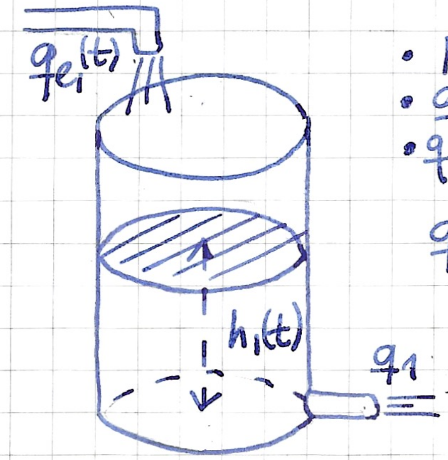
8. Übung, 07.03.22, Victor Chuidde Chaim

8.1 Aufgabe: Toricelli: $q_1 = \psi\sqrt{2g}\sqrt{h_1}$, $g, \psi, F > 0$



- $F \to$ Querschnittsfläche
- $q_{e_1} \to$ Eingangsdurchsatz
- $q_1 \to$ Ausgangsdurchsatz

$q_{e_1} \geq 0$. i) $\dot{x} = f(x,u)$
$y = g(x,u)$

$x = h_1$, $u = q_{e_1}$, $y = h_1$

Änderung des Volumens: $\dot{V} = q_{e_1} - q_1$

$V = F \cdot h_1 \to \frac{dV}{dt} = \dot{V} = F \cdot \dot{h}_1$, da F konstante ist.

$$\therefore \quad \dot{h}_1 \cdot F = q_{e_1} - q_1 \Rightarrow \dot{h}_1 = \frac{\overset{= u \text{ (Eingang)}}{q_{e_1}} - q_1}{F} = \frac{u - \psi\sqrt{2g} \cdot h_1^{1/2}}{F}$$

$$x = h_1, \ \dot{x} = \dot{h}_1 \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = \frac{u - \psi\sqrt{2g}\, x^{1/2}}{F} = f(x,u) \\ y = x = g(x,u) \end{cases}$$

ii) $F = 1$, $\psi\sqrt{2g} = 1$: Ruhelagen.

Ruhelagen $\to \dot{x} = f(x_0, u_0) = 0 \to u_0 = \frac{\psi\sqrt{2g}}{F} x_0^{1/2} = x_0^{1/2}$

$x_0 = u_0^2$ //

iii) $A := D_1 f(x,u)$, $B := D_2 f(x,u)$
$C := D_1 g(x,u)$, $D := D_2 g(x,u)$ für Ruhelage x_0, u_0.

$$A = D_1 f(x_0, u_0) = -\frac{1}{2} \cdot x_0^{-1/2} = -\frac{1}{2x_0^{1/2}} = -\frac{1}{2u_0}$$

$$B = D_2 f(x_0, u_0) = 1$$

$$C = D_1 g(x_0, u_0) = 1 \Rightarrow \begin{cases} \Delta\dot{x} = -\frac{\Delta x}{2u_0} + \Delta u \\ y = \Delta x \end{cases}$$

$$D = D_2 g(x_0, u_0) = 0$$

iv) $H(s)$ der Linearisierung

$$H(s) = C(s\,id - A)^{-1}B + D = \frac{1}{s + 1/2u_0} = \frac{2u_0}{2u_0 \cdot s + 1} \ //$$

v) Gewichtsfunktion $g(t)$ der Linearisierung

$$g(t) = C \cdot \exp(At) \cdot B\,\sigma(t) + D\,\delta(t)$$

$$g(t) = e^{-t/2u_0} \cdot \sigma(t) \quad //$$

vi) Sprungantwort der Größe k für das lin. ZS.

$k \cdot \sigma(t) \to$ Sprungfunktion der Größe k

$$y(t) = (g * k\sigma)(t)$$

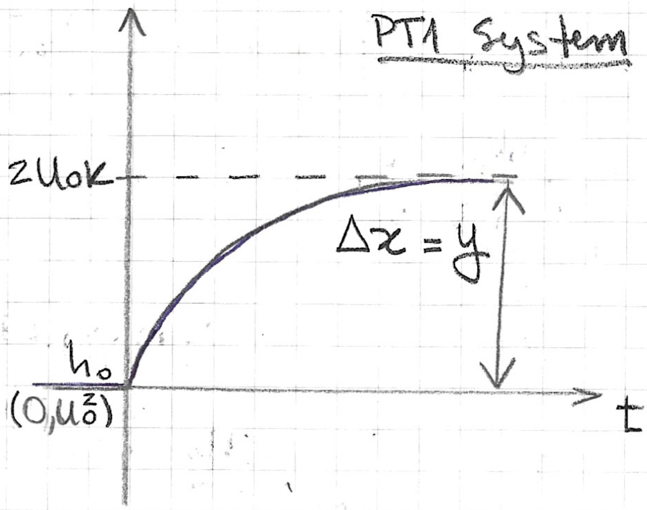
$$y(t) = k\,\sigma(t) \int_0^t g(\tau)\,d\tau$$

