Steuer- und Regelungstechnik

2. Übung

Victor Cheidde Chaim

Universität der Bundeswehr München, LRT-15 Institut für Steuer- und Regelungstechnik

$$\underline{A = T \Lambda T^{-1}} \Rightarrow T = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix}, \quad \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix},$$

Wenn A die Eigenwerte 0 und 1 hat, zu denen die Eigenvektoren $v_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}^T$ und $v_2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix}^T$ gehören, wie kann man dann im Voraus erkennen, dass A symmetrisch ist? Berechnen Sie die Matrix A. Wie lauten die Eigenwerte und Eigenvektoren von A^2? Welche Beziehung besteht zwischen A und A^2?

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad T^{-1} = \frac{1}{\det(T)} \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\det(T) = (-1) - 2 \cdot 2 = -5$$

$$T^{-1} = -\frac{1}{5}\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/5 & 2/5 \\ 2/5 & -1/5 \end{bmatrix}$$

$$A = \underline{\underline{T \Lambda T^{-1}}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/5 & 2/5 \\ 2/5 & -1/5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/5 & -2/5 \\ -2/5 & 1/5 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = A \cdot A = (T\Lambda T^{-1})(T\Lambda T^{-1}) = T\Lambda \underbrace{T^{-1}T}_{I = id}\Lambda T = T\Lambda^2 T^{-1}$$

$$A^n = \underbrace{(T\Lambda T^{-1})(T\Lambda T^{-1})\cdots(T\Lambda T^{-1})}_{n\text{-mal}} = T\Lambda^n T^{-1}$$

