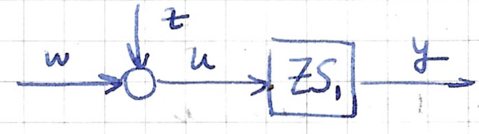
9. Übung, 15.03.22, Victor Cheidde Chaim

9.1 Aufgabe: $A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 6 & -5 \end{bmatrix}$, $B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $C_1 = [1 \;\; 0]$, $D_1 = [0]$

$x_1(0) = 0.$



i) $w = \sigma(t)$, $z = 0$

$ZS_1 \to H_1 = C_1 (s\,id - A_1)^{-1} \cdot B_1 + \cancel{D_1}^{\,0}$

$(s\,id - A_1)^{-1} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ -6 & s+5 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{s(s+5)-6} \begin{bmatrix} s+5 & 1 \\ 6 & s \end{bmatrix} = \frac{1}{s^2+5s-6} \begin{bmatrix} s+5 & 1 \\ 6 & s \end{bmatrix}$

CLCP: $s^2 + 5s - 6 \;\to$ Pole von $H_1(s) = \frac{-5 \pm \sqrt{25+24}}{2} \Rightarrow p_1 = -6$, $p_2 = 1$

H_1 nicht BIBO-stabil, da $p_2 = 1$ ($Re(p_2) \geq 0$)

↳ kein Endwert

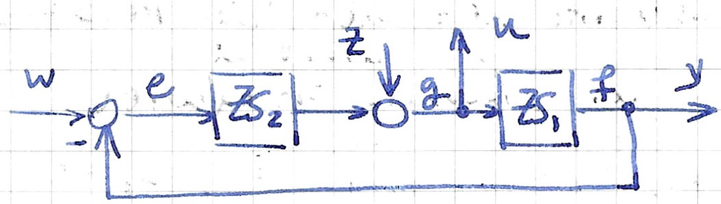
oder: (ohne Berechnung der Pole)

CLCP: $s^2 + 5s - 6$ → nicht Hurwitz, da die Koeffizienten unterschiedliche Vorzeichen haben

(hinreichend Bedingung für ein Polynom 2. Ordnung)

↳ ∴ H_1 nicht BIBO stabil, kein Endwert.

ii)



$C_2 = 0$, $D_2 = 10$

$x_2(0) = 0$

$w = \sigma$, $z = 0$: $H_2 = \overset{0}{C_2}\,\cancel{(s\,id - A_2) B_2} + D_2 = \overset{\text{P-Regler}}{10} = \frac{Z_2}{N_2}$ (mit $Z_2 = 10$, $N_2 = 1$)

Führungsübertragungsfunktion: $FÜF := \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 Z_2 + N_1 N_2}$

$H_1(s) = \frac{1}{s^2+5s-6} [1 \;\; 0] \begin{bmatrix} s+5 & 1 \\ 6 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{s^2+5s-6} = \frac{Z_1}{N_1}$

∴ $FÜF(s) = \frac{10}{s^2+5s-6+10} = \frac{10}{s^2+5s+4}$, Pole: $\frac{-5 \pm \sqrt{25-16}}{2}$

$p_1 = -4$, $p_2 = -1$

$Re(p_1, p_2) < 0 \to$ BIBO-stabil! Endwert:

$\psi(\infty, 0, w + \cancel{z}) \overset{z=0}{=} \psi(\infty, 0, w) = FÜF(0)\, \overset{=1}{w(\infty)} = \frac{10}{4} = 2{,}5$ //

iii) $w = \sigma,\quad z = k \cdot \sigma$

Störungsübertragungsfunktion : $SÜF = \dfrac{Z_1 N_2}{\underbrace{Z_1 Z_2 + N_1 N_2}_{CLCP}}$

$SÜF = \dfrac{1}{s^2+5s+4}$ $\rightarrow$ BIBO-stabil ! Endwert:

$$\psi(\infty, 0, w+z) = \underbrace{FÜF(0)\, w(\infty) + SÜF(0)\, z(\infty)}_{\text{Linearität}} = 2{,}5 + \frac{k}{4}$$

Je größer die Störung, desto größer der Abweichung

iv) P-Regler hat Stabilität mitgebracht, aber keine stationäre Genauigkeit.

