

1. Übung, 17.01.2022, Victor C. Chaim

- Aufgabe 1.1

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -6 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot x = \begin{bmatrix} 3 & -6 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 2 \cdot 3 - 1 \cdot 6 + 1 \cdot 2 - 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 - 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1$$

$$\Rightarrow A \cdot x = 6 - 6 + 2 - 2 + 2 - 1 - 1 = 0 //$$

Jetzt, $A \cdot x = 0$, aber $x = [x_1 \ x_2 \ x_3]^T =$

$$A \cdot x = \begin{bmatrix} 3 & -6 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x_1 - 6x_2 \\ 2x_2 - 2x_3 \\ x_1 - x_2 - x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

• triviale Lösung: $x_1 = x_2 = x_3 = 0 //$

• nicht triviale Lösung: $\begin{cases} x_1 = x_2 + x_3 \\ x_1 = 2x_2 \\ x_2 = x_3 \end{cases} \Rightarrow$ unendliche Lösungen.

zum Beispiel: $\begin{cases} x_1 = 4, x_2 = 2, x_3 = 2 \\ x_1 = 2, x_2 = 1, x_3 = 1 \end{cases} \dots$ und so weiter

• Aufgabe 1.2:
$$\begin{cases} 2u + 4v + 2z = 6 \\ 3v + 3w + z = 4 \\ 2u + 7v + 9w + 7z = 8 \\ 6w + 5z = -4 \end{cases}$$

als $A \cdot x = b$ schreiben: $x = [u \ v \ w \ z]^T$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 9 & 7 \\ 0 & 0 & 6 & 5 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 8 \\ -4 \end{bmatrix}$$

• Gauss-Elimination:

(1) die 3. Zeile durch die 1. Zeile ersetzen:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 9 & 7 \\ 0 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 5 \end{bmatrix}, \quad b_1 = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 6 \\ -4 \end{bmatrix}$$

(2) die 4. Zeile durch die 3. Zeile ersetzen:

$$A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 9 & 7 \\ 0 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 5 \\ 2 & 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ -4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

(3) die 1. Zeile von der 4. Zeile abziehen:

$$A_3 = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 9 & 7 \\ 0 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 5 \\ 0 & -3 & -9 & -5 \end{bmatrix}, \quad b_3 = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ -4 \\ -2 \end{bmatrix}$$

(4) die 2. Zeile mit der 4. addieren:

$$A_4 = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 9 & 7 \\ 0 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & -6 & -4 \end{bmatrix}, \quad b_4 = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

(5) die 3. Zeile mit der 4. addieren:

$$A_5 = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 9 & 7 \\ 0 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = U \quad \text{und} \quad b_5 = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ -4 \\ -2 \end{bmatrix} = c //$$

umgeschriebenes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 2u + 7v + 9w + 7z &= 8 \\ 3v + 3w + z &= 4 \\ 6w + 5z &= -4 \\ z &= -2 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} z &= -2 // \\ w &= (4 - 5z)/6 = 1 // \\ v &= (4 - 3w - z)/3 = 1 // \\ u &= (8 - 7v - 9w - 7z)/2 = 3 // \end{aligned}$$

* Determinante ändert sich nicht bei: addition eines skalaren Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile.

* Nur Vorzeichen der Determinante ändert sich bei Vertauschen zweier Zeilen:

↳ die Zeilen zweimal (1) und (2) ausgetauscht wurden, bleibt das Signol der Determinante dasselbe.

* Determinante einer oberen oder unteren Dreiecksmatrix = Produkt der Diagonaleinträge:

$$\det(A) = \det(U) = 2 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 1 = 36 //$$

Aufgabe 1.3 : 1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ und 2. $\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$

