Universität der Bundeswehr München

Steuer- und Regelungstechnik

5. Übung

Victor Cheidde Chaim

13. Februar 2023

Universität der Bundeswehr München, LRT-15 Institut für Steuer- und Regelungstechnik

Aufgabe 5.1

Gegeben sei die Matrix A, berechnen Sie $\exp(At)$.

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 1 \\ -3 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Eigenwerte: $\det(A - \lambda\, id) = 0$

$$\det(A - \lambda\, id) = \det \begin{pmatrix} -4-\lambda & 0 & 0 \\ 3 & -4-\lambda & 1 \\ -3 & 0 & -4-\lambda \end{pmatrix} = (-4-\lambda)^3 = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda_{1,2,3} = -4}$$

EW - Verschiebungstrick

Aufgabe 5.1

$$A = \lambda\, id + (A - \lambda\, id) \qquad \lambda_{1,2,3} = -4,$$

$$\exp(At) = \exp((\lambda\, id + (A - \lambda\, id))t) = \underbrace{\exp(\lambda\, id\, t)}_{e^{\lambda t}} \cdot \exp((A - \lambda\, id)t)$$

$$\exp(\lambda\, id\, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda\, id)^n t^n}{n!} = id \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n . t^n}{n!} = id\, e^{\lambda t} = id . e^{-4t}$$

Eigenwerte:

$$A - \lambda\, id = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 1 \\ -3 & 0 & -4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det((A - \lambda\, id) - \alpha . id) = \det \begin{pmatrix} -\alpha & 0 & 0 \\ 3 & -\alpha & 1 \\ -3 & 0 & -\alpha \end{pmatrix} = -\alpha^3 = 0 \Rightarrow \text{nilpotent!}$$

$$\exp((A - \lambda\, id)t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(A - \lambda\, id)^n . t^n}{n!}$$

Aufgabe 5.1

$$\exp\left((A-\lambda \mathrm{id})t\right) = \mathrm{id} + (A-\lambda \mathrm{id})t + \frac{(A-\lambda \mathrm{id})^2 t^2}{2} + \dots$$

$$(A-\lambda \mathrm{id})^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad //$$

$$(A-\lambda \mathrm{id})^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0_{3\times 3}$$

$$(A-\lambda \mathrm{id})^m = 0, \quad m \geq 3.$$

$$\exp\left((A-\lambda \mathrm{id})t\right) = \mathrm{id} + (A-\lambda \mathrm{id})t + \frac{(A-\lambda \mathrm{id})^2 \cdot t^2}{2} \quad //$$

Aufgabe 5.1

$$\exp((A-\lambda id)t) = id + (A-\lambda id)t + \frac{(A-\lambda id)^2 \cdot t^2}{2} \quad //$$

$$(A-\lambda id) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (A-\lambda id)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\exp((A-\lambda id)t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3t & 0 & t \\ -3t & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\frac{3t^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3t - \frac{3}{2}t^2 & 1 & t \\ -3t & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad //$$

Aufgabe 5.1

$$\exp((A-\lambda\,\mathrm{id})t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3t-\frac{3}{2}t^2 & 1 & t \\ -3t & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \exp(\lambda\,\mathrm{id}\,t) = \mathrm{id}\cdot e^{-4t}$$

$$\exp(At) = \exp(\lambda\,\mathrm{id}\,t)\exp((A-\lambda\,\mathrm{id})t) = e^{-4t}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3t-\frac{3}{2}t^2 & 1 & t \\ -3t & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\exp(At) = \begin{bmatrix} e^{-4t} & 0 & 0 \\ e^{-4t}(3t-\frac{3}{2}t^2) & e^{-4t} & t\cdot e^{-4t} \\ -3e^{-4t}\cdot t & 0 & e^{-4t} \end{bmatrix}$$

Aufgabe 5.2

Gegeben sei ein vom Parameter k abhängendes Polynom p durch $p(s) = s^3 + ks^2 + (1 + k)s + \underline{\underline{6}}$. Für welche Werte des Parameters k ist das Polynom ein Hurwitz-Polynom?

1. Bedingung: Alle Koeffizienten c_0, c_1, c_2 und c_3 mit denselben Vorzeichen.

$c_0 = 6, \quad c_1 = 1+k, \quad c_2 = k, \quad c_3 = 1 \quad ∴$

$c_1 > 0: \quad c_1 = 1 + k > 0 \iff k > -1$

$c_2 > 0: \quad c_2 = k > 0 \iff \boxed{k > 0}$ stärker als

Aufgabe 5.2

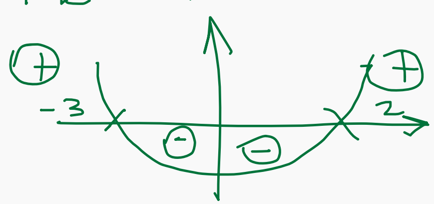
2. Bedingung: Hauptabschnittsdeterminante von $H > 0$.