$$y(t) = k\,\sigma(t) \cdot 2u_0 \left(1 - e^{-t/2u_0}\right)$$

AW: $y(0) = 2u_0 k (1 - e^0) = 0$

EW: $y(\infty) = 2u_0 k$

PT1 System



vii) Endwert $\to$ nichtlin. System, $\dot{h}_1 = 0$.

$\dot{h}_1 = 0 \to$ Anfangsbedingung: $h_0 = u_0^2$

$\dot{h}_1 = 0 \Rightarrow \quad u = (u_0 + k\sigma(t)) = h_{1\,nl}^{1/2}$

$$h_{nl} = (u_0 + k)^2 = u_0^2 + k^2 + 2ku_0 \quad //$$

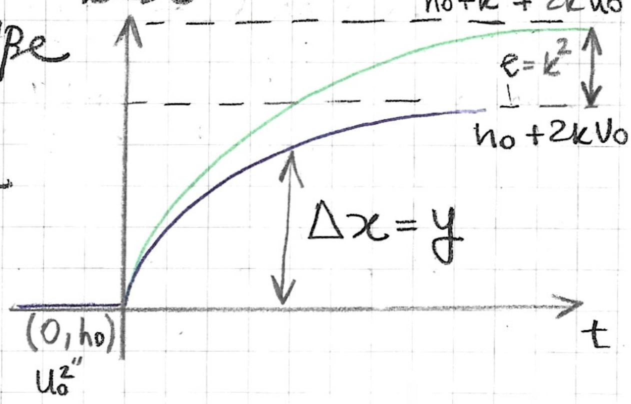
viii) $e = \| h_{NL} - y(\infty, h_0, k\sigma) \|$

$$e = \| h_{nl} - (y(\infty) + h_0) \| = \| u_0^2 + k^2 + \cancel{2ku_0} - (\cancel{2u_0k} + h_0) \|$$

$$e = \| u_0^2 + k^2 - h_0 \| = \| \cancel{u_0^2} + k^2 - \cancel{u_0^2} \| = k^2 \to e = k^2 \quad //$$

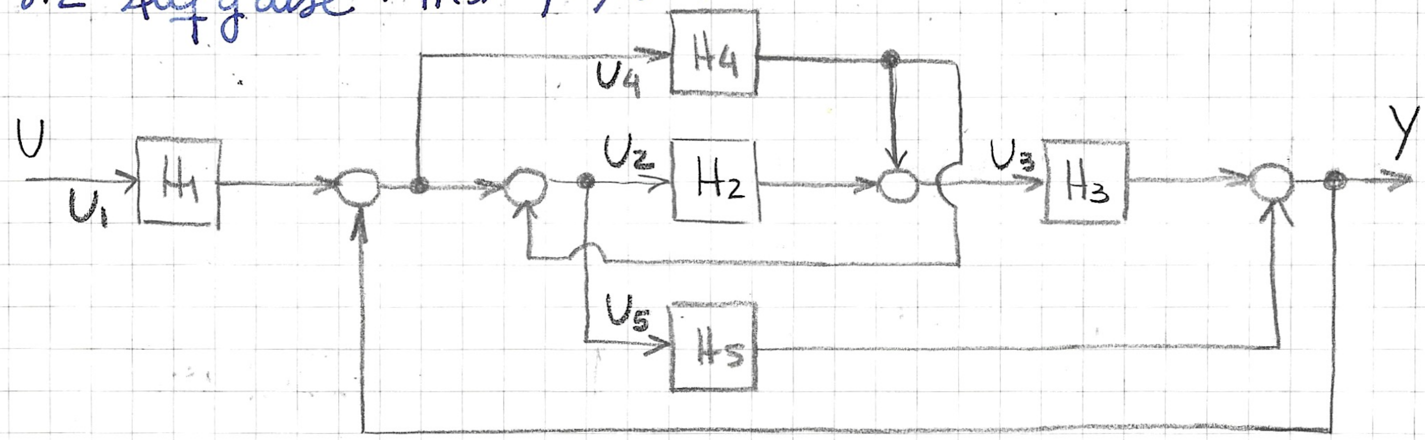
ix) $\lim\limits_{k \to 0} e/k = 0$, $\lim\limits_{k \to 0} \frac{k^2}{k} = \lim\limits_{k \to 0} k = 0$

$\Rightarrow$ Je kleiner die Sprunggröße ist, desto kleiner ist der Fehler, was auch bedeutet, dass der Fehler umso kleiner ist, je näher die Antwort an der Ruhelage liegt.