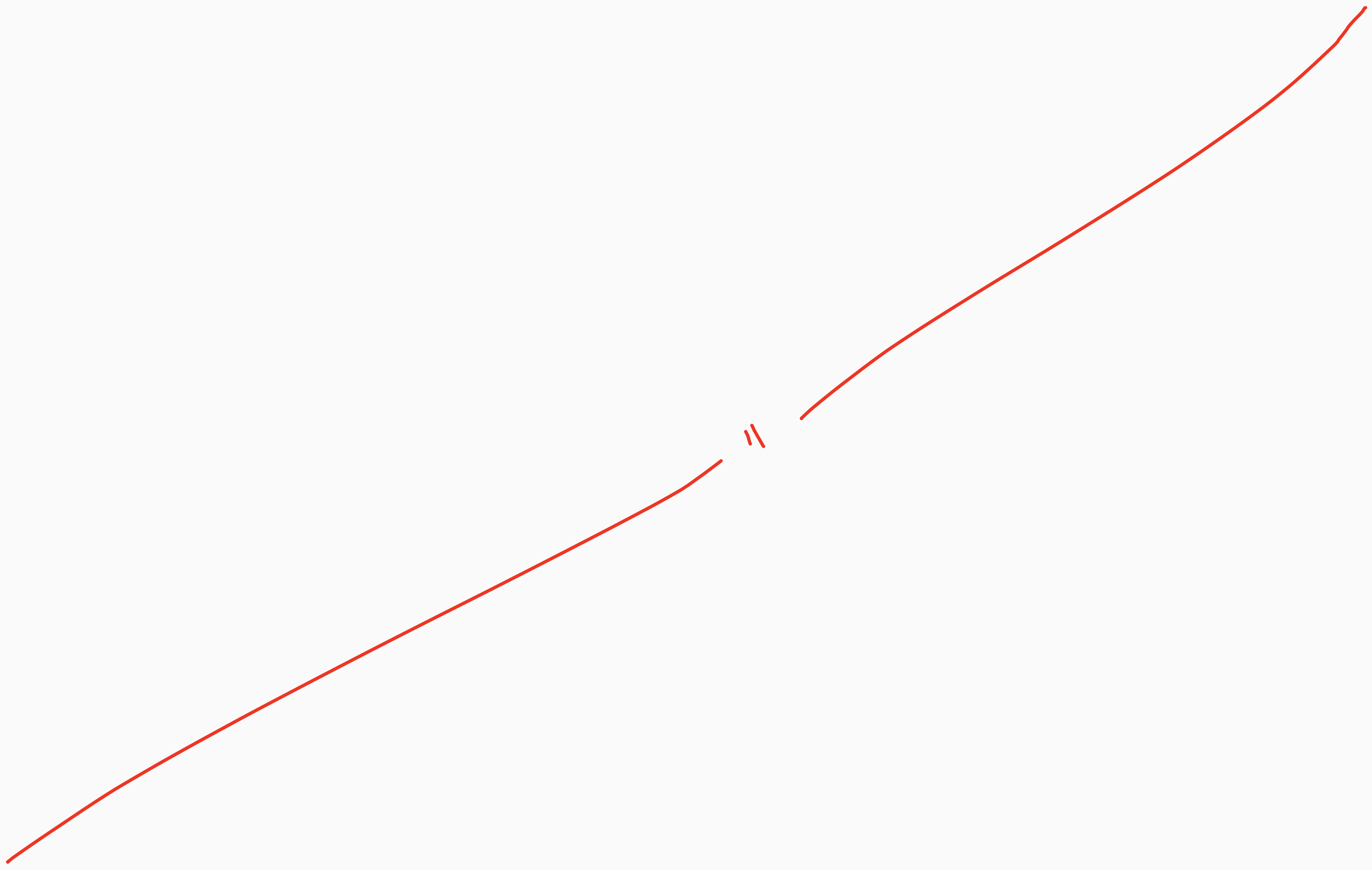
id id

Allgemein ✓

$$A^2 = T\begin{bmatrix} 0^2 & 0 \\ 0 & 1^2 \end{bmatrix} T^{-1} = T\Lambda T^{-1} = A$$

$$\boxed{A^n = A} \Rightarrow \text{nur für die Aufgabe}$$

Aufgabe 1.12



Aufgabe 2.1

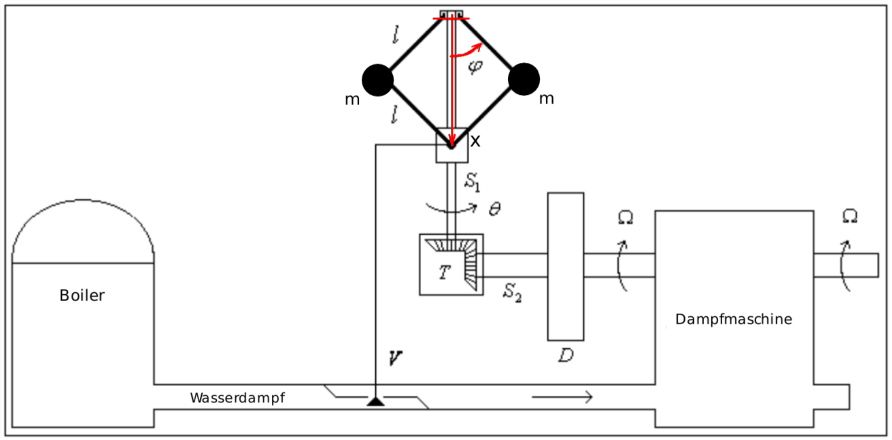


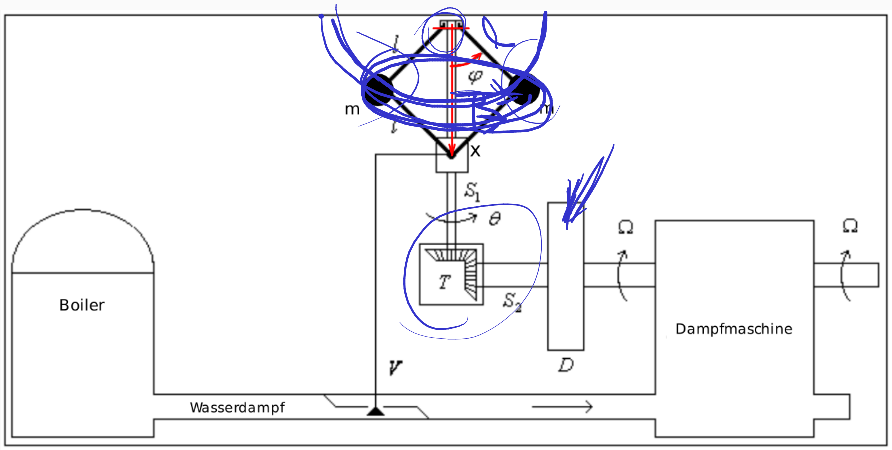
Abbildung 1: System: Dampfmaschine und Fliehkraftregler.
Quelle (bearbeitet von V. Chaim): *Bifurcation Analysis of the Watt Governor System*, Sotomayor, J.; Mello, L. F.; Braga, D. C.; Computational and Applied Mathematics, Vol. 26, N.1, pp 19-44, 2007.

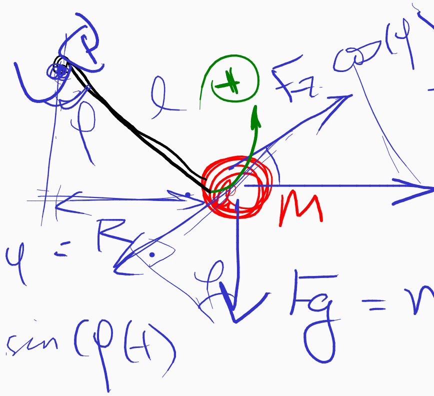
- Drehmoment-Dämpfung
  $M_r = -b\dot{\varphi}(t)$;
- Getriebeverhältnis
  $\theta(t) = n\Omega(t)$;
- Eingang $u(t) = k(x(t) - x_{ref})$.

