

5. Übung, 14.02.2022, Victor Chidde Chaim

5.1 Aufgabe: $\mathbb{F}(t) = \exp(At)$? $A = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 1 \\ -3 & 0 & -4 \end{bmatrix}$

Eigenwerte: $\det(A - \lambda \text{id}) = 0$

$$\det(A - \lambda \text{id}) = \det \begin{bmatrix} -4-\lambda & 0 & 0 \\ 3 & -4-\lambda & 1 \\ -3 & 0 & -4-\lambda \end{bmatrix} = (-4-\lambda)^3 = 0$$

$\lambda_{1,2,3} = -4$, \Rightarrow Die Matrix A hat Eigenwerte, die denselben Wert haben, der von 0 verschieden ist. Daher verwenden wir den EW-Verschiebungstrick.

$$A = \lambda \text{id} + (A - \lambda \text{id})$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \exp(At) &= \exp((\lambda \text{id} + (A - \lambda \text{id}))t) = \\ &= \exp(\lambda \text{id}t) \exp((A - \lambda \text{id})t) \end{aligned}$$

$$\bullet \exp(\lambda \text{id}t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda \text{id})^n t^n}{n!} = \text{id} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n t^n}{n!} = \text{id} e^{\lambda t} = \text{id} e^{-4t}$$

$$\bullet \exp((A - \lambda \text{id})t) \rightarrow A - \lambda \text{id} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Eigenwerte von $(A - \lambda \text{id}) \Rightarrow \lambda_{1,2,3} = 0 \rightarrow$ Nilpotent!

$$(A - \lambda \text{id})^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(A - \lambda \text{id})^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(A - \lambda \text{id})^m = 0, \quad m \geq 3.$$

$$\exp((A - \lambda \text{id})t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(A - \lambda \text{id})^n t^n}{n!} = \text{id} + (A - \lambda \text{id})t + \frac{(A - \lambda \text{id})^2 t^2}{2}$$

$$\exp(A - \lambda \text{id}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3t & 0 & t \\ -3t & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^2$$

$$\exp((A - \lambda \text{id})t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3t & -3t/2 & 0 \\ -3t & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\bullet \exp(At) = \exp(\lambda \text{id}t) \exp((A - \lambda \text{id})t)$$

$$\exp(At) = e^{-4t} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3t & -3t/2 & 0 \\ -3t & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-4t} & 0 & 0 \\ e^{-4t}(3t - 3t/2) & e^{-4t} & 0 \\ -e^{-4t} \cdot 3t & 0 & e^{-4t} \end{bmatrix}$$

Aufgabe 5.2 $p(s) = s^3 + ks^2 + (1+k)s + 6$

1. Bedingung: Alle Koeffizienten c_0, c_1, c_2 und c_3 mit denselben Vorzeichen.

$$c_0 = 6, c_1 = (1+k), c_2 = k, c_3 = 1 \quad \therefore$$

$$c_1 > 0: c_1 = 1+k > 0 \Leftrightarrow k > -1$$

$$c_2 > 0: c_2 = k > 0 \text{ stärker als } \boxed{k > 0}$$

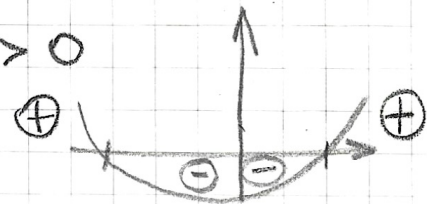
2. Bedingung: Hauptabschnittsdeterminante von $H > 0$

$$H = \begin{bmatrix} c_1 & c_3 & c_5 \\ c_0 & c_2 & c_6 \\ 0 & c_1 & c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1+k) & 1 & 0 \\ 6 & k & 0 \\ 0 & (1+k) & 1 \end{bmatrix}$$

$$D_1 > 0: D_1 = 1+k > 0, k > -1 \text{ (} k > 0 \text{ ist stärker)}$$

$$D_2 > 0: D_2 = k(1+k) - 6 = k^2 + k - 6 > 0$$

$$k_0 = \frac{-1 \pm 5}{2} \Rightarrow \begin{matrix} k_1 = -3 \\ k_2 = 2 \end{matrix}$$



$$k^2 + k - 6 > 0 \text{ wenn } k < -3 \text{ oder } k > 2$$

nicht möglich
(1. Bedingung: $k > 0$)
stärker als $k > 0$

$$D_3 > 0: D_3 = (-1)^{3+3} \cdot 1 \cdot D_2 = D_2 \rightarrow k > 2$$

$\bullet p(s)$ ist Hurwitz für $k > 2$. //

Aufgabe 5.3 $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & 0 \\ 5 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
 $D = 0$

1) $a_2 = 0 \Rightarrow A = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -4 \end{bmatrix}$

Eigenwerte von A: $\det(A - \lambda \text{id}) = 0$

EW: $\det \begin{pmatrix} a_1 - \lambda & 0 & 0 \\ 5 & -1 - \lambda & 2 \\ -1 & 0 & -4 - \lambda \end{pmatrix} = (a_1 - \lambda)(-1 - \lambda)(-4 - \lambda) = 0$

$\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -4$, $\lambda_3 = a_1 \Rightarrow$ asymptotische Stabilität

Bedingung: \bullet Für alle λ von A gilt $\text{Re}(\lambda) < 0$
 (6.5 Satz, (iii)).

