin{bmatrix} 3 & -6 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1.3 - 6x_2 \\ 2x_2 - 2x_3 \\ x_1 - x_2 - x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- triviale Lösung: $x_1 = x_2 = x_3 = 0$
- nicht triviale Lösung: $\begin{cases} x_1 = x_2 + x_3 \\ x_1 = 2x_2 \\ x_2 = x_3 \end{cases}$ $\Rightarrow$ unendliche Lösungen.

zum Beispiel: $\begin{cases} x_1 = 4, \; x_2 = 2, \; x_3 = 2 \\ x_1 = 2, \; x_2 = 1, \; x_3 = 1 \end{cases}$ ... und so weiter

- Aufgabe 1.2: $\begin{cases} 2u + 4v + 2z = 6 \\ 3v + 3w + z = 4 \\ 2u + 7v + 9w + 7z = 8 \\ 6w + 5z = -4 \end{cases}$

als $A.x = b$ schreiben: $x = [u \;\; v \;\; w \;\; z]^T$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 9 & 7 \\ 0 & 0 & 6 & 5 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 8 \\ -4 \end{bmatrix}$$

- Gauss - Elimination:

(1) die 3. Zeile durch die 1 Zeile ersetzen:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 9 & 7 \\ 0 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 5 \end{bmatrix}, \quad b_1 = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 6 \\ -4 \end{bmatrix}$$

(2) die 4 Zeile durch die 3. Zeile ersetzen:

$$A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 9 & 7 \\ 0 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 5 \\ 2 & 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ -4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

(3) die 1 Zeile von der 4 Zeile abziehen:

$$A_3 = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 9 & 7 \\ 0 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 5 \\ 0 & -3 & -9 & -5 \end{bmatrix}, \quad b_3 = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ -4 \\ -2 \end{bmatrix}$$

(4) die 2. Zeile mit der 4. addieren:

$$A_4 = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 9 & 7 \\ 0 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & -6 & -4 \end{bmatrix}, \quad b_4 = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

(5) die 3. Zeile mit der 4 addieren:

$$A_5 = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 9 & 7 \\ 0 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = U \quad \text{und} \quad b_5 = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ -4 \\ -2 \end{bmatrix} = c \; //$$

umgeschriebenes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 2u + 7v + 9w + 7z &= 8 \\ 3v + 3w + z &= 4 \\ 6w + 5z &= -4 \\ z &= -2 \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} & z = -2 \; // \\ & w = (-4 - 5z)/6 = 1 \; // \\ & v = (4 - 3w - z)/3 = 1 \; // \\ & u = (8 - 7v - 9w - 7z)/2 = 3 \; // \end{aligned}$$

* Determinante ändert sich nicht bei: addition eines skalaren Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile.
* Nur Vorzeichen der Determinante ändert sich bei vertauschen zweier Zeilen:

↳ die Zeilen zweimal ((1) und (2)) ausgetauscht wurden, bleibt das Signal der Determinante dasselbe.

* Determinante einer oberen oder unteren Dreiecksmatrix = Produkt der Diagonaleinträge:

$$\det(A) = \det(U) = 2 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 1 = 36 \;//$$

Aufgabe 1.3: 1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ und 2. $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

* Gauss-Jordan-Methode:

$$1.\ [A \;\; id] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

obere Dreiecksmatrix

$$= [id \;\; A^{-1}] \quad \therefore \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \;//$$