$$H = \begin{bmatrix} c_1 & c_3 & c_5 \\ c_0 & c_2 & c_4 \\ 0 & c_1 & c_3 \end{bmatrix} = \begin{array}{ccc} D_1 & D_2 & D_3 \\ \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} (1+k) & 1 & 0 \\ 6 & k & 0 \\ 0 & (1+k) & 1 \end{bmatrix}$$

$D_1 > 0$: $D_1 = 1 + k > 0$, $k > -1$ ($k > 0$ ist stärker)

$D_2 > 0$: $D_2 = k(1+k) - 6 = k^2 + k - 6 > 0$

$$k_0 = \frac{-1 \pm 5}{2} \Rightarrow \begin{array}{l} k_{01} = -3 \\ k_{02} = 2 \end{array}$$



$k^2 + k - 6 > 0$ wenn $\underline{k < -3}$ oder $\boxed{k > 2}$

nicht möglich (1. Bedingung $k > 0$)

stärker als $k > 0$

$D_3 > 0$: $D_3 = (-1)^{3+3} \cdot 1 \cdot D_2 = D_2 \Rightarrow \boxed{k > 2}$

$\boxed{p(s) \text{ ist Hurwitz für } k > 2.}$

Aufgabe 5.3

Gegeben ist das Zustandssystem

$$\dot{x} = Ax + Bu,$$
$$y = Cx + Du,$$

mit den Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & 0 \\ 5 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, D = 0.$$

1. Betrachten Sie $a_2 = 0$. Für welche Werte der Parameter a_1 ist das Zustandssystem asympotisch stabil?

Aufgabe 5.3

1) $a_2 = 0$. $A_1 = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -4 \end{bmatrix}$

Eigenwerte von A: $\det(A - \lambda\, id) = 0$

$$\det \begin{bmatrix} a_1-\lambda & 0 & 0 \\ 5 & -1-\lambda & 2 \\ -1 & 0 & -4-\lambda \end{bmatrix} = (a_1-\lambda)(-1-\lambda)(-4-\lambda) = 0$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = -4 \\ \lambda_2 = -1 \\ \lambda_3 = a_1 \end{cases}$$

Bedingung: Für alle λ von A gilt $Re(\lambda) < 0$

$\lambda_1 = -4 < 0$ ✓, $\lambda_2 = -1 < 0$ ✓, $\lambda_3 = a_1 < 0$ ✓.

ZS asymptotisch stabil für $a_1 < 0$. //

Aufgabe 5.3

Gegeben ist das Zustandssystem

$$\dot{x} = Ax + Bu,$$
$$y = Cx + Du,$$

mit den Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & 0 \\ 5 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, D = 0.$$

2. Betrachten Sie $a_2 = 10$. Für welche Werte der Parameter a_1 ist das Zustandssystem asympotisch stabil?

Aufgabe 5.3

2) $a_2 = 10 \Rightarrow A = \begin{bmatrix} a_1 & 10 & 0 \\ 5 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -4 \end{bmatrix}$

$p(s)$: charakteristisches Polynom von A

$$p(s) = \det(s\,id - A) = \det \begin{bmatrix} s-a_1 & -10 & 0 \\ -5 & s+1 & -2 \\ 1 & 0 & s+4 \end{bmatrix} =$$

$$= (s-a_1)(s+1)(s+4) + 20 - 50(s+4)$$

$$p(s) = (s-a_1)(s^2+5s+4) + 20 - 50s - 200 = s^3 + 5s^2 + 4s - a_1 s^2 - 5a_1 s - 4a_1 - 180 - 50s$$

$$p(s) = s^3 + s^2(5-a_1) + s(-46-5a_1) + (-4a_1 - 180)$$

Aufgabe 5.3

$$P(s) = s^3 + s^2(5-a_1) + s(-46-5a_1) + (-4a_1 - 180)$$

1. Bedingung: Alle Koeffizienten mit demselben VZ.

$$c_0 = -4a_1 - 180, \quad c_1 = -5a_1 - 46, \quad c_2 = 5 - a_1, \quad \underline{c_3 = 1}$$

$c_0 > 0$: $\quad -4a_1 - 180 > 0, \quad -4a_1 > 180 \Leftrightarrow \boxed{a_1 < -45}$

$c_1 > 0$: $\quad -5a_1 - 46 > 0, \quad -5a_1 > 46 \Leftrightarrow a_1 < -46/5$

$c_2 > 0$: $\quad 5 - a_1 > 0, \quad -a_1 > -5 \Leftrightarrow a_1 < 5$

* stärkste Ungleichung: $\boxed{a_1 < -45}$

(wenn $a_1 < -45$, dann sind $a_1 < 5$ und $a_1 < -46/5$ auch wahr).

