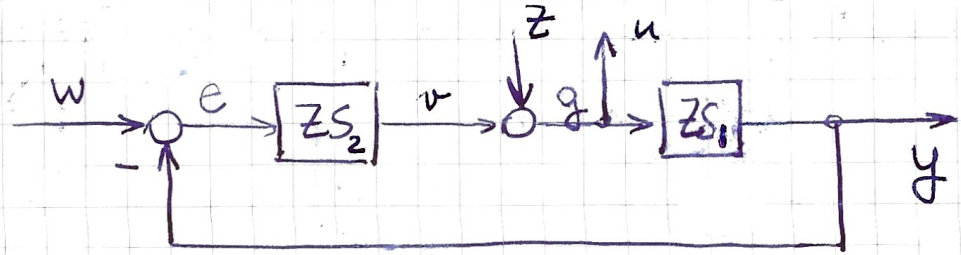


10. Übung, 21.03.2022, Victor Chidde chains.

10.1 Aufgabe =

$A_1 = 1, B_1 = 1$

$C_1 = 1, D_1 = 0$



i) P-Regler: CLCP Nullstelle -2.

$CLCP = N_1 N_2 + z_1 z_2, H_1(s) = C_1 (s - A_1) B_1 + D_1$

$H_1 = 1(s-1) \cdot 1 = \frac{1}{(s-1)}; N_1 = (s-1), z_1 = 1$

$H_2(s) = k_p$ (P-Regler), $N_2 = 1, z_2 = k_p$

$CLCP = 1(s-1) + 1 \cdot k_p = s - 1 + k_p$

Nullstelle -2: $s - 1 + k_p = s + 2 \Rightarrow k_p - 1 = 2, \boxed{k_p = 3}$

ii) I-Anteil, CLCP $p_1 = p_2 = p$ (weg. reelle)

PI-Regler $\Rightarrow H_2(s) = k_p + \frac{k_I}{s} = \frac{k_p \cdot s + k_I}{s} = \frac{3 \cdot s + k_I}{s} = \frac{z_2}{s} = N_2$

$CLCP = (s-1) \cdot s + (3s + k_I) \cdot 1 = s^2 - s + 3s + k_I$

$s^2 + 2s + k_I \Rightarrow$ Nullstelle: $p = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4k_I}}{2}$ (NS)

Bedingung: $p_1 = p_2 \rightarrow 4 - 4k_I = 0 \rightarrow \boxed{k_I = 1}$

$p_1 = p_2 = -\frac{2}{2} = -1$ // BIBO-stabil!

iii) CLCP = $s^2 + 2s + 1 \Rightarrow$ NS: -1, BIBO-stabil, da $\text{Re}(p_1, p_2) < 0$.

Stationäre Genauigkeit: $SÜF(0) = 0, FÜF(0) = 1$

$FÜF(s) = \frac{z_1 z_2}{CLCP} = \frac{3s + 1}{s^2 + 2s + 1}, FÜF(0) = 1$ stationäre Genauigkeit erfüllt.

$SÜF(s) = \frac{z_1 N_2}{CLCP} = \frac{s}{s^2 + 2s + 1}, SÜF(0) = 0$ ✓

iv) Anstiegszeit: t_r für 90% $w(\infty)$

$$\psi(t, 0, w + \cancel{z}) = \psi(t, 0, w) = \psi(t, 0, v) = (g_F^* v)(t)$$

0 (Annahme)

Impulsantwort: $g_F(t) = C_F \exp(A_F t) \cdot B_F v(t) + D_F \delta(t)$

$$FÜF(s) = \frac{3s+1}{s^2+2s+1}, \quad \text{Regelungsnormialform: } A_F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$B_F = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C_F = [1 \quad 3], \quad D_F = 0$$

$$g_F(t) = [1 \quad 3] \exp(A_F t) \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} v(t)$$

$\exp(A_F t) \Rightarrow A_F \rightarrow \lambda_{1,2} = -1$, EW-Verschiebung!