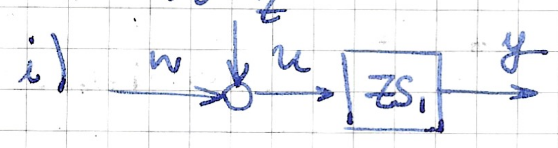
$$e(\infty) = w(\infty) - \psi(\infty, 0, w+z) = 1 - (2{,}5 + k/4) = -1{,}5 - \frac{k}{4}$$

Auch wenn keine Störung vorliegt, gibt es keine stationäre Genauigkeit.

$$e(\infty) = w(\infty) - \psi(\infty, 0, w) = -1{,}5$$

Wir könnten sofort beantworten, dass der Regelkreis keine stationäre Genauigkeit hat, weil der Regler keine Nullstelle $= 0$ hat (Keinen Integrator).

9.2 Aufgabe: $A_1 = -1,\quad B_1 = 1,\quad C_1 = 1,\quad D_1 = 0$

i) 

$w = \sigma,\quad z = 0,\quad x_1(0) = 0$

Eigenwert von $A_1 = -1 \rightarrow$ asymp stabil $\rightarrow$ BIBO-stabil

$$H_1(s) = C_1 (s\,id - A_1)^{-1} B_1 + \cancel{D_1}^{0} = \frac{1}{s+1}$$

$$\text{Endwert: } \psi(\infty, 0, w + \cancel{z}^{0}) = \psi(\infty, 0, w) = H_1(0)\, w(\infty) \overset{1}{=} 1$$

ii) Anstiegszeit t_r für 90% $w(\infty)$.

Da es sich um PT_1 handelt, bleibt die Regelgröße innerhalb des Wertes $0{,}9\,w(\infty)$, sobald dieser erreicht ist.

$$\psi(t,0,\cancel{w}^{0}+z) = \psi(t,0,w) = \psi(t,0,v) = (g_1 * v)(t)$$

Impulsantwort: $g_1(t) = C_1 \exp(A_1 t) B_1 v(t) + \cancel{D_1 \cdot \delta(t)}^{0}$

$$g_1(t) = 1 \cdot \exp(-t) \cdot 1 = e^{-t}$$

$$\psi(t,0,v) = v(t) \int_0^t e^{-\tau} d\tau = v(t)(1-e^{-t})$$

$$\psi(t_r,0,v) = 1-e^{-t_r} = 0{,}9 \cdot w(\infty) = 0{,}9$$

$$1-e^{-t_r} = 0{,}9 \to e^{-t_r} = 0{,}1 \to \ln(e^{-t_r}) = \ln(0{,}1) \to t_r \cong 2{,}3 \text{ Sek}$$ //

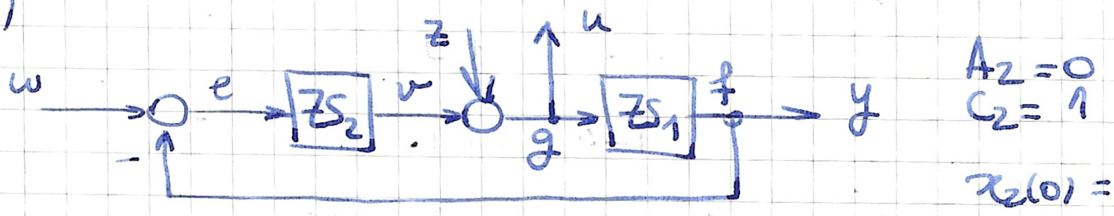
iii) $w = v, \; z = kv$

$$\psi(\infty,0,w+z) = H_1(0)\, \overset{1}{w(\infty)} + H_1(0)\, \overset{k}{z(\infty)} = 1+k.$$

$$e(\infty) = w(\infty) - y(\infty) = 1-(1+k) = -k$$

Bei einer konstanten Störung geht der Fehler nicht gegen null. Es gibt keine stationäre Genauigkeit.

iv)



$A_2 = 0 \quad B_2 = 1$
$C_2 = 1 \quad D_2 = 4$

$x_2(0) = 0 \quad$ PI-Regler

$w = v, \; z = 0: \quad H_2(s) = C_2(s\,id - A_2)^{-1} B_2 + D_2 = \frac{4}{s} + 4 = \frac{4+4s}{s}$

$$FÜF = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 Z_2 + N_1 N_2} = \frac{4+4s}{4+4s+s(s+1)} = \frac{4+4s}{s^2+5s+4}$$