$$2.\ [A \;\; id] = \left[\begin{array}{cc|cc} \cos\theta & -\sin\theta & 1 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\cdot \sin\theta/\cos\theta} \rightarrow \theta \neq \pi/2,\ \theta \neq -\pi/2$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} \cos\theta & -\sin\theta & 1 & 0 \\ 0 & \frac{\cos^2\theta + \sin^2\theta}{\cos\theta} & \frac{-\sin\theta}{\cos\theta} & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\cdot\cos\theta} \left[\begin{array}{cc|cc} \cos\theta & -\sin\theta & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\sin\theta & \cos\theta \end{array}\right] \xrightarrow{\oplus \cdot \sin\theta}$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} \cos\theta & 0 & 1 - \sin^2\theta = \cos^2\theta & \cos\theta\sin\theta \\ 0 & 1 & -\sin\theta & \cos\theta \end{array}\right] \xrightarrow{\cdot 1/\cos\theta} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & 1 & -\sin\theta & \cos\theta \end{array}\right] =$$

$$= [id \;\; A^{-1}] \quad \therefore \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \;//$$

Für den Fall $\theta = \pi/2$:

$$[A \ \ id] = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\oplus} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\ominus}$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\oplus} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] = [id \ \ A^{-1}]$$

* Der gleiche Verfahren für $\theta = -\pi/2$.

Aufgabe 1.4

$u = [1 \ 1 \ 3]$, $v = [2 \ 3 \ 6]$, $w = [1 \ 4 \ 3]$

- Sind die Vektoren linear unabhängig?

$$\det(A) = \det([u^T \ v^T \ w^T]) = \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 3 \end{bmatrix}\right) =$$

$$= 1.3.3 + 2.4.3 + 1.6.1 - 3.3.1 - 6.4.1 - 1.2.3 =$$

$$= 9 + 24 + 6 - 9 - 24 - 6 = 0 \quad \therefore$$

- u, v, w sind linear abhängig, dann bilden sie keine Basis für $\mathbb{R}^3$.

Überprüfung: Der Vektor v kann als eine Kombination von u und w geschrieben werden:

- $v = \frac{5}{3}.u + \frac{1}{3} w = [5/3 \ \ 5/3 \ \ 5] + [1/3 \ \ 4/3 \ \ 1] = [2 \ \ 3 \ \ 6]$ ✓

Aufgabe 1.5

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{(-1)^{i+j} \det(A \text{ ohne Zeile } i, \text{ ohne Spalt } j)}_{\text{Kofaktor}} . A_{i,j}$$

$$\det A = (-1)^{1+1}.\det\left(\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}\right).A_{1,1} + (-1)^{1+2}\det\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}\right).A_{1,2} +$$

$$+ (-1)^{1+3}.\det\left(\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) A_{1,3} = (-1)^{2+1}.\det\left(\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}\right) A_{2,1} + (-1)^{2+2}\det\left(\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}\right) A_{2,2} +$$

$$+ (-1)^{2+3}\det\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) A_{2,3} = (-1)^{3+1}.\det\left(\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}\right) A_{3,1} +$$

$$+(-1)^{3+2}\cdot\det\left(\begin{bmatrix}1&3\\0&0\end{bmatrix}\right)\cdot A_{3,2}+(-1)^{3+3}\cdot\det\left(\begin{bmatrix}1&2\\0&4\end{bmatrix}\right)A_{3,3}=$$

$$=1\cdot 20\cdot A_{1,1}+(-1)\cdot 0\,A_{1,2}+1\,0\,A_{1,3}=(-1)\cdot 10\cdot A_{2,1}+$$

$$+1\cdot 5\cdot A_{2,2}+(-1)\cdot 0\cdot A_{2,3}=1\cdot(-12)\cdot A_{3,1}+(-1)\cdot 0\,A_{3,2}+1\cdot 4\,A_{3,3}$$

Kofaktoren: $C_{11}=20,\quad C_{12}=0,\quad C_{13}=0$
$C_{21}=-10,\quad C_{22}=5,\quad C_{23}=0$
$C_{31}=-12,\quad C_{32}=0,\quad C_{33}=4$

$$\det(A)=20\cdot 1+0\cdot 2+0\cdot 3=20$$
$$=-10\cdot 0+5\cdot 4+0\cdot 0=20$$
$$=-12\cdot 0+0\cdot 0+4\cdot 5=20$$