$$A_F = (A_F - \lambda id) + \lambda id, \quad (A_F - \lambda id) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \text{EW} = 0$$

$$(A_F - \lambda id)^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{nilpotent } A=0, a \geq 2$$

$$\exp((A_F - \lambda id)t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(A_F - \lambda id)^n t^n}{n!} = id + (A_F - \lambda id)t //$$

$$\exp(\lambda id t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda id)^n t^n}{n!} = \begin{bmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n t^n}{n!} & 0 \\ 0 & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n t^n}{n!} \end{bmatrix} = e^{\lambda t} \cdot id$$

$$\exp(A_F t) = \exp(\lambda id t) \cdot \exp((A_F - \lambda id)t) =$$

$$\exp(A_F t) \stackrel{\lambda=-1}{=} e^{-t} \cdot id \cdot (id + (A_F + id)t) = \begin{bmatrix} e^{-t} + e^{-t}t & e^{-t}t \\ -te^{-t} & e^{-t} + e^{-t}(-t) \end{bmatrix}$$

$$g_F(t) = [1 \quad 3] \begin{bmatrix} \cdot & e^{-t}t \\ \cdot & e^{-t}(1-t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} v(t) = [1 \quad 3] \begin{bmatrix} e^{-t}t \\ e^{-t}(1-t) \end{bmatrix}$$

$$g_F(t) = e^{-t}t + 3e^{-t}(1-t) = 3e^{-t} - 2e^{-t}t //$$

$$\psi(t, 0, v) = (g_F^* v)(t) = v(t) \int_0^t (3e^{-z} - 2e^{-z}z) dz$$

$$\psi(t, 0, v) = v(t) \left(3 \int_0^t e^{-z} dz - 2 \int_0^t e^{-z} z dz \right)$$

$$\int_0^t \bar{e}^z dz \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} u = z \\ dv = \bar{e}^z dz \\ v = -\bar{e}^z \end{array} \right\} \Rightarrow \int u dv = uv - \int v du$$

$$\int_0^t \bar{e}^z dz = \left(-z \bar{e}^z + \int \bar{e}^z dz \right) \Big|_0^t = -t \bar{e}^t - (\bar{e}^z) \Big|_0^t = 1 - \bar{e}^t - t \bar{e}^t$$

$$\psi(t, 0, v) = v(t) (3 \cdot (1 - e^{-t}) - 2 (1 - e^{-t} - t e^{-t}))$$

$$\psi(t, 0, v) = v(t) (1 - e^{-t} + 2 e^{-t} \cdot t) \parallel \parallel v(\infty)$$

$$\text{Anstiegszeit } tr : \psi(tr, 0, v) = 0,9 w(\infty) = 0,9$$

$$\psi(tr, 0, v) \stackrel{tr > 0}{=} 1 - e^{-tr} + 2 e^{-tr} \cdot tr, \quad e^{-tr} \cong (1 - tr)$$

$$\psi(tr, 0, v) \cong 1 - (1 - tr) + 2 tr (1 - tr) = 0,9$$

$$tr + 2tr - 2tr^2 = 0,9 \rightarrow 2tr^2 - 3tr + 0,9 = 0$$

$$tr = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 8 \cdot 0,9}}{4} \rightarrow \boxed{tr_1 \cong 0,4} \quad tr_1 < tr_2$$

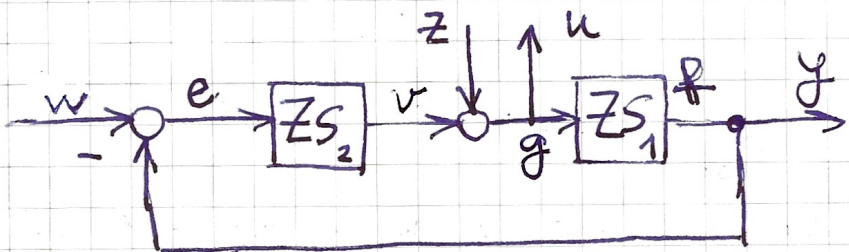
$$tr_2 \cong 1,08$$

Anstiegszeit $tr \cong 0,4$ sek. für $\psi(tr, 0, v) \cong 0,9 \parallel$

10.2 Aufgabe =

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -9 & -6 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C_1 = [8 \ -3], \quad D_1 = 0$$



