Steuer- und Regelungstechnik

10. Übung

Victor Cheidde Chaim

21. März 2022

Universität der Bundeswehr München, LRT-15 Institut für Steuer- und Regelungstechnik

Korrektur

Vorlesung 10, Seite 1006:

$T_D = K_D / K_P \rightarrow K_D = T_D \cdot K_P$

- D-Anteil: $sK_D/(1+sT_1)$; $\cancel{K_P/K_D} = T_D = T_V$: Vorhaltezeit

Vorlesung 10, Seite 1009

2.) *Regler mit D-Anteil* ($K_D \neq 0$): $CLCP_{T_1}(s) =$

$$\begin{cases} s(\frac{1}{T_1}+s)N_1(s) + (s^2(K_P + K_D/T_1) + s(K_I + K_P/T_1) + K_I/T_1) \cdot Z_1 & (K_I \neq 0) \\ (\frac{1}{T_1}+s)N_1(s) + (s(K_P + K_D/T_1) + K_P/T_1) \cdot Z_1 & (K_I = 0) \end{cases}$$

$K_D \uparrow \rightarrow |K_D| \uparrow$

$K_I \uparrow \rightarrow |K_I| \uparrow$

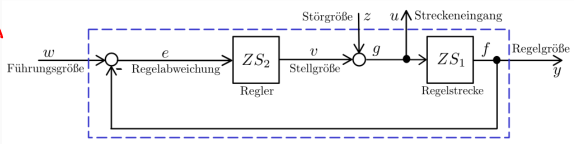
1007

Aufgabe 10.1

Gegeben sei das Zustandssystem der Regelstrecke und das Blockschaltbild. Für alle Teile dieser Aufgabe ist der Anfangszustand der Regelstrecke $x_1(0) = 0$ und des Reglers $x_2(0) = 0$.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}, C_1 = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}, D_1 = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}.$$

$\boxed{\lambda = 1}$



(i) Entwerfen Sie einen P-Regler, sodass das charakteristische Polynom des Regelkreises die Nullstelle -2 hat.

$\hookrightarrow$

Aufgabe 10.1

$A_1 = 1, \; B_1 = 1, \; C_1 = 1, \; D_1 = 0$

CLCP: $N_1 N_2 + Z_1 Z_2$

$$H_1 = C_1 (s\,id - A_1)^{-1} B_1 + D_1 = 1\,(s-1)^{-1}\,1 + 0 = \frac{1^{=Z_1}}{(s-1)_{=N_1}}$$

$$H_2 = \frac{k_p^{=Z_2}}{1_{=N_2}} \Rightarrow \text{CLCP} = 1 \cdot k_p + (s-1) \cdot 1 = \underline{s - 1 + k_p}$$

Gegeben CLCP$^* = \underline{(s+2)}$ $\Rightarrow$ $\left\{ \begin{array}{l} -1 + k_p = 2 \\ \boxed{k_p = 3} \end{array} \right.$

$$\text{FÜF} = \frac{Z_1 Z_2}{\text{CLCP}}, \quad \text{SÜF} = \underline{\frac{Z_1 N_1}{\text{CLCP}}}$$

Aufgabe 10.1

(ii) Erweitern Sie den Regler um einen I-Anteil, der dafür sorgt, dass das charakteristische Polynom des geschlossenen Regelkreises zwei identische negative reelle Nullstelle besitzt.

$$H_2(s) = k_p \xrightarrow{\text{I-Anteil}} H_2(s) = \overset{=3}{k_p} + \frac{k_I}{s} = \frac{k_p \cdot s + k_I}{s} \quad \begin{matrix} = Z_2 \\ = N_2 \end{matrix}$$

$$H_1 = \frac{1}{s-1}$$

$$CLCP = Z_1 Z_2 + N_1 N_2 = 1 \cdot (k_p \cdot s + k_I) + (s-1)(s)$$

$$= s^2 - s + k_p \cdot s + k_I \overset{k_p=3}{=} s^2 + 2s + k_I$$

$$P = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4k_I}}{2} \rightarrow \text{für } P_1 = P_2 : \quad 4 - 4k_I = 0$$

$$4k_I = 4$$

$$\boxed{k_I = 1}$$

$$P = \frac{-2}{2} = -1 \rightarrow \begin{cases} P_1 = -1 \\ P_2 = -1 \end{cases}$$

Aufgabe 10.1

n

Aufgabe 10.1

(iii) Zeigen Sie, dass der Regelkreis mit dem entworfenen Regler BIBO-stabil ist und eine stationäre Genauigkeit besitzt.