✓

$$B=\begin{bmatrix}C_{11}&C_{21}&C_{31}\\C_{12}&C_{22}&C_{32}\\C_{13}&C_{23}&C_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}20&-10&-12\\0&5&0\\0&0&4\end{bmatrix}$$

✓

$$A\cdot B=\begin{bmatrix}1&2&3\\0&4&0\\0&0&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}20&-10&-12\\0&5&0\\0&0&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}20&0&0\\0&20&0\\0&0&20\end{bmatrix}=id\cdot\underset{\det(A)}{\overset{\shortparallel}{20}}$$

$$A\cdot B=id\cdot\det(A)=\det(A)\cdot id\rightarrow\cdot\ {}^{1}/_{\det(A)}\quad(\det(A)\neq 0)$$

$$A\cdot\frac{B}{\det(A)}=id\ \therefore\ A^{-1}=\frac{B}{\det(A)}=\begin{bmatrix}1&-1/2&-3/5\\0&1/4&0\\0&0&1/5\end{bmatrix}$$ ✓

Aufgabe 1.6

$$A=\begin{bmatrix}1&-1\\2&4\end{bmatrix}$$

Eigenwerte: $\det(A-\lambda\, id)=0$

$$\det\left(\begin{bmatrix}1-\lambda&-1\\2&4-\lambda\end{bmatrix}\right)=(1-\lambda)(4-\lambda)-(-1)\cdot 2=$$

$$=4-\lambda-4\lambda+\lambda^2+2=\lambda^2-5\lambda+6\longrightarrow\boxed{\begin{matrix}\lambda_1=2\\\lambda_2=3\end{matrix}}\ //$$

$$Av=\lambda v\rightarrow\lambda_1=2\rightarrow(A-\lambda_1\, id)\cdot v_1=0$$

$$\begin{bmatrix}-1&-1\\2&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_{11}\\v_{12}\end{bmatrix}=0\qquad v_{11}=-v_{12}\ \therefore\ v_1=[1\quad -1]$$

$(A-\lambda_2\, id)\, v_2 = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{bmatrix} = 0 \rightarrow v_{21} = -\frac{v_{22}}{2}$

$v_2 = [1 \quad -2]$

$$\left\{\begin{array}{l} Spur(A) = \sum_{j=1}^{n} A_{jj} = \sum_{j=1}^{2} A_{jj} = 1+4 = 5 \,/\!/ \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 5 \,/\!/ \quad \checkmark \qquad Spur(A) = \lambda_1 + \lambda_2 \end{array}\right.$$

$det(A) = 1.4 - (-1).2 = 4+2 = 6 \quad \checkmark$

$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 6 \qquad det(A) = \lambda_1 . \lambda_2$

$B = A - 7 . id = \begin{bmatrix} -6 & -1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$

Eigenwerte: $det(B - \lambda I) = 0$

$det(B-\lambda I) = det\left(\begin{bmatrix} -6-\lambda & -1 \\ 2 & -3-\lambda \end{bmatrix}\right) = (-6-\lambda)(-3-\lambda) + 2$

$= 18 + 6\lambda + 3\lambda + \lambda^2 + 2 = \lambda^2 + 9\lambda + 20$

$\lambda_{B1,2} = \frac{-9 \pm \sqrt{9^2 - 4.20}}{2} \Rightarrow \lambda_{B1} = -4 \,,\ \lambda_{B2} = -5 \,/\!/$

Eigenvektoren: $(B - \lambda_{B1}\, id). v_{B1} = 0$

$\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{B11} \\ v_{B12} \end{bmatrix} = 0 \qquad v_{B11} = -\frac{v_{B12}}{2} \qquad v_{B1} = [1 \quad -2]$

$(B - \lambda_{B2}\, id)\, v_{B2} = 0$

$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{B21} \\ v_{B22} \end{bmatrix} = 0 \,,\ v_{B21} = -v_{B22} \rightarrow v_{B2} = [1 \quad -1]$

* Der Eigenvektoren bleibt derselbe!