i) PID-Regler: Methode des Stabilitätsrandes

$$H_1(s) = C_1 (sI - A_1)^{-1} B_1 + D_1 \overset{0}{\rightarrow}$$

$$(sI - A_1)^{-1} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 9 & s+6 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{s(s+6)+9} \begin{bmatrix} s+6 & 1 \\ -9 & s \end{bmatrix}$$

$$H_1(s) = \frac{1}{s^2+6s+9} [8 \ -3] \begin{bmatrix} s+6 & 1 \\ -9 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{s^2+6s+9} [8 \ -3] \begin{bmatrix} 1 \\ s \end{bmatrix}$$

$$H_1(s) = \frac{8-3s}{s^2+6s+9} \parallel \rightarrow \text{BIBO stabil} \parallel \text{Hurwitz-Kriterium}$$

$a_2=1, a_1=6, a_0=9$ (2. Ordnung Polynom
gleich Vorzeichen)

P-Regler ($K_{krit} = H_2(s)$): Dauerschwingungen

$$CLCP: z_1 z_2 + N_1 N_2 = k_{krit} (8 - 3s) + s^2 + 6s + 9$$

$$CLCP = s^2 + s(-3k_{krit} + 6) + 9 + 8k_{krit}$$

$$p = \frac{-(6 - 3k_{krit}) \pm \sqrt{(6 - 3k_{krit})^2 - 4(9 + 8k_{krit})}}{2}$$

Dauerschwingungen $\rightarrow \operatorname{Re}(p) = 0 \rightarrow (6 - 3k_{krit}) = 0$

$$6 = 3k_{krit} \rightarrow \boxed{k_{krit} = 2}$$

$$p = \frac{\pm \sqrt{-4(9 + 8 \cdot 2)}}{2} = \pm i \frac{\sqrt{4 \cdot 25}}{2} = \pm i \cdot 5 //$$

Zwei imaginäre Pole: $p_1 = i5$, $p_2 = -i5$

Frequenz der Schwingungen: $\omega_s = i \cdot \omega_s$

$$\omega_s = 5 \text{ rad/s}, \quad \omega_s = \frac{5}{2\pi} \text{ Hz} \rightarrow \omega_s \cong 0,8 \text{ Hz}$$

$$\cdot T_{krit} = 1/\omega_s = 1,26 \text{ Sek} //$$

* Parameter des Reglers (Seite 1007, Vorlesung 10)

$$K_p = 0,6 \cdot k_{krit}, \quad T_I = 0,5 \cdot T_{krit}, \quad T_D = 0,12 \cdot T_{krit}$$

$$K_p = 1,2, \quad T_I = 0,63, \quad T_D = 0,15$$

$$\cdot K_I = \frac{K_p}{T_I}, \quad K_I \cong 1,9, \quad \cdot K_D = K_p \cdot T_D \cong 0,19 //$$

$$\text{PID-Regler: } H_2(s) = K_p + \frac{K_I}{s} + \frac{s K_D}{1 + T_I s}$$

$$H_2(s) = \frac{K_p s (1 + T_I s) + K_I (1 + T_I s) + s^2 K_D}{s (1 + T_I s)}$$

$$= \frac{s^2 (K_D + K_p T_I) + s (K_I T_I + K_p) + K_I}{T_I s^2 + s}$$

$$= \frac{s^2 (0,19 + 1,2 T_I) + s (1,9 T_I + 1,2) + 1,9}{T_I s^2 + s}$$

ii) BIBO-Stabilität und stationäre Genauigkeit:

* BIBO-Stabilität: $CLCP_0 \Rightarrow CLCP$ mit $T_1 = 0$.