$H_1(s) = \frac{1}{s-1}$, $H_2(s) = \frac{3s+1}{s}$

CLCP: $(s-1)\cdot s + 1(3s+1) = s^2+2s+1 \rightarrow p_1 = -1$
$p_2 = -1$

BIBO-stabil, weil NS von CLCP (= Pole des System) negative sind.

$\text{FÜF}(0) = 1 \rightarrow \text{FÜF} = \frac{Z_1 Z_2}{\text{CLCP}} = \frac{(3s+1)\,1}{s^2+2s+1} \rightarrow \text{FÜF}(0) = 1$ ✓

$\text{SÜF}(0) = 0$ $\quad \text{SÜF} = \frac{Z_1 N_2}{\text{CLCP}} = \frac{s\,1}{s^2+2s+1} \rightarrow \text{SÜF}(0) = 0$ ✓

Aufgabe 10.1

$= v(t)$

(iv) Wie viel Zeit benötigt der Regelkreis, um 90% der Führungsgröße zu erreichen? Hinweis: Wenn nötig, $\underline{\underline{e^{-t_r} \text{ durch } (1-t_r)}}$ approximieren.

$$\psi(t, 0, w + \cancel{z}^{\,0}) = \psi(t, 0, w) = \psi(t, 0, v) = (g_F * v)(t)$$

$$\text{FÜF} = \frac{3s+1}{s^2+2s+1} \rightarrow$$

Regelungsnormalform: $A_F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$

$B_F = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $C_F = \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix}$, $D_F = 0$

$$g_F(t) = C_F \underline{\underline{\exp(A_F \cdot t)}} \cdot B_F\, v(t) + \cancel{D_F \cdot \delta(t)}^{\,0}$$

Aufgabe 10.1

$\exp(A_F \cdot t)$, $A_F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$, $EW(A_F) = \underline{-1 \text{ und } -1}$

CLCP: $s^2 + 2s + 1$

$\det(A_F - \lambda id) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -2-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$

$A_F = (A_F - \lambda id) + \lambda id$

$\exp(A_F - \lambda id)$ und $\exp(\lambda id)$, weil:

$\exp(A_F t) = \exp((A_F - \lambda id) + \lambda id)t) = \exp((A_F - \lambda id)t) \cdot \exp(\lambda id\, t)$

Aufgabe 10.1

$$(A_F - \lambda id) = \begin{bmatrix} 0-(-1) & 1 \\ -1 & -2-(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \text{Ew}(A_F - \lambda id) = 0$$

nilpotent!

$$\det((A_F - \lambda id) - b\, id) = (1-b)(-1-b) + 1 = b^2 \cancel{-1+1} = 0$$

$$(A_F - \lambda id)^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (A_F - \lambda id)^d = 0$$

für $d \geq 2$

$$\exp((A_F - \lambda id)t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(A_F - \lambda id)^n t^n}{n!} = id + (A_F - \lambda id)t$$

Aufgabe 10.1

Diagonalmatrix

$$\exp(A_F t) = \left(id + (A_F - \lambda id)t\right) \exp(\lambda id t)$$

$$= e^{\lambda t} \cdot id \left(id + (A_F - \lambda id)t\right)$$

$$= id\, e^{\lambda t} + e^{\lambda t}(A_F - \lambda id)t$$

$$= id\, e^{-t} + e^{-t} \begin{bmatrix} t & t \\ -t & -t \end{bmatrix} \quad //$$

$$g_F(t) = [1 \quad 3] \left[e^{-t} id + e^{-t} \begin{bmatrix} t & t \\ -t & -t \end{bmatrix} \right] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \sigma(t)$$

$$= \sigma(t)\left(e^{-t} \cdot t + 3e^{-t}(1-t)\right) = \left(3e^{-t} - 2e^{-t} \cdot t\right) \sigma(t)$$

$$\psi(t, 0, \sigma) = (g_F * \sigma)(t) = \sigma(t) \int_0^t (3e^{-\tau} - 2e^{-\tau} \cdot \tau) d\tau$$

Aufgabe 10.1

$$\psi(t|0,\sigma) = \sigma(t)\left(1 - e^{-t} + 2e^{-t}\cdot t\right) \quad //$$

Anstiegszeit: t_r , für $\overset{=1}{\omega(\infty)}\cdot 0{,}9$ (90%)

$$0{,}9 = \psi(t_r|0,\sigma) \overset{t_r>0}{=} \left(1 - e^{-t_r} + 2\underbrace{e^{-t_r}\cdot t_r}\right)$$

$e^{-t_r} \cong 1 - t_r$ (ist gegeben)

$$0{,}9 = 1 - (1-t_r) + 2t_r(1-t_r) \Rightarrow \underline{2t_r^2 - 3t_r + 0{,}9 = 0}$$