— nichtlineares System.
— lineares System.

8.2 Aufgabe : $H(s) = Y(s)/U(s)$



$$\begin{cases} Y(s) = U_5 H_5 + U_3 H_3 \\ U_1 = U(s) \\ U_2 = U_4 + U_4 H_4 = U_4(1+H_4) \end{cases} \qquad \begin{cases} U_3 = U_4 H_4 + U_2 H_2 \\ U_4 = Y(s) + U(s) H_1 \\ U_5 = U_2 \end{cases}$$

- $U_5 = U_2 = \underbrace{(Y(s) + U(s) H_1)}_{= U_4} (1 + H_4) = U(s)(H_1 + H_1 H_4) + Y(s)(1 + H_4)$

- $U_3 = U_4 H_4 + U_2 H_2 = U_4 H_4 + U_4 (1 + H_4) H_2 =$
$= U_4 (H_4 + H_2 + H_4 H_2) = (Y(s) + U(s) H_1)(H_4 + H_2 + H_4 H_2)$

- $Y(s) = H_5 \cdot (\underbrace{U(H_1 + H_1 H_4) + Y(s)(1 + H_4)}_{= U_5}) +$
$+ H_3 \cdot \underbrace{(Y(s) + U(s) H_1)(H_4 + H_2 + H_4 H_2)}_{= U_3}$

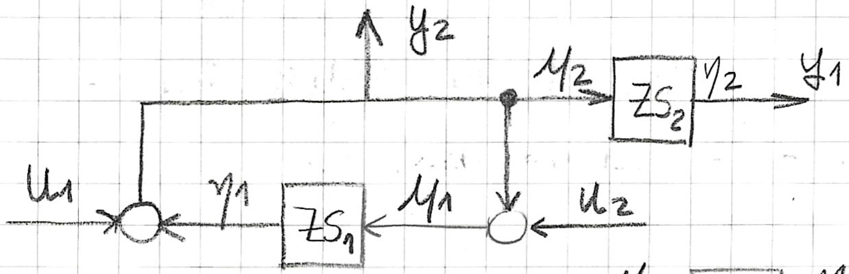
$Y(s) = Y(s)(H_5 + H_4 H_5 + H_3 H_4 + H_2 H_3 + H_2 H_3 H_4) +$
$+ U(s) H_1 (H_5 + H_4 H_5 + H_3 H_4 + H_3 H_2 + H_3 H_2 H_4)$

$Y(s)(1 - H_5 - H_4 H_5 - H_3 H_4 - H_3 H_2 - H_2 H_3 H_4) =$
$= U(s) H_1 (H_5 + H_4 H_5 + H_3 H_4 + H_2 H_3 + H_2 H_3 H_4)$

$$\Rightarrow H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{H_1(H_5 + H_4 H_5 + H_2 H_3 + H_3 H_4 + H_2 H_3 H_4)}{(1 - H_5 - H_4 H_5 - H_3 H_4 - H_3 H_2 - H_2 H_4 H_4)} \quad //$$

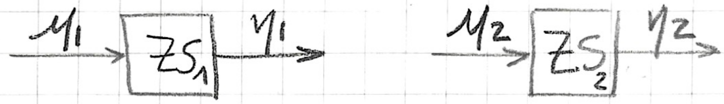
8.3 Aufgabe: A, B, C und D: $y=(y_1, y_2)$, $u=(u_1, u_2)$

Vorgehen: (Seite 804)



3)a) Verhalten der Blöcke:

• Zwei Blöcke:



$$ZS_1: \begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1 \mu_1 \\ \eta_1 = C_1 x_1 + D_1 \mu_1 \end{cases} \qquad ZS_2: \begin{cases} \dot{x}_2 = A_2 x_2 + B_2 \mu_2 \\ \eta_2 = C_2 x_2 + D_2 \mu_2 \end{cases}$$