Aufgabe 5.3

2. Bedingung: Hauptabschnittsdeterminante von $H > 0$

$$H = \begin{bmatrix} c_1 & c_3 & c_5 \\ c_0 & c_2 & c_6 \\ 0 & c_1 & c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5a_1-46 & 1 & 0 \\ -180-4a_1 & 5-a_1 & 0 \\ 0 & -5a_1-46 & 1 \end{bmatrix}$$

D_1, D_2, D_3

$D_1 > 0$: $D_1 = -5a_1 - 46 > 0$, $a_1 < -46/5$ ($a < -45$ stärker)

$D_2 > 0$: $D_2 = (5a_1-46)(5-a_1) - (-180-4a_1)\cdot 1 =$

$= -25a_1 + 5a_1^2 - 5\cdot 46 + 46\cdot a_1 + 180 + 4a_1 =$

$= 5a_1^2 + 25a_1 - 50 > 0$

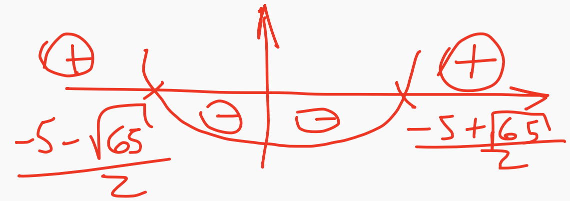
Wurzeln: $5a_1^2 + 25a_1 - 50 = 0 \xrightarrow{\div 5} a_1^2 + 5a_1 - 10 = 0$

$a_{10} = \dfrac{-5 \pm \sqrt{25+40}}{2}$

Aufgabe 5.3

Wurzeln: $5a_1^2 + 25a_1 - 50 = 0 \xrightarrow{\div 5} a_1^2 + 5a_1 - 10 = 0$

$$a_{1,0} = \frac{-5 \pm \sqrt{25+40}}{2}$$



$k < \frac{-5-\sqrt{65}}{2}$ oder $k > \frac{-5+\sqrt{65}}{2}$ (nicht möglich, 1. Bedingung: $k < -45$)

($a_1 < -45$ stärker)

$D_3 > 0$: $D_3 = (-1)^{(3+3)} \cdot 1 \cdot D_2 = D_2$

$p(s)$ ist Hurwitz für $a_1 < -45$. Das bedeutet, dass das ZS für $a_1 < -45$ asympt. stabil ist.

Aufgabe 5.3

Gegeben ist das Zustandssystem

$$\dot{x} = Ax + Bu,$$
$$y = Cx + Du,$$

mit den Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & 0 \\ 5 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, D = 0.$$

3. Gegeben sei ein Signal $u \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $u(t) = 3 - t^{-2} - e^{-3t}$ und die Parameter $a_1 = -2$ und $a_2 = 0$. Bestimmen Sie den stationären Endwert des Zustandssignals $\varphi(\cdot, x_0, u)$.

Aufgabe 5.3

3) $a_1 = -2$, $a_2 = 0$, $u(t) = 3 - t^{-2} - e^{-3t}$ $\quad B = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -4 \end{bmatrix}, \quad \varphi(\infty, x_0, u) = -A^{-1} B u(\infty)$$

$$u(\infty) = \lim_{t \to \infty} \left(3 - t^{-2} - e^{-3t}\right) = \lim_{t \to \infty} 3 - \underbrace{\cancel{\lim_{t \to \infty} t^{-2}}}_{0} - \underbrace{\cancel{\lim_{t \to \infty} e^{-3t}}}_{0} = 3$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \underbrace{\operatorname{adj}(A)}_{= \mathrm{kof}^T} = \frac{-1}{8} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 18 & 8 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{kof} = \begin{bmatrix} 4 & 18 & -1 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$\det(A_{11}) \cdot (-1)^{(1+1)}$

$$\varphi(\infty, x_0, u) = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 18 & 8 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot 3$$

$$\varphi(\infty, x_0, u) = \frac{3}{8} \begin{bmatrix} -4 \\ -30 \\ 3 \end{bmatrix} \quad //$$

Aufgabe 3.3

Betrachten Sie das folgende Zustandssystem

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_1(t) + x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= u(t)\end{aligned} \quad , \qquad u(t) = \begin{cases} t & \text{falls } 0 \leq t \leq 1 \\ -2t & \text{falls } 1 < t \leq 2 \\ 0 & \text{andernfalls} \end{cases}$$

wobei der Eingang $u(t)$ eine stückweise lineare Funktion ist und $t \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie die Lösung des Systems unter der Annahme, dass die Anfangsbedingungen $x_1(0) = 0$ und $x_2(0) = 1$ sind.

Siehe Lösung.

Die Lösungsschritte sind änlich wie bei der Aufgabe 3.2.