* Gauss-Jordan-Methode:

$$1. [A \quad id] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{- \\ -}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

obere
Dreiecksmatrix

$$= [id \quad A^{-1}] \quad \therefore \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} //$$

$$2. [A \quad id] = \left[\begin{array}{cc|cc} \cos \theta & -\sin \theta & 1 & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow[\cdot \cos \theta]{\cdot \frac{\sin \theta}{\cos \theta}} \sim \theta \neq \pi/2, \theta \neq -\pi/2$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} \cos \theta & -\sin \theta & 1 & 0 \\ 0 & \frac{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}{\cos \theta} & \frac{-\sin \theta}{\cos \theta} & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\cdot \cos \theta} \left[\begin{array}{cc|cc} \cos \theta & -\sin \theta & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\sin \theta \cos \theta & \cos \theta \end{array} \right] \xrightarrow{\oplus}$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} \cos \theta & 0 & 1 - \sin^2 \theta & \cos \theta \sin \theta \\ 0 & 1 & -\sin \theta \cos \theta & \cos \theta \end{array} \right] \xrightarrow{\cdot \frac{1}{\cos \theta}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & 1 & -\sin \theta & \cos \theta \end{array} \right] =$$

$$= [id \quad A^{-1}] \quad \therefore \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} //$$

Für den Fall $\theta = \pi/2$:

$$[A \mid \text{id}] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\oplus} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\ominus} \\ \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\oplus} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] = [\text{id} \mid A^{-1}]$$

* Der gleiche Verfahren für $\theta = -\pi/2$.

Aufgabe 1.4 $u = [1 \ 1 \ 3]$, $v = [2 \ 3 \ 6]$, $w = [1 \ 4 \ 3]$

• Sind die Vektoren linear unabhängig?

$$\det(A) = \det([u^T \ v^T \ w^T]) = \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 3 \end{bmatrix}\right) = \\ = 1 \cdot 3 \cdot 3 + 2 \cdot 4 \cdot 3 + 1 \cdot 6 \cdot 1 - 3 \cdot 3 \cdot 1 - 6 \cdot 4 \cdot 1 - 1 \cdot 2 \cdot 3 = \\ = 9 + 24 + 6 - 9 - 24 - 6 = 0 \quad \therefore$$

• u, v, w sind linear abhängig, dann bilden sie keine Basis für \mathbb{R}^3 .

Überprüfung: Der Vektor v kann als eine Kombination von u und w geschrieben werden:

$$\bullet v = \frac{5}{3} \cdot u + \frac{1}{3} w = \left[\frac{5}{3} \ \frac{5}{3} \ 5\right] + \left[\frac{1}{3} \ \frac{4}{3} \ 1\right] = [2 \ 3 \ 6] \quad \checkmark$$

Aufgabe 1.5 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

$$\det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} \det(A \text{ ohne Zeile } i, \text{ ohne Spalte } j) \cdot A_{ij}$$

Kofaktor

$$\det A = (-1)^{1+1} \det\left(\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}\right) \cdot A_{11} + (-1)^{1+2} \det\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}\right) \cdot A_{12} +$$

$$+ (-1)^{1+3} \det\left(\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) A_{13} = (-1)^{2+1} \det\left(\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}\right) A_{2,1} + (-1)^{2+2} \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}\right) A_{2,2} +$$

$$+ (-1)^{2+3} \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) A_{2,3} = (-1)^{3+1} \det\left(\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}\right) A_{3,1} +$$

$$\begin{aligned}
 & + (-1)^{3+2} \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot A_{3,2} + (-1)^{3+3} \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot A_{3,3} = \\
 & = 1 \cdot 20 \cdot A_{1,1} + (-1) \cdot 0 \cdot A_{1,2} + 1 \cdot 0 \cdot A_{1,3} = (-1) \cdot 10 \cdot A_{2,1} + \\
 & + 1 \cdot 5 \cdot A_{2,2} + (-1) \cdot 0 \cdot A_{2,3} = 1 \cdot (-12) \cdot A_{3,1} + (-1) \cdot 0 \cdot A_{3,2} + 1 \cdot 4 \cdot A_{3,3}
 \end{aligned}$$

Kofaktoren: $c_{11} = 20, c_{12} = 0, c_{13} = 0$
 $c_{21} = -10, c_{22} = 5, c_{23} = 0$
 $c_{31} = -12, c_{32} = 0, c_{33} = 4$

$$\begin{aligned}
 \det(A) &= 20 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot 3 = 20 \\
 &= -10 \cdot 0 + 5 \cdot 4 + 0 \cdot 0 = 20 \\
 &= -12 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 4 \cdot 5 = 20
 \end{aligned}$$

$$B = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} \\ c_{12} & c_{22} & c_{32} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & -10 & -12 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20 & -10 & -12 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 20 \end{bmatrix} = \text{id} \cdot 20$$

det(A)

$$A \cdot B = \text{id} \cdot \det(A) = \det(A) \cdot \text{id} \rightarrow \cdot \frac{1}{\det(A)} \quad (\det(A) \neq 0)$$

$$A \cdot \frac{B}{\det(A)} = \text{id} \therefore A^{-1} = \frac{B}{\det(A)} = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & -3/5 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/5 \end{bmatrix}$$