* Die Eigenwerte wurden mit demselben Faktor (-7) addiert, mit dem die id-Matrix multipliziert wird.

* Beweis, dass die Determinante gleich der Multiplikation der Eigenwerte ist:

$$\det(A-\lambda I) = p(\lambda) = (\lambda_1-\lambda)(\lambda_2-\lambda)\dots(\lambda_n-\lambda)$$

↳ faktorisiertes Polynom

Da λ eine Variable ist, wählen wir $\lambda = 0$, ∴

$$\det(A-0.I) = \det(A) = (\lambda_1-0)(\lambda_2-0)\dots(\lambda_n-0)$$

$$\det(A) = \lambda_1 . \lambda_2 \dots \lambda_n \quad //$$

Beweis, dass die Spur gleich der Summe der Eigenwerte:

$$\det(A-\lambda I) = p(\lambda) = (\lambda_1-\lambda)(\lambda_2-\lambda)\dots(\lambda_n-\lambda)$$

$$= (-1)^n(\lambda^n - \lambda^{n-1}(\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_n) + \dots + (-1)^n(\lambda_1\lambda_2\dots\lambda_n)$$

$$= (-1)^n(\lambda^n - \lambda^{n-1}(\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_n) + \dots + (-1)^n\det(A)) \quad (\mathrm{I})$$

$$\det(A-\lambda I) = \det\begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{bmatrix} =$$

$$= (-1)^{1+1}.(a_{11}-\lambda).\det(\underset{n\times n}{M_{11}}) + (-1)^{1+2}a_{12}\det(M_{12}) + \dots$$
$$+ (-1)^{1+n}.a_{1n}.\det(M_{1n})$$

$$= (-1)^{1+1}.(a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)\det(\underset{n-1\times n-1}{M_{22}^*}) + (-1)^{1+2}a_{12}.\det(M_{12}) + \dots$$
$$+ (-1)^{1+n}.a_{1n}\det(M_{1n})$$

$$= (a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)(a_{33}-\lambda)\dots(a_{nn}-\lambda) + \dots + (-1)^{1+n}a_{1n}\det(M_{1n})$$

$$= (-1)^n.(\lambda^n - \lambda^{n-1}(a_{11}+a_{22}+\dots+a_{nn}) + p(\lambda^{n-2})) \quad (\mathrm{II})$$

Der Vergleich der beiden Koeffizienten für den Term λ^{n-1} ergibt:

$$(a_{11}+a_{22}+\dots+a_{nn}) = \mathrm{Spur}(A) = (\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_n) \quad //$$

Aufgabe 1.7

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Dimension: $\underline{n = 4}$

$$\begin{cases} r_A = \text{rang}(A) = 1 & \text{nur eine linear-unabhängige Spalte} \\ r_C = \text{rang}(C) = 2 & \text{nur zwei linear-unabhängige Spalte} \end{cases}$$

$$\det(A - \lambda\, id) = \det\left(\begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-\lambda \end{bmatrix}\right) =$$

$$= (-1)^2 (1-\lambda)\left((1-\lambda)^3 + 2 - 3(1-\lambda)\right) + (-1)^3 (1)\left((1-\lambda)^2 + 1 - 2(1-\lambda)\right)$$
$$+ (-1)^4 (1)\left((1-\lambda) + (1-\lambda) + 1 - 1 - (1-\lambda)^2 - 1\right) +$$
$$+ (-1)^5 (1)\left(1 + (1-\lambda)^2 + 1 - 1 - 2(1-\lambda)\right)$$