$$CLCP_0 \stackrel{T_1=0}{=} z_1 z_2 + N_1 N_2 \stackrel{T_1=0}{=} (8-3s)(0,19s^2 + 1,2s + 1,9) + s(s^2 + 6s + 9)$$

$$CLCP_0 = s^3(1 + 3 \cdot 0,19) + s^2(8 \cdot 0,19 - 1,2 \cdot 3 + 6) + s(-1,9 \cdot 3 + 1,2 \cdot 8 + 9) + 8 \cdot 1,9$$

$$CLCP_0 = s^3 \cdot 0,43 + s^2 \cdot 3,92 + s \cdot 12,9 + 15,2 //$$

Hurwitz-Kriterium =

1. Bedingung: Alle Koeffizienten c_0, c_1, c_2 und c_3 mit denselben Vorzeichen:

$$\text{sgn}(0,43) = \text{sgn}(3,92) = \text{sgn}(12,9) = \text{sgn}(15,2) = 1$$

Alle Koeffizienten sind positiv, dann sie denselben Vorzeichen haben.

2. Bedingung: Hauptabschnittsdeterminante von $H > 0$.

$$H = \begin{bmatrix} c_1 & c_3 & c_5 \\ c_0 & c_2 & c_4 \\ 0 & c_1 & c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12,9 & 0,43 & 0 \\ 15,2 & 3,92 & 0 \\ 0 & 12,9 & 0,43 \end{bmatrix}$$

$$D_1 = 12,9 > 0 \quad \checkmark$$

$$D_2 = 12,9 \cdot 3,92 - 15,2 \cdot 0,43 \cong 44 > 0 \quad \checkmark$$

$$D_3 = D_2 \cdot (-1)^{3+3} \cdot 0,43 \cong 18,9 > 0 \quad \checkmark$$

$CLCP_0$ ist Hurwitz! \rightarrow Bedingung Theorem 10.3 //

$$\text{Theorem 10.3} = \begin{matrix} k_D \cdot b_{n-1}^1 = 0,19(-3) = -0,57 \neq 1 \\ \text{und} \\ k_I \cdot b_0^1 = 1,9 \cdot 8 = 15,2 > 0 \end{matrix}$$

für hinreichend kleinen $T_1 > 0$ ist der Regelkreis stabil.

* Stationäre Genauigkeit:

$$CLCP_T = (8-3s)((0,19 + 1,2T_1)s^2 + (1,2 + 1,9T_1)s + 1,9) + (T_1s + 1) \cdot s \cdot (s^2 + 6s + 9)$$

$$\begin{aligned} \text{CLCP}_{T_1} &= s^4 T_1 + s^3 (1 + T_1 \cdot 6 - (0,19 + 1,2 T_1) \cdot 3) + \\ &+ s^2 (T_1 \cdot 9 + 6 + 8(0,19 + 1,2 T_1) - 3(1,2 + 1,9 T_1)) + \\ &+ s(9 - 3 \cdot 1,9 + 8(1,2 + 1,9 \cdot T_1)) + 8 \cdot 1,9 \end{aligned}$$

$$\text{CLCP}_{T_1}(0) = 15,2 //$$

$$\begin{aligned} \text{FÜF}(s) &= \frac{Z_1 Z_2}{\text{CLCP}_{T_1}} = \frac{(s^2(0,19 + 1,2 T_1) + s(1,9 T_1 + 1,2) + 1,9)(8 - 3s)}{\text{CLCP}_{T_1}} \\ &= \frac{-s^3(0,19 + 1,2 T_1) + s^2(8(0,19 + 1,2 T_1) - 3(1,9 T_1 + 1,2)) + \\ &+ s(8(1,9 T_1 + 1,2) - 3 \cdot 1,9) + 8 \cdot 1,9}{\text{CLCP}_{T_1}} \end{aligned}$$

$$\bullet \text{ FÜF}(0) = \frac{15,2}{\text{CLCP}_{T_1}(0)} = \frac{15,2}{15,2} = 1 \quad \checkmark$$

$$\text{SÜF}(s) = \frac{Z_1 N_2}{\text{CLCP}_{T_1}} = \frac{(8 - 3s)(T_1 s^2 + s)}{\text{CLCP}_{T_1}} = \frac{-s^3 \cdot 3 T_1 + s^2(8 T_1 - 3) + s \cdot 8}{\text{CLCP}_{T_1}}$$

$$\text{SÜF}(0) = \frac{0}{\text{CLCP}_{T_1}(0)} = \frac{0}{15,2} = 0 \quad \checkmark$$