Aufgabe 1.6 $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

Eigenwerte: $\det(A - \lambda \text{id}) = 0$

$$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 2 & 4-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(4-\lambda) - (-1) \cdot 2 =$$

$$= 4 - \lambda - 4\lambda + \lambda^2 + 2 = \lambda^2 - 5\lambda + 6 \rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = 3 \end{cases}$$

$$Av = \lambda v \rightarrow \lambda_1 = 2 \rightarrow (A - \lambda_1 \text{id}) \cdot v_1 = 0$$

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{bmatrix} = 0 \quad v_{11} = -v_{12} \therefore v_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$(A - \lambda_2 \text{id}) \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{bmatrix} = 0 \rightarrow v_{21} = -\frac{v_{22}}{2}$$

$$v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Spur}(A) = \sum_{j=1}^n A_{jj} = \sum_{j=1}^2 A_{jj} = 1 + 4 = 5 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 5 \end{array} \right. \checkmark \quad \text{Spur}(A) = \lambda_1 + \lambda_2$$

$$\det(A) = 1 \cdot 4 - (-1) \cdot 2 = 4 + 2 = 6 \quad \checkmark$$

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 6 \quad \det(A) = \lambda_1 \cdot \lambda_2$$

$$B = A - 7 \cdot \text{id} = \begin{bmatrix} -6 & -1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$

Eigenwerte: $\det(B - \lambda I) = 0$

$$\det(B - \lambda I) = \det \left(\begin{bmatrix} -6-\lambda & -1 \\ 2 & -3-\lambda \end{bmatrix} \right) = (-6-\lambda)(-3-\lambda) + 2$$

$$= 18 + 6\lambda + 3\lambda + \lambda^2 + 2 = \lambda^2 + 9\lambda + 20$$

$$\lambda_{B1,2} = \frac{-9 \pm \sqrt{9^2 - 4 \cdot 20}}{2} \Rightarrow \lambda_{B1} = -4, \lambda_{B2} = -5 //$$

Eigenvektoren: $(B - \lambda_{B1} \text{id}) \cdot v_{B1} = 0$

$$\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{B11} \\ v_{B12} \end{bmatrix} = 0 \quad v_{B11} = -\frac{v_{B12}}{2} \quad v_{B1} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$(B - \lambda_{B2} \text{id}) \vec{v}_{B2} = 0$$

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{B21} \\ v_{B22} \end{bmatrix} = 0, \quad v_{B21} = -v_{B22} \rightarrow v_{B2} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

* Der Eigenvektoren bleibt derselbe!

* Die Eigenwerte wurden mit demselben Faktor (-7) addiert, mit dem die id-Matrix multipliziert wird.

* Beweis, dass die Determinante gleich der Multiplikation der Eigenwerte ist:

$$\det(A - \lambda I) = p(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda) \dots (\lambda_n - \lambda)$$

↳ faktorisiertes Polynom

Da λ eine Variable ist, wählen wir $\lambda = 0$, \therefore

$$\det(A - 0 \cdot I) = \det(A) = (\lambda_1 - 0)(\lambda_2 - 0) \dots (\lambda_n - 0)$$

$$\det(A) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \dots \lambda_n //$$

Beweis, dass die Spur gleich der Summe der Eigenwerte:

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= p(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda) \dots (\lambda_n - \lambda) \\ &= (-1)^n (\lambda^n - \lambda^{n-1}(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n) + \dots + (-1)^n (\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n)) \\ &= (-1)^n (\lambda^n - \lambda^{n-1}(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n) + \dots + (-1)^n \det(A)) \quad (\text{I}) \end{aligned}$$

