

# Victor Cheidde Chaim

⇒ Probeklausuraufgaben

6. Aufgabenblatt

6.5)  $H(s) = \frac{(2s+1)(3s+2)}{(4s+3)(s-4)}$  Ja, weil  $H(s)$  proper ist. 0,5 Punkt

$D = bn \rightarrow H(s) = \frac{6s^2 + \dots}{4s^2 + \dots} = \frac{6/4 \cdot s^2 + \dots}{s^2 + \dots} \therefore D = 6/4 = 3/2$  0,5 Punkt

6.6)  $u(t) = e^{\alpha t} \sin(e^{2t})$ ,  $\sin(e^{2t})$  schon beschränkt,  $\|\sin(x)\| \leq 1$

Bedingung:  $e^{\alpha t}$  beschränkt  $\rightarrow$  genau dann, wenn  $\alpha \leq 0$ . 1 Punkt

6.7) Für alle Pole  $p$  der Übertragungsfunktion gilt  $\text{Re}(p) < 0$ . 1 Punkt

6.8) Für keine Werte, da  $A$  unabhängig von den Parameterwerten den Eigenwert 1 hat. 1 Punkt

EW:  $\det(A - \lambda \text{id}) = \det \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = (1-\lambda)(-1-\lambda) = 0 \rightarrow \lambda_1 = 1 \rightarrow \text{Re}(\lambda_1) > 0$ , nicht asympt. stabil  
 $\lambda_2 = -1$

6.9)  $A = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ ,  $C = [\gamma \ 1]$ ,  $D = \alpha$

ZS ist nicht asympt. stabil: EW: 1, -1.

BIBO-stabil:  $\text{Re}(p) < 0$ ,  $p =$  Pole von  $H(s) = C(s\text{id} - A)^{-1}B + D$ .  $D$  spielt keine Rolle bei BIBO Stabilität. Nehmen wir  $D=0$  an.

$(s\text{id} - A) = \begin{bmatrix} s-1 & -\alpha \\ 0 & s+1 \end{bmatrix} \rightarrow (s\text{id} - A)^{-1} = \frac{1}{(s-1)(s+1)} \begin{bmatrix} s+1 & \alpha \\ 0 & s-1 \end{bmatrix}$  1 Punkt

$H(s) = C(s\text{id} - A)^{-1}B = [\gamma \ 1] \begin{bmatrix} s+1 & \alpha \\ 0 & s-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \frac{1}{(s-1)(s+1)} = [\gamma \ 1] \begin{bmatrix} 2\alpha \\ 2(s-1) \end{bmatrix} \frac{1}{(s-1)(s+1)} = \frac{2((s-1) + \gamma\alpha)}{(s-1)(s+1)}$  1 Punkt

BIBO-stabil  $\rightarrow$  Zähler =  $k(s-1)$ ,  $k \in \mathbb{R} \rightarrow 2((s-1) + \gamma\alpha) = k(s-1)$  (instabil Pol)

$\begin{cases} 2s = ks & \rightarrow k=2 \\ -2+2\gamma\alpha = -k & \rightarrow 2\gamma\alpha = 0 \end{cases} \rightarrow 2\gamma\alpha = 0 \rightarrow$  BIBO-stabil genau dann, wenn  $\gamma\alpha = 0$ . 2 Punkte

Überprüfung:  $\gamma\alpha = 0 \rightarrow H(s) = \frac{2(s-1)}{(s-1)(s+1)} = \frac{2}{s+1}$ ,  $p = -1 < 0$  BIBO-stabil

6.10)  $A = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ ,  $C = [1 \ 0]$ ,  $D = 0$

i)  $H(s) = C(s\text{id} - A)^{-1}B + D = [1 \ 0] (s\text{id} - A)^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + 0$

$(s\text{id} - A) = \begin{bmatrix} s+3 & 0 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix} \rightarrow (s\text{id} - A)^{-1} = \frac{1}{(s+3)(s+1)} \begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ 0 & s+3 \end{bmatrix}$  1 Punkt

$H(s) = [1 \ 0] \begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ 0 & s+3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \frac{1}{(s+3)(s+1)} = \begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{(s+3)(s+1)} = \frac{(s+1)}{(s+3)(s+1)} = \frac{1}{s+3} //$

ii) Ja, da  $\nu(\infty) = 1$  und ZS BIBO-stabil.

$$g(t) = \nu(t) C e^{At} B = \nu(t) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-3t} & 0 \\ 0 & e^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \nu(t) e^{-3t}$$

1 Punkt

$$\psi(\infty, 0, \nu) = \lim_{t \rightarrow \infty} (g \times \nu)(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \nu(t) \int_0^t e^{-3z} dz = \lim_{t \rightarrow \infty} \left( \frac{e^{-3z}}{-3} \right) \Big|_0^t = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1 - e^{-3t}}{3} = \frac{1}{3} //$$

(oder einfacher:  $\psi(\infty, 0, \nu) = H(0) \cdot \nu(\infty) = \left( \frac{1}{0+3} \right) \cdot 1 = \frac{1}{3}$ )

iii)  $u(t) = \sin(3t)$ ,  $\tilde{u} = e^{3it}$  ( $u(t) = \text{Im}(e^{3it})$ )

Bedingung:  $\text{EW}(A) \neq \lambda$ , wobei  $u(t) = e^{\lambda t} u_0$ :  $\text{EW}(A) = -3, -1 \neq 3i (= \lambda)$  ✓ erfüllt  
(Satz 4.2)

1 Punkt

$$y(t) = \text{Im}(\tilde{y}(t)) \quad (\text{Satz 7.3}), \quad \tilde{y}(t) = H(\lambda) \cdot \tilde{u}(t) = H(3i) e^{3it}$$

$$H(3i) = \frac{1}{3i+3} = \frac{3i-3}{(3i+3)(3i-3)} = \frac{3i-3}{9i^2-9} = \frac{-3(i-1)}{18} = -\frac{1}{6}(i-1) = -\frac{1}{6}(e^{-1})$$

$e^{xi} = \cos x + i \sin x$   
 $\frac{1}{2}i (e^{\frac{\pi}{2}i} = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i)$

1 Punkt

$$\tilde{y}(t) = -\frac{1}{6}(e^{-1}) e^{3it} = -\frac{1}{6} \left( \frac{\pi}{2} + 3t \right) i e^{-3it}$$

$\sin(\theta + \frac{\pi}{2}) = \cos(\theta)$

$$y(t) = \text{Im}(\tilde{y}(t)) = -\frac{1}{6} (\sin(\frac{\pi}{2} + 3t) - \sin(3t)) = \frac{1}{6} (\sin(3t) - \cos(3t)) \quad 1 \text{ Punkt}$$

//