$\lambda_1 < 0 \checkmark$, $\lambda_2 < 0 \checkmark$ und $\lambda_3 = a_1 < 0$.

ZS asymptotisch stabil für $a_1 < 0$.

2) $a_2 = 10 \Rightarrow A = \begin{bmatrix} a_1 & 10 & 0 \\ 5 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -4 \end{bmatrix}$

$p(s)$: charakteristisches Polynom von A

$p(s) = \det(s \text{id} - A)$

$\det(s \text{id} - A) = \det \begin{pmatrix} s - a_1 & -10 & 0 \\ -5 & s + 1 & -2 \\ 1 & 0 & s + 4 \end{pmatrix} =$

$= (s - a_1)(s + 1)(s + 4) + 20 - 50(s + 4)$

$p(s) = (s - a_1)(s^2 + 5s + 4) + 20 - 50s - 200$

$p(s) = s^3 + 5s^2 + 4s - a_1 s^2 - 5a_1 s - 4a_1 + 20 - 50s - 200$

$p(s) = s^3 + s^2(s - a_1) + s(-46 - 5a_1) + (-4a_1 - 180)$

1. Bedingung: Alle Koeffizienten mit dasselben VZ.

$c_0 = -4a_1 - 180$, $c_1 = -5a_1 - 46$, $c_2 = 5 - a_1$, $c_3 = 1$

$$c_0 > 0 : -4a_1 - 180 > 0, \quad -4a_1 > 180 \Leftrightarrow a_1 < -45$$

$$c_1 > 0 : -5a_1 - 46 > 0, \quad -5a_1 > 46 \Leftrightarrow a_1 < -46/5$$

$$c_2 > 0 : 5 - a_1 > 0, \quad -a_1 > -5 \Leftrightarrow a_1 < 5$$

* Stärkste Ungleichung: $a_1 < -45$ //
 (wenn $a_1 < -45$, dann sind $a_1 < 5$ und $a_1 < -46/5$ auch wahr)

2. Bedingung: Hauptabschnittsdeterminante von $H > 0$

$$H = \begin{bmatrix} a_1 & c_3 & c_5 \\ c_0 & c_2 & c_6 \\ 0 & c_1 & c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5a_1 - 46 & 1 & 0 \\ -180 - 4a_1 & 5 - a_1 & 0 \\ 0 & -(5a_1 - 46) & 1 \end{bmatrix}$$

$$D_1 > 0 : D_1 = -5a_1 - 46, \quad a_1 < -46/5 \quad (a < -45 \text{ stärker})$$

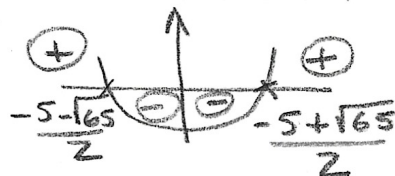
$$D_2 > 0 : (-5a_1 - 46)(5 - a_1) - (-180 - 4a_1) = D_2$$

$$-25a_1 + 5a_1^2 - 46 \cdot 5 + 46 \cdot a_1 + 180 + 4a_1 = D_2$$

$$D_2 = 5a_1^2 + 25a_1 - 50 > 0$$

$$\text{Wurzeln: } 5a_1^2 + 25a_1 - 50 = 0 \Rightarrow a_1^2 + 5a_1 - 10 = 0$$

$$a_{1,0} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 40}}{2}$$



$$D_2 > 0 \text{ für } a_1 < -5 - \frac{\sqrt{65}}{2} \text{ oder}$$

$$a_1 > -5 + \frac{\sqrt{65}}{2} \quad (\text{nicht möglich, 1. Bedingung})$$

$$a_1 < -5 - \frac{\sqrt{65}}{2} \quad (a_1 < -45 \text{ stärker})$$

* $p(s)$ ist Hurwitz für $a_1 < -45$. Das bedeutet, dass das ZS für $a_1 < -45$ asympt. stabil ist.

$$3) a_1 = -2, a_2 = 0, u(t) = 3 - t^{-2} e^{-3t}$$

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -4 \end{bmatrix}, \quad \varphi(\infty, x_0, u) = -\overset{0}{\bar{A}} \overset{0}{B} u(\infty)$$

$$\bullet u(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} (3 - t^{-2} e^{-3t}) = \lim_{t \rightarrow \infty} 3 - \lim_{t \rightarrow \infty} t^{-2} - \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-3t} = 3$$

$$\bullet \bar{A}^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A) = \frac{-1}{8} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 18 & 8 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \varphi(\infty, x_0, u) = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 18 & 8 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot 3$$

$$\varphi(\infty, x_0, u) = \frac{3}{8} \begin{bmatrix} -4 \\ -30 \\ 3 \end{bmatrix} //$$