3)b) Verbindungen der Blöcke:

$$\begin{cases} \mu_1 = u_2 + \mu_2 = u_2 + u_1 + \eta_1 \\ \mu_2 = u_1 + \eta_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1 = \eta_2 \\ y_2 = \mu_2 = u_1 + \eta_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mu = K\eta + Lu \\ y = E\eta + Fu \end{cases} \quad \text{(Seite 811)} \qquad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \; y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \; \eta = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix}, \; \mu = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \; K = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \; L = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \; E = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \; F = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad /\!/$$

3)c) Zusammenfassen und Eliminieren ($x = (x_1, x_2)$)

$$\underbrace{\begin{cases} \dot{x} = \bar{A}x + \bar{B}\mu & (a) \\ \eta = \bar{C}x + \bar{D}\mu & (b) \end{cases}}_{\text{Teilssysteme}} \qquad \underbrace{\begin{cases} \mu = K\eta + Lu & (c) \\ y = E\eta + Fu & (d) \end{cases}}_{\text{Verbindungen}}$$

* Ergebnis vorgestellt von Prof. Reißig in der achten Vorlesung:

$$\dot{x} = \underbrace{(\bar{A} + \bar{B}(id - K\bar{D})^{-1}K\bar{C})}_{=A}x + \underbrace{\bar{B}(id - K\bar{D})^{-1}L}_{=B}u$$

$$y = \underbrace{E(id + \bar{D}(id - K\bar{D})^{-1}K)\bar{C}}_{=C}x + \underbrace{(F + E\bar{D}(id - K\bar{D})^{-1}L)}_{=D}u$$

* Bedingung für die Verwendung dieses Ergebnisses:

$\Longrightarrow (id - k\bar{D})$ muss invertierbar sein! //

$\bar{A} = diag(A_1, A_2)$, $\bar{B} = diag(B_1, B_2)$, $C = diag(C_1, C_2)$, $D = diag(D_1, D_2)$

i) $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2, D_1$ und D_2 waren gegeben.

$$\bar{D} = diag(D_1, D_2) = diag(0,0)$$

• $$(id - k\bar{D}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = id$$

$\det(id) = 1 \neq 0 \Longrightarrow (id - k\bar{D})$ ist invertierbar!

• $(id - k\bar{D})^{-1} = id^{-1} = id$ //

$$\bar{A} = diag(A_1, A_2) = diag(diag(-1,-2), diag(-2,-3))$$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \qquad \bar{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{B} = diag(B_1, B_2) = diag([0 \ 1]^T, [1 \ 0]^T)$$

$$\bar{C} = diag(C_1, C_2) = diag([0 \ 1], [1 \ 0]) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

• $$A = \bar{A} + \bar{B}(id - k\bar{D})^{-1} k . \bar{C} = \bar{A} + \bar{B} \, id^{-1} . k \, \bar{C} = \bar{A} + \bar{B} k \bar{C}$$

$$A = \bar{A} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \bar{A} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \bar{A} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \quad //$$

• $$B = \bar{B}(id - k\bar{D})^{-1} L = \bar{B} . id^{-1} . L = \bar{B} . L$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad //$$

$$\bullet\ C = E(id + \bar{D}\cancel{(id-k\bar{D})^{-1}}.k)\bar{C} = E\bar{C}$$

$0\ (\bar{D}=0)$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad //$$

$$\bullet\ D = (F + \cancel{E\bar{D}(id-k\bar{D})^{-1}.L}) = F = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad //$$

$0\ (\bar{D}=0)$

ii) $\bar{D} = \operatorname{diag}(D_1, D_2) = \operatorname{diag}(1, 0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Bedingung: $(id - k\bar{D}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} =$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$\det(id - k\bar{D}) = 0.1 + 1.0 = 0 \rightarrow$ nicht invertierbar!

* Die Zusammenschaltung von ZS_1 und ZS_2 kann **nicht** durch ein ZS beschrieben werden!

↳ Beweis: Elimination von η in (c):

c) $y = k\eta + Lu = k(\bar{C}x + \bar{D}y) + Lu = k\bar{C}x + k\bar{D}y + Lu$

$(id - k\bar{D})y = k\bar{C}x + Lu \Rightarrow y = \underline{(id - k\bar{D})^{-1}}(k\bar{C}x + Lu)$

Es ist nicht möglich, die interne Variable y zu eliminieren, da $(id - k\bar{D})$ nicht invertierbar ist!