$$= (1-\lambda)\left((1-\lambda)^3 + 2 - 3(1-\lambda)\right) - (1-\lambda)^2 - 1 + 2(1-\lambda) +$$
$$2(1-\lambda) - 1 - (1-\lambda)^2 - (1-\lambda)^2 - 1 + 2(1-\lambda)$$
$$= (1-\lambda)^4 - 6(1-\lambda)^2 + 8(1-\lambda) - 3$$
$$= (1 + \lambda^2 - 2\lambda)^2 - 6(1 + \lambda^2 - 2\lambda) + 8 - 8\lambda - 3$$
$$= \cancel{1} + \cancel{\lambda^2} - \cancel{2\lambda} + \cancel{\lambda^2} + \lambda^4 - 2\lambda^3 - \cancel{2\lambda} - \lambda^3 \cdot 2 + \cancel{4\lambda^2} - \cancel{6} - \cancel{6\lambda^2} + \cancel{12\lambda} +$$
$$+ \cancel{8} - \cancel{8\lambda} - \cancel{3} = \lambda^4 - 4\lambda^3 \Rightarrow \lambda_{1,2,3} = 0, \; \lambda_4 = 4$$

Eigenvektoren:

$$(A - \lambda\, id)\, v = 0 \to (A - \lambda_4\, id) \cdot v = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} 3v_1 = v_2 + v_3 + v_4 \\ 3v_2 = v_1 + v_3 + v_4 \\ 3v_3 = v_1 + v_2 + v_4 \\ 3v_4 = v_1 + v_2 + v_3 \end{cases} \Rightarrow v_1 = v_2 = v_3 = v_4 \to v = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$$

↳ Für Einsermatrix $A_{n\times n}$: $rang(A_{n\times n}) = 1$ immer → nur eine linear-unabhängige Spalte

$Spur(A) = 1+1+\ldots+1 = n = \underbrace{\lambda_1+\lambda_2+\ldots}_{(n-1)\lambda=0}+\lambda_n = \lambda_n \therefore \underline{\lambda_n = n}$

algebr. Vielfachheit ← $(n-1)\lambda=0$

$$\det(C-\lambda\, id) = \det\left(\begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -\lambda \end{bmatrix}\right) =$$

$$= (-1)^2 (-\lambda)(-\lambda^3+\lambda+\lambda) + (-1)^3 (\lambda^2+1-1+\lambda) +$$

$$+ (-1)^4 \cdot 0 \cdot (-\lambda-\lambda) + (-1)^5 (1)(1+\lambda^2-1)$$

$$\det(C-\lambda\, id) = \lambda^4 - 2\lambda^2 - \lambda^2 - \lambda - \lambda^2 = \lambda^4 - 4\lambda^2 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = 0 \quad , \quad \lambda_{3,4} = \pm 2$$

Eigenvektoren:

$$(C-\lambda\, id)v = 0 \rightarrow (C-\lambda_3 \cdot id)v_3 = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{31} \\ v_{32} \\ v_{33} \\ v_{34} \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} v_{31} = (v_{32}+v_{34})/2 \\ v_{32} = (v_{31}+v_{33})/2 \\ v_{33} = (v_{32}+v_{34})/2 \\ v_{34} = (v_{31}+v_{33})/2 \end{cases} \rightarrow v_{31} = v_{32} = v_{33} = v_{34}$$

$$v_3 = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1]^T \,/\!/$$

$$(C-\lambda_4\, id)v_4 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{41} \\ v_{42} \\ v_{43} \\ v_{44} \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} v_{41} = -(v_{42}+v_{44})/2 \\ v_{42} = -(v_{41}+v_{43})/2 \\ v_{43} = -(v_{42}+v_{44})/2 \\ v_{44} = -(v_{41}+v_{43})/2 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} v_{43} = -v_{44} \\ v_{41} = v_{43} \\ v_{42} = v_{44} \\ v_{44} = -v_{41} \end{matrix} \rightarrow v_4 = [1 \quad -1 \quad 1 \quad -1]^T$$

↳ Für Schachbrettmatrix $C_{n\times n}$: $rang(C_{n\times n}) = 2$ $(n>2)$ immer → nur zwei linear-unabhängige Spalte.