Aufgabe 2.1

1) Modellierungsziel: Zusammenhang zw. $\varphi(t)$ und $\Theta(t)$ $(\Omega(t))$

2) Blöcke: Masse, Trägheitsmoment $(= I_D)$, Dämpfer, Getriebeverhältnis.





$F_z = m \cdot \dot{\Theta}^2 \cdot R$ Zentrifugalkraft

$F_g = m \cdot g$

3)a) Verhalten der Blöcke:

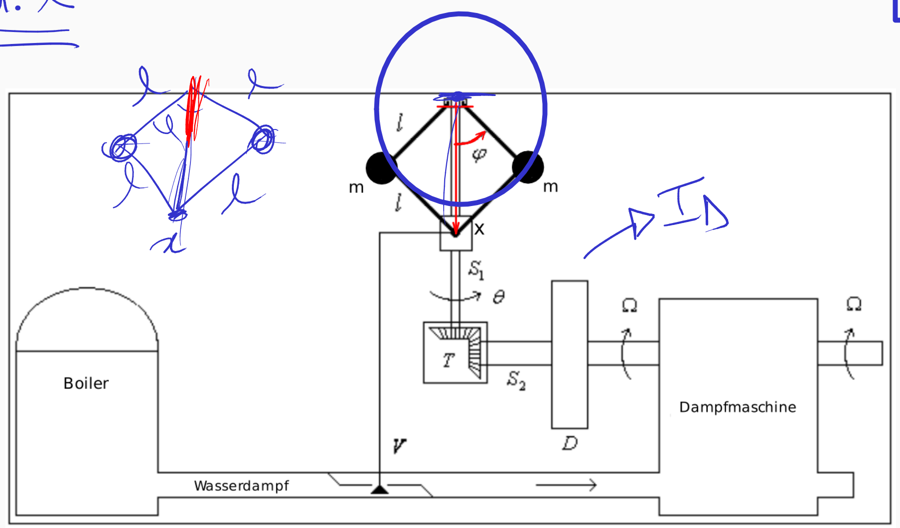
Masse: $M_I = I_m \cdot \ddot{\varphi}(t)$, $M_{Fg} = l\, F_g \sin(\varphi(t))$, $M_{Fz} = F_z\, l \cdot \cos(\varphi)$

Dämpfer: $M_r = -b\dot{\varphi}$, Gtr: $\Theta(t) = n\,\Omega(t)$, $M_{I_D} = u = k(x - x_{ug})$

3) b) Verbindungen der Blöcke: $\sum M = I \cdot \alpha = I \ddot{\varphi}$

$$\underbrace{I_M}_{m \cdot l^2} \ddot{\varphi} = -F_g \cdot l \cdot \sin\varphi + F_t \cdot l \cdot \cos\varphi - b \cdot \dot{\varphi} = -m \cdot g \cdot l \cdot \sin\varphi + R m \theta^2 l \cdot \cos\varphi - b\dot{\varphi}$$

$$\boxed{m l^2 \ddot{\varphi} = -m g \cdot l \sin\varphi + m \theta^2 l^2 \cos\varphi \sin\varphi - b\dot{\varphi}} \quad (I)$$



$$I_D \cdot \dot{\Omega} = u = k(x - x_{ref})$$

$$x = 2l \cdot \cos\varphi \Rightarrow I_D \dot{\Omega} = k(2l\cos\varphi - x_{ref})$$

$$\boxed{I_D \frac{\dot{\theta}(t)}{n} = k(2l\cos\varphi - x_{ref})} \quad (II)$$

Aufgabe 2.1

$$\begin{cases} \ddot\varphi \cdot m l^2 = l^2 m \dot\theta^2 \cos\varphi \sin\varphi - \sin\varphi \, l m g - b \dot\varphi \\ I_D \cdot \frac{\dot\theta}{n} = k(2l\cos\varphi - x_{ref}) \end{cases}$$

3) c) Vereinfachung und Elimination

$$\ddot\varphi = \dot\theta^2 \cos\varphi \sin\varphi - \sin\varphi \frac{g}{l} - \underbrace{\frac{b}{m l^2}}_{b^*} \dot\varphi = \underline{\dot\theta^2 \cos\varphi \sin\varphi - \sin\varphi \frac{g}{l} - b^* \dot\varphi} \;//$$

$$\dot\theta = \underbrace{\frac{k \cdot n \cdot 2 \cdot l}{I_D}}_{k^*} \cdot \cos\varphi - \underbrace{\frac{x_{ref} \cdot k \cdot n}{I_D}}_{k_1} = k^* \cos\varphi - k_1 \;//$$

$$\vec{x} = [\varphi \quad \dot\varphi \quad \theta] \quad \Rightarrow \quad \dot x = f(\vec{x}, u) = \begin{pmatrix} \dot\varphi \\ \theta^2 \cos\varphi \sin\varphi - \sin\varphi \frac{g}{l} - b^* \dot\varphi \\ k^* \cos\varphi - k_1 \end{pmatrix}$$