Steuer- und Regelungstechnik

1. Übung

Victor Cheidde Chaim

Universität der Bundeswehr München, LRT-15 Institut für Steuer- und Regelungstechnik

Anmerkungen

– e-mail: victor.chaim@unibw.de

– Seminarunterlagen:

https://www.unibw.de/lrt15/lehre/vorlesungen-1/steuer-und-regelungstechnik

– Nicht alle Übungen in den Seminaren

– Ab nächster Woche: Angabe von Seminarübungen

Aufgabe 1.2

Transformieren Sie das folgende System $Ax = b$ in die Dreiecksform $Ux = c$, wobei U eine obere Dreiecksmatrix ist. Berechnen Sie die Lösung des Gleichungssystems und die Determinante von A.

$$x = \begin{bmatrix} u & v & w & z \end{bmatrix}^T$$

$$\begin{aligned} 2u + 4v + 0w + 2z &= 6 \\ 0u + 3v + 3w + z &= 4 \\ 2u + 7v + 9w + 7z &= 8 \\ 0u + 0v + 6w + 5z &= -4. \end{aligned}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 2 & 7 & 9 & 7 \\ 0 & 0 & 6 & 5 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 8 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Aufgabe 1.2

→ Gauss - Elimination:

$$[A\ b] = \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 3 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 7 & 9 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 6 & 5 & -4 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 7 & 9 & 7 & 8 \\ 0 & 3 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 6 & 5 & -4 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 7 & 9 & 7 & 8 \\ 0 & 3 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 6 & 5 & -4 \\ 2 & 4 & 0 & 2 & 6 \end{array}\right] \ominus \to$$

$$\to \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 7 & 9 & 7 & 8 \\ 0 & 3 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 6 & 5 & -4 \\ 0 & -3 & -9 & -5 & -2 \end{array}\right] \oplus \to \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 7 & 9 & 7 & 8 \\ 0 & 3 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 6 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & -6 & -4 & 2 \end{array}\right] \oplus \to \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 7 & 9 & 7 & 8 \\ 0 & 3 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 6 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow U = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 9 & 7 \\ 0 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ -4 \\ -2 \end{bmatrix}$$

umgeschriebenes Gleichungssystem:

$$\Rightarrow \begin{cases} 2u + 7v + 9w + 7z = 8 \\ 3v + 3w + z = 4 \\ 6w + 5z = -4 \\ z = -2 \end{cases}$$

$\therefore\ z = -2,\ w = 1,\ v = 1,\ u = 3$ //

Aufgabe 1.2

* die Zeilen wurden zweimal ausgetauscht → bleibt das Signal der Determinante dasselbe:

$$\det(A) = \det(V) = \det\left(\begin{bmatrix} 2 & 7 & 9 & 7 \\ 0 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 2 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 1 = 36$$

$(\cdot) = \det$

Dreiecksmatrix

Aufgabe 1.5

Berechnen Sie die Determinante und alle 9 Kofaktoren von

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Bilden Sie dann eine neue Matrix B, deren Eintrag i, j der Kofaktor A_{ji} ist. Verifizieren, dass AB die Identitätsmatrix mal der Determinante ist. Berechnen Sie A^{-1}.

Aufgabe 1.5

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow \det(A) = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{(-1)^{i+j} \cdot \det(A \text{ ohne Zeile } i, \text{ ohne Spalte } j)}_{\text{Kofaktoren}} \cdot A_{i,j}$$

$$i=1: \quad \det(A) = \underbrace{(-1)^{1+1} \det\left(\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}\right)}_{C_{11}=20} A_{1,1} + \underbrace{(-1)^{1+2} \cdot \det\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}\right)}_{C_{12}=0} A_{1,2} + \underbrace{(-1)^{1+3} \det\left(\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right)}_{C_{13}=0} A_{1,3} = \underline{\underline{20}}$$

$$i=2: \quad \det(A) = \underbrace{(-1)^{2+1} \det\left(\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}\right)}_{C_{21}=-10} A_{2,1} + \underbrace{(-1)^{2+2} \cdot \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}\right)}_{C_{22}=5} A_{2,2} + \underbrace{(-1)^{2+3} \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right)}_{C_{23}=0} A_{2,3} = \underline{\underline{20}}$$

$$i=3: \quad \det(A) = \underbrace{(-1)^{3+1} \cdot \det\left(\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}\right)}_{C_{31}=-12} A_{3,1} + \underbrace{(-1)^{3+2} \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right)}_{C_{32}=0} A_{3,2} + \underbrace{(-1)^{3+3} \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}\right)}_{C_{33}=4} A_{3,3} = 20$$

Aufgabe 1.5

$$\Rightarrow B = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & -10 & -12 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20 & -10 & -12 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 20 \end{bmatrix} = id \cdot \det(A) \;//$$

$$A \cdot B = id \cdot \det(A) \xrightarrow{\cdot \frac{1}{\det(A)} \, (\det(A) \neq 0)} \frac{AB}{\det(A)} = id \quad \therefore \quad A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & -3/5 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/5 \end{bmatrix} \;//$$

Aufgabe 1.6

Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Verifizieren Sie für dieses Beispiel, dass die Spur gleich der Summe der Eigenwerte ist und dass die Determinante gleich dem Produkt der Eigenwerte ist. Beweisen Sie, dass diese Identitäten auch im Allgemeinen gelten.