$Spur(C) = 0 = \underbrace{\lambda_1+\lambda_2+\ldots+}_{(n-2)\cdot\lambda=0}\lambda_{n-1}+\lambda_n \Rightarrow \lambda_{n-1} = -\lambda_n \,/\!/$

algebr. Vielfachheit ← $(n-2)\cdot\lambda=0$

Eigenwerte von $C_{n\times n} \Rightarrow \lambda_{1,\ldots,n-2} = 0$, $\lambda_{n-1} = -\lambda_n$

Eigenwerte von $C_{n\times n} + I_{n\times n} \Rightarrow \lambda_{1,\ldots,n-2} = 1$, $\lambda_{n-1}+1$, λ_n+1

$$\det(C_{nn} - \tfrac{n}{2} id) = \det\begin{bmatrix} -n/2 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 1 & -n/2 & 1 & \ldots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \\ 1 & 0 & 1 & \ldots & 1 & -n/2 \end{bmatrix} \overset{*}{=} \det\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & -n/2 & 1 & \ldots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & & & \\ 1 & 0 & 1 & \ldots & 1 & -n/2 \end{bmatrix} = 0$$

(für gerades n)

* Summe aller Zeilen mit der ersten Zeilen

$\det(C_{n\times n} - \frac{n}{2}\,id) = 0$, $\rightarrow$ Eigenwerte: $\begin{cases} \lambda_n - n/2 \\ \lambda_{n-1} - n/2 \\ (n-2) \text{ mal } \lambda = -n/2 \end{cases}$
(wie in Aufg. 1.6 dargestellt)

$\det(C_{n\times n} - \frac{n}{2}\,id) = \left(-\frac{n}{2}\right)^{(n-2)} \cdot (\lambda_{n-1} - n/2)(\lambda_n - n/2) = 0 \;\therefore$

$(\lambda_{n-1} - n/2)(\lambda_n - n/2) = 0$, $\lambda_{n-1} = -\lambda_n \;\therefore\; \lambda_n^2 = \frac{n^2}{4}$

$\Rightarrow \lambda_{n,n-1} = \pm n/2$ //

Aufgabe 1.8

$T^{-1}AT = D$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Eigenwerte: $\det(A - \lambda I) = 0$

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)^2(2-\lambda) - (1-\lambda) - (1-\lambda) =$$

$$= (1 - 2\lambda + \lambda^2)(2-\lambda) - 2 + 2\lambda =$$

$$= 2 - 4\lambda + 2\lambda^2 - \lambda + 2\lambda^2 - \lambda^3 - 2 + 2\lambda =$$

$$= -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 3\lambda = 0, \quad \lambda_1 = 0$$

$\lambda^2 + 4\lambda - 3 = 0$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 1$ //

Eigenvektoren: $(A - \lambda_1\, id)v_1 = 0$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \\ v_{13} \end{bmatrix} = 0 :$$

$v_{11} - v_{12} = 0 \rightarrow v_{11} = v_{12}$
$v_{13} - v_{12} = 0 \rightarrow v_{13} = v_{12}$
$2v_{12} = v_{11} + v_{13}$

$v_1 = [1 \;\; 1 \;\; 1]$ //

$(A - \lambda_2\, id)v_2 = 0 \rightarrow \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{21} \\ v_{22} \\ v_{23} \end{bmatrix} = 0$

$\begin{cases} v_{21} = -v_{22}/2 \\ v_{22} = -(v_{21} + v_{23}) \\ v_{23} = -v_{22}/2 \end{cases}$ $v_2 = [1 \;\; -2 \;\; 1]$

$(A - \lambda_3\, id)v_3 = 0 \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} -v_{32} = 0 \\ v_{31} = -v_{33} \end{matrix}$