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{bmatrix} =$$

$$= (-1)^{1+1} (a_{11} - \lambda) \det(M_{11}) + (-1)^{1+2} a_{12} \det(M_{12}) + \dots + (-1)^{1+n} a_{1n} \det(M_{1n})$$

$$= (-1)^{1+1} (a_{11} - \lambda) (a_{22} - \lambda) \det(M_{22}^*) + (-1)^{1+2} a_{12} \det(M_{12}) + \dots + (-1)^{1+n} a_{1n} \det(M_{1n})$$

$$= (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda)(a_{33} - \lambda) \dots (a_{nn} - \lambda) + \dots + (-1)^{1+n} a_{1n} \det(M_{1n})$$

$$= (-1)^n (\lambda^n - \lambda^{n-1}(a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}) + p(\lambda^{n-2})) \quad (\text{II})$$

Der Vergleich der beiden Koeffizienten für den Term λ^{n-1} ergibt:

$$(a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}) = \text{Spur}(A) = (\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n) //$$

Aufgabe 1.7

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Dimension =
 $n = 4$

$\begin{cases} r_A = \text{rang}(A) = 1 \text{ nur eine linear-unabhängige Spalte} \\ r_C = \text{rang}(C) = 2 \text{ nur zwei linear-unabhängige Spalte} \end{cases}$

$$\det(A - \lambda \text{id}) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= (-1)^2 (1-\lambda) ((1-\lambda)^3 + 2 - 3(1-\lambda)) + (-1)^3 (1) ((1-\lambda)^2 + 1 - 2(1-\lambda))$$

$$+ (-1)^4 (1) ((1-\lambda) + (1-\lambda) + 1 - 1 - (1-\lambda)^2 - 1) +$$

$$+ (-1)^5 (1) (1 + (1-\lambda)^2 + 1 - 1 - 2(1-\lambda))$$

$$= (1-\lambda) ((1-\lambda)^3 + 2 - 3(1-\lambda)) - (1-\lambda)^2 - 1 + 2(1-\lambda) +$$

$$2(1-\lambda) - 1 - (1-\lambda)^2 - (1-\lambda)^2 - 1 + 2(1-\lambda)$$

$$= (1-\lambda)^4 - 6(1-\lambda)^2 + 8(1-\lambda) - 3$$

$$= (1 + \lambda^2 - 2\lambda)^2 - 6(1 + \lambda^2 - 2\lambda) + 8 - 8\lambda - 3$$

$$= (1 + \lambda^2 - 2\lambda + \lambda^2 + \lambda^4 - 2\lambda^3 - 2\lambda - \lambda^3 \cdot 2 + 4\lambda^2 - 6 - 6\lambda^2 + 12\lambda +$$

$$+ 8 - 8\lambda - 3 = \lambda^4 - 4\lambda^3 \Rightarrow \lambda_{1,2,3} = 0, \lambda_4 = 4 //$$

Eigenvektoren:

$$(A - \lambda \text{id})v = 0 \rightarrow (A - \lambda_4 \text{id}) \cdot v = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} 3v_1 = v_2 + v_3 + v_4 \\ 3v_2 = v_1 + v_3 + v_4 \\ 3v_3 = v_1 + v_2 + v_4 \\ 3v_4 = v_1 + v_2 + v_3 \end{cases} \Rightarrow v_1 = v_2 = v_3 = v_4 \rightarrow v = [1 \ 1 \ 1 \ 1]^T //$$

↳ Für Einseinmatrix $A_{n \times n}$: $\text{rang}(A_{n \times n}) = 1$ immer nur eine
 $\text{Spur}(A) = 1+1+\dots+1 = n = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = n \cdot \lambda$ linear-unabhängige Spalte
 algebr. Vielfachheit $\leftarrow (n-1)\lambda = 0$ $\lambda = n$

$$\det(C - \lambda \text{id}) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -\lambda \end{bmatrix} =$$

$$= (-1)^2 \cdot (-\lambda)(-\lambda^3 + \lambda + \lambda) + (-1)^3 \cdot (\lambda^2 + 1 - 1 + \lambda) +$$

$$+ (-1)^4 \cdot 0 \cdot (-\lambda - \lambda) + (-1)^5 \cdot (1)(1 + \lambda^2 - 1)$$

$$\det(C - \lambda \text{id}) = \lambda^4 - 2\lambda^2 - \lambda^2 - \lambda - \lambda^2 = \lambda^4 - 4\lambda^2 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = 0, \quad \lambda_{3,4} = \pm 2$$