Pole: $p_1 = -1$, $p_2 = -4$
BIBO-stabil!

$$FÜF = \frac{4(1+s)}{(1+s)(4+s)} = \frac{4}{(s+4)}$$ //

Endwert: $\psi(\infty,0,w+\cancel{z}^{0}) = \psi(\infty,0,w) = FÜF(0) \cdot \overset{1}{w(\infty)} = 1$ //

v) Anstiegszeit t_r für 90% $w(\infty)$

$$\psi(t,0,w+\cancel{z}^{0}) = \psi(t,0,w) = \psi(t,0,v) = (g_F * v)(t)$$

$g_F(t) = C_F \exp(A_F t) B_F + D_F \quad \begin{cases} A_F = -4, \; B_F = 1 \\ C_F = 4, \; D_F = 0 \end{cases}$ Regelungsnormalform FÜF

$$g_F(t) = 4 e^{-4t} \cdot 1 = 4e^{-4t}$$ //

$$\psi(t,0,v) = v(t)\int_0^t 4e^{-4\tau}d\tau = \frac{v(t).4}{4}(1-e^{-4t}) = v(t)(1-e^{-4t})$$

$$\psi(tr,0,w) = 1-e^{-4tr} = 0{,}9\,w(\infty) = 0{,}9$$

$$\ln(e^{-4tr}) = \ln(0{,}1) \Rightarrow -4tr \cong -2{,}3 \rightarrow tr \cong 0{,}58 \text{ Sek}$$

A * 4-Mal schneller mit dem Regler!

vi) $w = v$, $z = kv$

$$S\ddot{U}F = \frac{Z_1 N_2}{Z_1 Z_2 + N_1 N_2} = \frac{s}{(s+1)(s+4)} = \frac{s}{s^2+5s+4}$$

$$A_s = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -5 \end{bmatrix}, \quad B_s = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{C_s = [0 \;\; 1], \; D_s = 0}_{\text{Regelungsnormalform SÜF}}$$

nicht notwendig

$$g_s(t) = C_s \exp(A_s t) B_s + D_s$$

$$\exp(A_s t) \rightarrow Ew(A_s) \Rightarrow \begin{matrix}\lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = -4\end{matrix}$$

↳ zwei verschiedene Eigenwerte:

Diagonalform $A_s = T \Lambda T^{-1}$

$$\lambda_1 = -1, \quad [A_s - \lambda_1 id]v_1 = 0 \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 4 \end{bmatrix} v_1 = 0 \quad v_1 = [1 \;\; -1]^T$$

$$[A_s - \lambda_2 id]v_2 = 0 \quad \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -4 & -1 \end{bmatrix} v_2 = 0, \quad v_2 = [1 \;\; -4]^T$$

$$A_s = \overset{T}{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}} \cdot \overset{\Lambda}{\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{(-3)}$$

$$\exp(A_s t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_s^n . t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(T\Lambda T^{-1})^n t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T\Lambda^n T^{-1} . t^n}{n!} =$$

$$\exp(A_s t) = T\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Lambda^n t^n}{n!}\right)T^{-1} = T\begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-4t} \end{pmatrix} T^{-1}$$

$$g_s(t) = [0 \;\; 1]\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-4t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{(-3)} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$g_s(t) = \frac{-1}{3}[1 \;\; -4]\begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-4t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = [1 \;\; 4]\begin{bmatrix} -e^{-t} \\ e^{-4t} \end{bmatrix}$$

$$g_s(t) = (4e^{-4t} - e^{-t})\frac{1}{3}$$

Einfach, $\psi(\infty, 0, w+z) = FÜF(0)\, \underbrace{w(\infty)}_{=1} + SÜF(0) \cdot \underbrace{z(\infty)}_{=k}$

Endwert: $\psi(\infty, 0, w+z) = 1 \cdot 1 + 0 \cdot k = 1$ //

vii) Wir haben Schnelligkeit, die Regelstrecke erreicht mit dem Regler schneller den gewünschten Wert (Führungsgröße) und hat jetzt stationäre Genauigkeit.