$v_3 = [1 \;\; 0 \;\; -1]$ //

$$T = [v_1 \; v_2 \; v_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad , \quad \det(T) = 2 + 1 + 2 + 1 = 6$$

Kofaktoren T:

$$C_{11} = -2 \quad C_{12} = 1 \quad C_{13} = 3$$
$$C_{21} = 2 \quad C_{22} = -2 \quad C_{23} = 0$$
$$C_{31} = 2 \quad C_{32} = 1 \quad C_{33} = 3$$

$$T^{-1} = \frac{1}{\det(T)} \begin{bmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2/6 & 2/6 & 2/6 \\ 1/6 & -2/6 & 1/6 \\ 3/6 & 0 & -3/6 \end{bmatrix}$$

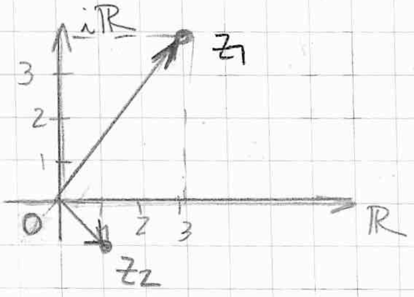
$$T^{-1} A \, T = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/6 & -1/3 & 1/6 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

diagonal

$T^{-1} A T = \Lambda \Rightarrow \Lambda \to$ Eigenwertmatrix.

Aufgabe 1.9 $z_1 = 3 + 4i$, $z_2 = 1 - i$

(i)



ii) $z_1 + z_2 = (3+1) + (4-1)i$

$z_1 + z_2 = 4 + 3i$ //

$z_1 \cdot z_2 = (3+4i)(1-i) =$

$= 3 - 3i + 4i - 4\underbrace{i^2}_{=-1} = 7 + i$ //

$$z_1 / z_2 = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{1+1} = \frac{(3+4i)(1+i)}{2} = \frac{3 + 3i + 4i + 4i^2}{2} = \frac{-1 + 7i}{2}$$

(iii) $\bar{z}_1 = 3 - 4i$, $\bar{z}_2 = 1 + i$

$$\begin{cases} |z_1| = (3^2 + 4^2)^{1/2} = (9+16)^{1/2} = 5 \\ |z_2| = (1^2 + (-1)^2)^{1/2} = 2^{1/2} \cong 1,4142 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varphi_1 = \arctan(b/a) = \arctan(4/3) = 0,9273 \text{ rad } (53,13°) \\ \varphi_2 = \arctan(-1/1) = -0,7854 \text{ rad } (-45°) \end{cases}$$

Aufgabe 1.10 $|(a_1+ib_1)(a_2+ib_2)| = |a_1+ib_1||a_2+ib_2|$

- $|(a_1+ib_1)(a_2+ib_2)| = |(a_1a_2 + a_1b_2i + a_2b_1i + b_1b_2i^2)|$
  $= |(a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_1b_2 + a_2b_1)| = ((a_1a_2-b_1b_2)^2 + (a_1b_2+a_2b_1)^2)^{1/2}$
- $|a_1+ib_1||a_2+ib_2| = (a_1^2+b_1^2)^{0,5} \cdot (a_2^2+b_2^2)^{0,5} =$
  $= (a_1^2a_2^2 + a_2^2b_1^2 + a_1^2b_2^2 + b_1^2b_2^2)^{0,5} = ((a_1a_2-b_1b_2)^2 + (a_1b_2+a_2b_1)^2)^{1/2}$

$\therefore \quad |(a_1+ib_1)(a_2+ib_2)| = |a_1+ib_1||a_2+ib_2|$

- $|(r_1e^{i\phi_1})(r_2e^{i\phi_2})| = |r_1r_2e^{i(\phi_1+\phi_2)}| = |r_1r_2| = r_1r_2$