Eigenvektoren:

$$(C - \lambda_3 \text{id})v_3 = 0 \rightarrow (C - \lambda_3 \text{id})v_3 = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{31} \\ v_{32} \\ v_{33} \\ v_{34} \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} v_{31} = (v_{32} + v_{34})/2 \\ v_{32} = (v_{31} + v_{33})/2 \\ v_{33} = (v_{32} + v_{34})/2 \\ v_{34} = (v_{31} + v_{33})/2 \end{cases} \rightarrow v_{31} = v_{32} = v_{33} = v_{34}$$

$$v_3 = [1 \ 1 \ 1 \ 1]^T$$

$$(C - \lambda_4 \text{id})v_4 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{41} \\ v_{42} \\ v_{43} \\ v_{44} \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} v_{41} = -(v_{42} + v_{44})/2 \\ v_{42} = -(v_{41} + v_{43})/2 \\ v_{43} = -(v_{42} + v_{44})/2 \\ v_{44} = -(v_{41} + v_{43})/2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} v_{43} = -v_{44} \\ v_{41} = v_{43} \\ v_{42} = v_{44} \\ v_{44} = -v_{41} \end{cases} \rightarrow v_4 = [1 \ -1 \ 1 \ -1]^T$$

immer nur zwei linear-unabhängige Spalte

↳ Für Schobmatrix $C_{n \times n}$ ($n > 2$): $\text{rang}(C_{n \times n}) = 2$
 $\text{Spur}(C) = 0 = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_{n-1} + \lambda_n \Rightarrow \lambda_{n-1} = -\lambda_n$
 algebr. Vielfachheit $\leftarrow (n-2) \cdot \lambda = 0$

Eigenwerte von $C_{n \times n} \Rightarrow \lambda_{1, \dots, n-2} = 0, \lambda_{n-1} = -\lambda_n$
 Eigenwerte von $C_{n \times n} + I_{n \times n} \Rightarrow \lambda_{1, \dots, n-2} = 1, \lambda_{n-1} = 1 + \lambda_n, \lambda_n = 1 + \lambda_n$

$$\det(C_{nn} - \frac{1}{2} \text{id}) = \det \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 1 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 1 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = 0$$

(für großes n)
 summe aller zeilen
 mit der ersten zeilen

$$\det(C_{n \times n} - \frac{n}{2} \text{id}) = 0, \rightarrow \text{Eigenwerte: } \left. \begin{array}{l} \lambda_n - \frac{n}{2} \\ \lambda_{n-1} - \frac{n}{2} \\ (n-2) \text{ mal } \lambda = -\frac{n}{2} \end{array} \right\} \text{ (wie in Aufg. 1.6 dargestellt)}$$

$$\det(C_{n \times n} - \frac{n}{2} \text{id}) = \left(-\frac{n}{2}\right)^{(n-2)} \cdot (\lambda_{n-1} - \frac{n}{2}) (\lambda_n - \frac{n}{2}) = 0 \quad \therefore$$

$$(\lambda_{n-1} - \frac{n}{2}) (\lambda_n - \frac{n}{2}) = 0, \quad \lambda_{n-1} = -\lambda_n \quad \therefore \quad \lambda_n^2 = \frac{n^2}{4}$$

$$\Rightarrow \lambda_{n-1, n} = \pm \frac{n}{2} //$$

Aufgabe 1.8 $TAT = D$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Eigenwerte: $\det(A - \lambda I) = 0$

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)^2(2-\lambda) - (1-\lambda) - (1-\lambda) =$$

$$= (1-2\lambda+\lambda^2)(2-\lambda) - 2 + 2\lambda =$$

$$= 2 - 4\lambda + 2\lambda^2 - \lambda + 2\lambda^2 - \lambda^3 - 2 + 2\lambda =$$

$$= -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 3\lambda = 0, \quad \lambda_1 = 0$$

$$\lambda^2 + 4\lambda - 3 = 0, \quad \lambda_2 = 3, \quad \lambda_3 = 1 //$$

Eigenvektoren: $(A - \lambda_i \text{id})v_i = 0$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \\ v_{13} \end{bmatrix} = 0 \quad \begin{array}{l} v_{11} - v_{12} = 0 \rightarrow v_{11} = v_{12} \\ v_{13} - v_{12} = 0 \rightarrow v_{13} = v_{12} \\ 2v_{12} = v_{11} + v_{13} \end{array}$$