Angenommen, wir verschieben die Matrix A durch Subtraktion von $7\,\mathrm{id}$:

$$B = A - 7\,\mathrm{id} = \begin{bmatrix} -6 & -1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Was sind die Eigenwerte und Eigenvektoren von B, und wie hängen sie mit denen von A zusammen?

Aufgabe 1.6

$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow$ Eigenwerte: $\det(A - \lambda I) = 0$

$\lambda_1 = 2$
$\lambda_2 = 3$

$$\det(A-\lambda I) = \det\left(\begin{bmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 2 & 4-\lambda \end{bmatrix}\right) = (1-\lambda)(4-\lambda) - (-1)\cdot 2 = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$

Eigenvektoren: $A v = \lambda v \rightarrow \lambda_1 = 2 \rightarrow (A - \lambda_1\, id)\cdot v_1 = 0$

$$(A - \lambda_1 id)\, v_1 = \begin{bmatrix} 1-2 & -1 \\ 2 & 4-2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$v_{11} = -v_{12}$

$\hookrightarrow \boxed{v_1 = [1 \quad -1]^T}$

$$(A - \lambda_2 id)\, v_2 = \begin{bmatrix} 1-3 & -1 \\ 2 & 4-3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$v_{21} = -v_{22}/2$

$\boxed{v_2 = [1 \quad -2]^T}$

Aufgabe 1.6

Spur(A) → die Spur ist die Summe der Elemente der Hauptdiagonalen.

$$\text{spur}(A) = \sum_{j=1}^{n} A_{jj} = \sum_{1}^{2} A_{jj} = 1 + 4 = 5$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 2 + 3 = 5$$

$\Big\}$ $\text{spur}(A) = \lambda_1 + \lambda_2$ //

$$\det(A) = 1.4 - (-1).2 = 6$$

$$\lambda_1 . \lambda_2 = 2.3 = 6$$

$\Big\}$ $\det(A) = \lambda_1 . \lambda_2$ //

Aufgabe 1.6

$B = A - 7\,id = \begin{bmatrix} -6 & -1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$

das Verfahren ist das gleiche...

Eigenwerte: $\det(B - \lambda\, id) = 0 \rightarrow \lambda_{B_1} = -5 \quad \lambda_{B_2} = -4$

Eigenvektoren: $(A - \lambda\, id)v = 0 \rightarrow v_{B_1} = [1 \;\; -1],\; v_{B_2} = [1 \;\; -2]$

* Die Eigenvektoren bleiben unverändert.
* Die Eigenwerte wurden mit demselben Faktor (−7) addiert.

Aufgabe 1.6

Beweis : $\det(A) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot (\dots) \cdot \lambda_n$

$\rightarrow$ faktorisiertes Polynom

$$\det(A - \lambda \, id) = p(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda) \dots (\lambda_n - \lambda)$$

Da λ eine Variable ist, wählen wir $\lambda = 0$:

$$\det(A - 0 \cdot id) = (\lambda_1 - 0)(\lambda_2 - 0) \dots (\lambda_n - \lambda) \Rightarrow \det(A) = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n$$

Beweis: $Spur(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n \Rightarrow$ siehe die hochgeladenen Lösungen "

Aufgabe 1.12

Wenn A die Eigenwerte 0 und 1 hat, zu denen die Eigenvektoren $v_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}^T$ und $v_2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix}^T$ gehören, wie kann man dann im Voraus erkennen, dass A symmetrisch ist? Berechnen Sie die Matrix A. Wie lauten die Eigenwerte und Eigenvektoren von A^2? Welche Beziehung besteht zwischen A und A^2?

Aufgabe 1.12

* Die Matrix A ist symmetrisch, weil die Eigenwerte unterschdlich werte haben und die Eigenvektoren orthogonal sind.

→ Symmetrische Matrix: $A = A^T$

→ Orthogonal Vektoren: $\langle v_1, v_2 \rangle = v_1^T \cdot v_2 = 0$ (Skalarprodukt)

Beweis:

$$A v_1 = \lambda_1 v_1 \xrightarrow{\cdot v_2^T} v_2^T A v_1 = v_2^T \lambda_1 v_1 \quad (I)$$

$$A v_2 = \lambda_2 v_2 \xrightarrow{\cdot v_1^T} v_1^T A v_2 = v_1^T \lambda_2 v_2 \quad (II)$$

(II) → transponieren: $(v_1^T A v_2)^T = v_2^T A^T v_1 = (v_1^T \lambda_2 v_2)^T = \lambda_2 v_2^T v_1 \quad (II)^*$

$$(I)-(II)^*: \; v_2^T A v_1 - v_2^T A^T v_1 = (\lambda_1 - \lambda_2) v_2^T v_1 = (\lambda_1 - \lambda_2)\underbrace{\langle v_2, v_1 \rangle}_{\text{orthogonal}} = 0 \Rightarrow v_2^T A v_1 = v_2^T A^T v_1$$

$$\therefore A = A^T$$

Aufgabe 1.12

Berechnung von A : $A = T \Lambda T^{-1}$ → Fortsetzung im nächsten Seminar.