Aufgabe 1.11 $x = [2-4i \quad 4i]^T \quad y = [2+4i \quad 4]^T$

Betrag: $\|x\| = (x^Hx)^{1/2} = \left((2+4i \quad -4i)\begin{pmatrix}2-4i\\4i\end{pmatrix}\right)^{0,5} = ((2+4i)(2-4i) - 16i^2)^{0,5}$

$\|x\| = (4-16i^2-16i^2)^{0,5} = (4+32)^{0,5} = 6$ //

$\|y\| = (y^Hy)^{1/2} = \left((2-4i \quad 4)\begin{pmatrix}2+4i\\4\end{pmatrix}\right)^{0,5} = ((2-4i)(2+4i)+16)^{0,5} =$

$= (4-16i^2+16)^{0,5} = 6$ //

Skalarproduct: $x^H y = (2+4i \quad -4i)\begin{pmatrix}2+4i\\4\end{pmatrix} = (2+4i)^2 - 16i =$

$= 4 + 16i^2 + 16i - 16i = -12$ //

Aufgabe 1.12 $\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 1, \quad v_1 = [1 \quad 2]^T, \quad v_2 = [2 \quad -1]^T$

Die Matrix A ist symmetrisch, weil die Eigenvektoren orthogonal sind und die Eigenwerte unterschiedliche Werte haben.

Orthogonal Vektoren: $\langle v_1, v_2 \rangle = v_1^T v_2 = 0$
(Skalarprodukt)

Symmetriche Matrix: $A = A^T$

* Beweis: $Av_1 = \lambda_1 v_1 \xrightarrow{\cdot v_2^T} v_2^T A v_1 = \lambda_1 v_2^T v_1$ (I)

$Av_2 = \lambda_2 v_2 \xrightarrow[\cdot v_1^T]{} v_1^T A v_2 = \lambda_2 v_1^T v_2$ (II)

(II) → transponieren → $(v_1^T A v_2)^T = (\lambda_2 v_1^T v_2)^T =$ (orthogonal)

$= v_2^T A^T v_1 = \lambda_2 \underbrace{v_2^T v_1}_{=0}$ (III)

(I) − (III) $= v_2^T A v_1 - v_2^T A^T v_1 = (\lambda_1 - \lambda_2)\, v_2^T v_1 = (\lambda_1 - \lambda_2)\langle v_2, v_1\rangle$

$\therefore\ v_2^T A v_1 = v_2^T A^T v_1 \rightarrow A = A^T \rightarrow$ A ist symmetrisch

Berechnung von A: $A = T \Lambda T^{-1}$

(ähnlich wie die Aufgabe 1.8)

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix},\quad T^{-1} = \frac{1}{\det(T)} \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/5 & 2/5 \\ 2/5 & -1/5 \end{bmatrix}$$

$$A = T \Lambda T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/5 & 2/5 \\ 2/5 & -1/5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/5 & -2/5 \\ -2/5 & 1/5 \end{bmatrix} //$$

Berechnung von A^2: $A^2 = A\,A = (T\Lambda T^{-1})(T\Lambda T^{-1})$

$$A^2 = T \Lambda \underbrace{T^{-1} T}_{= id} \Lambda T^{-1} = T \Lambda^2 T^{-1}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0^2 & 0 \\ 0 & 1^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/5 & 2/5 \\ 2/5 & -1/5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/5 & -2/5 \\ -2/5 & 1/5 \end{bmatrix} //$$

$A^2 = A$ //

→ Allgemein: $A^n = T \Lambda^n T^{-1}$

Beweis: $A^n = A.A \ldots A = (T\Lambda T^{-1})(T\Lambda T^{-1}) \ldots (T\Lambda T^{-1}) =$

$$= T \Lambda \underbrace{T^{-1} T}_{id} \Lambda \underbrace{T^{-1} \ldots}_{id} \underbrace{\ldots T}_{id} \Lambda T^{-1} = T \Lambda^n T^{-1} //$$

//