$$v_1 = [1 \quad 1 \quad 1] //$$

$$(A - \lambda_2 \text{id})v_2 = 0 \rightarrow \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{21} \\ v_{22} \\ v_{23} \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} v_{21} = -v_{22}/2 \\ v_{22} = -(v_{21} + v_{23}) \\ v_{23} = -v_{22}/2 \end{cases} \quad v_2 = [1 \quad -2 \quad 1]$$

$$(A - \lambda_3 \text{id})v_3 = 0 \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} -v_{32} = 0 \\ v_{31} = -v_{33} \end{array}$$

$$v_3 = [1 \quad 0 \quad -1] //$$

$$T = [v_1 \ v_2 \ v_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \det(T) = 2 + 1 + 2 + 1 = 6$$

Kofaktoren T:

$$C_{11} = -2 \quad C_{12} = 1 \quad C_{13} = 3$$

$$C_{21} = 2 \quad C_{22} = -2 \quad C_{23} = 0$$

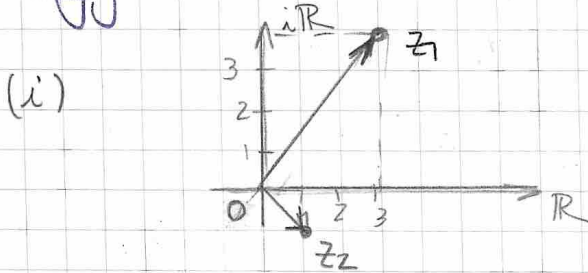
$$C_{31} = 2 \quad C_{32} = 1 \quad C_{33} = 3$$

$$T^{-1} = \frac{1}{\det(T)} \begin{bmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2/6 & 2/6 & 2/6 \\ 1/6 & -2/6 & 1/6 \\ 3/6 & 0 & -3/6 \end{bmatrix}$$

$$T^{-1} A T = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/6 & -1/3 & 1/6 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T^{-1} A T = \Lambda \Rightarrow \Lambda \rightarrow \text{Eigenwertmatrix.} \quad \leftarrow \text{diagonal}$$

Aufgabe 1.9 $z_1 = 3 + 4i$, $z_2 = 1 - i$



ii) $z_1 + z_2 = (3+1) + (4-1)i$

$$z_1 + z_2 = 4 + 3i //$$

$$z_1 \cdot z_2 = (3+4i)(1-i) =$$

$$= 3 - 3i + 4i - 4i^2 = 7 + i //$$

$$z_1 / z_2 = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{1+1} = \frac{(3+4i)(1+i)}{2} = \frac{3+3i+4i+4i^2}{2} = \frac{-1+7i}{2}$$

iii) $\bar{z}_1 = 3 - 4i$, $\bar{z}_2 = 1 + i$

$$|z_1| = (3^2 + 4^2)^{1/2} = (9+16)^{1/2} = 5$$

$$|z_2| = (1^2 + (-1)^2)^{1/2} = 2^{1/2} \approx 1,4142$$

$$\varphi_1 = \arctan(4/3) = \arctan(4/3) = 0,9273 \text{ rad} \quad (53,13^\circ)$$

$$\varphi_2 = \arctan(-1/1) = -0,7854 \text{ rad} \quad (-45^\circ)$$

Aufgabe 1.10 $|(a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2)| = |a_1 + ib_1| |a_2 + ib_2|$

• $|(a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2)| = |(a_1 a_2 + a_1 b_2 i + a_2 b_1 i + b_1 b_2 i^2)|$
 $= |(a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1)| = ((a_1 a_2 - b_1 b_2)^2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1)^2)^{1/2}$

• $|a_1 + ib_1| |a_2 + ib_2| = (a_1^2 + b_1^2)^{0,5} \cdot (a_2^2 + b_2^2)^{0,5} =$
 $= (a_1^2 a_2^2 + a_2^2 b_1^2 + a_1^2 b_2^2 + b_1^2 b_2^2)^{0,5} = ((a_1 a_2 - b_1 b_2)^2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1)^2)^{1/2}$

∴ $|(a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2)| = |a_1 + ib_1| |a_2 + ib_2|$

• $|(r_1 e^{i\phi_1})(r_2 e^{i\phi_2})| = |r_1 r_2 e^{i(\phi_1 + \phi_2)}| = |r_1 r_2| = r_1 r_2$

Aufgabe 1.11 $x = [2 - 4i \quad 4i]^T$ $y = [2 + 4i \quad 4]^T$

Betrag: $\|x\| = (x^H x)^{1/2} = \left((2 + 4i \quad -4i) \begin{pmatrix} 2 - 4i \\ 4i \end{pmatrix} \right)^{0,5} = ((2 + 4i)(2 - 4i) - 16i^2)^{0,5}$

$\|x\| = (4 - 16i^2 - 16i^2)^{0,5} = (4 + 32)^{0,5} = 6 //$

$\|y\| = (y^H y)^{1/2} = \left((2 - 4i \quad 4) \begin{pmatrix} 2 + 4i \\ 4 \end{pmatrix} \right)^{0,5} = ((2 - 4i)(2 + 4i) + 16)^{0,5} =$

$= (4 - 16i^2 + 16)^{0,5} = 6 //$

Skalarprodukt: $x^H y = (2 + 4i \quad -4i) \begin{pmatrix} 2 + 4i \\ 4 \end{pmatrix} = (2 + 4i)^2 - 16i =$
 $= 4 + 16i^2 + 16i - 16i = -12 //$

Aufgabe 1.12 $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $v_1 = [1 \quad 2]^T$, $v_2 = [2 \quad -1]^T$

Die Matrix A ist symmetrisch, weil die Eigenvektoren orthogonal sind und die Eigenwerte unterschiedliche Werte haben.

Orthogonal Vektoren: $\langle v_1, v_2 \rangle = v_1^T v_2 = 0$
 (Skalarprodukt)

Symmetrische Matrix: $A = A^T$

* Beweis:

$$Av_1 = \lambda_1 v_1 \xrightarrow{\cdot v_2^T} v_2^T Av_1 = \lambda_1 v_2^T v_1 \quad (\text{I})$$

$$Av_2 = \lambda_2 v_2 \xrightarrow{\cdot v_1^T} v_1^T Av_2 = \lambda_2 v_1^T v_2 \quad (\text{II})$$

$$(\text{II}) \rightarrow \text{transponieren} \rightarrow (v_1^T Av_2)^T = (\lambda_2 v_1^T v_2)^T = \quad (\text{orthogonal}) \\ = v_2^T A^T v_1 = \lambda_2 v_2^T v_1 \quad (\text{III}) \\ \stackrel{!}{=} 0$$

$$(\text{I}) - (\text{III}) = v_2^T Av_1 - v_2^T A^T v_1 = (\lambda_1 - \lambda_2) v_2^T v_1 = (\lambda_1 - \lambda_2) \langle v_2, v_1 \rangle$$

$$\therefore v_2^T Av_1 = v_2^T A^T v_1 \rightarrow A = A^T \rightarrow A \text{ ist symmetrisch}$$

Berechnung von A: $A = T \Lambda T^{-1}$

(ähnlich wie die Aufgabe 1.8)

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad T^{-1} = \frac{1}{\det(T)} \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/5 & 2/5 \\ 2/5 & -1/5 \end{bmatrix}$$

$$A = T \Lambda T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/5 & 2/5 \\ 2/5 & -1/5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/5 & -2/5 \\ -2/5 & 1/5 \end{bmatrix} //$$

Berechnung von A^2 : $A^2 = A \cdot A = (T \Lambda T^{-1})(T \Lambda T^{-1})$

$$A^2 = T \underbrace{\Lambda \Lambda^{-1}}_{=id} T^{-1} = T \Lambda^2 T^{-1}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0^2 & 0 \\ 0 & 1^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/5 & 2/5 \\ 2/5 & -1/5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/5 & -2/5 \\ -2/5 & 1/5 \end{bmatrix} //$$

$$A^2 = A //$$

\rightarrow Allgemein: $A^n = T \Lambda^n T^{-1}$

Beweis: $A^n = A \cdot A \cdot \dots \cdot A = (T \Lambda T^{-1})(T \Lambda T^{-1}) \dots (T \Lambda T^{-1}) =$

$$= T \underbrace{\Lambda^{-1} T^{-1} T \Lambda T^{-1}}_{id} \dots \underbrace{T \Lambda T^{-1}}_{id} = T \Lambda^n T^{-1} //$$

//