$2\tau^2 - 3\tau + 0{,}9 = 0 \quad \Rightarrow \quad \tau = \begin{cases} 0{,}4 \\ 1{,}08 \end{cases}$ Nehmen wir den kleinsten positiven ~~klein~~ Wert.

$$\boxed{\tau \hat{=} 0{,}4}$$

Probe:

90%

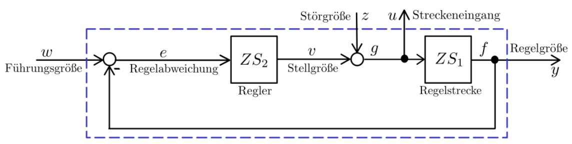
$\psi(\underline{0{,}4}, 0, \tau) = 1 - e^{-0{,}4} + 2e^{-0{,}4} \cdot 0{,}4 \cong 0{,}87$ ✓

$\psi(1{,}08, 0, \tau) = 1 - e^{-1{,}08} + 2e^{-1{,}08} \cdot 1{,}08 \cong 1{,}39$ X

Aufgabe 10.2

Gegeben sei das Zustandssystem der Regelstrecke und das Blockschaltbild. Für alle Teile dieser Aufgabe ist der Anfangszustand der Regelstrecke $x_1(0) = 0$ und des Reglers $x_2(0) = 0$.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -9 & -6 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C_1 = \begin{bmatrix} 8 & -3 \end{bmatrix}, D_1 = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}.$$



(i) Entwerfen Sie einen PID-Regler unter Verwendung der Methode des Stabilitätsrandes.

Aufgabe 10.2

$$H_1(s) = C_1 (\underbrace{s\,id - A_1}) ^{-1} B_1 + D_1$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -9 & -6 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C_1 = \begin{bmatrix} 8 & -3 \end{bmatrix}, \quad D_1 = 0$$

$$(s\,id - A_1)^{-1} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 9 & s+6 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{s(s+6)+9} \begin{bmatrix} s+6 & 1 \\ -9 & s \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{s^2+6s+9} \begin{bmatrix} s+6 & 1 \\ -9 & s \end{bmatrix}$$

Aufgabe 10.2

$$H_1(s) = \begin{bmatrix} 8 & -3 \end{bmatrix} \left[\frac{1}{s^2+6s+9} \begin{bmatrix} s+6 & 1 \\ -9 & s \end{bmatrix} \right] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{s^2+6s+9} \begin{bmatrix} 8 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ s \end{bmatrix} = \frac{8-3s}{s^2+6s+9} \quad \begin{matrix} = Z_1 \\ = N_1 \end{matrix}$$

$$\text{Pole von } H_1(s) = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 9}}{2} = -3, \quad \begin{cases} p_{11} = -3 \\ p_{12} = -3 \end{cases} \quad \checkmark$$

$H_2(s) = K_{krit}$

$K_{krit} \Rightarrow$ P-Regler $\Rightarrow$ Dauerschwingungen

$$CLCP = Z_1 Z_2 + N_1 N_2 = s^2 + s(6 - 3k_{krit}) + 9 + 8k_{krit}$$

Aufgabe 10.2

$$CLCP = Z_1 Z_2 + N_1 N_2 = s^2 + s(6 - 3k_{krit}) + 9 + 8k_{krit}$$

$\hookrightarrow$ NS: $\dfrac{-(6-3k_{krit}) \pm \sqrt{(6-3k_{krit})^2 - 4(9+8k_{krit})}}{2}$

für Dauerschwingungen: $6 - 3k_{krit} = 0 \rightarrow \boxed{k_{krit} = 2}$

NS: $\dfrac{\pm\sqrt{-4(9+8\cdot 2)}}{2} = \dfrac{i \pm \sqrt{4\cdot(25)}}{2}$

$\omega_D = 5\,rad/s$

$= \pm 5 \cdot i \rightarrow \begin{cases} \omega_D = \frac{5}{2\pi}\,Hz \,\hat{\approx}\, 0{,}8\,Hz \\ T_{krit} = 1/\omega_D \,\hat{\approx}\, 1{,}26\,Sek \end{cases}$

Aufgabe 10.2

Seite 1007 (Vorlesung 10)

$$\begin{cases} T_{krit} = 1{,}26 \text{ sek} \\ k_{krit} = 2 \end{cases}$$

$K_p = 0{,}6 \cdot k_{krit}$, $T_I = 0{,}5 T_{krit}$, $T_D = 0{,}12 \cdot T_{krit}$

$\boxed{k_p = 1{,}2}$, $T_I = 0{,}63$, $T_D = 0{,}15$

$\boxed{k_I = \frac{K_P}{T_I} \approx 1{,}9}$, $\boxed{k_D = k_p \cdot T_D \approx 0{,}19}$

$$H_Z(s) = k_p + \frac{K_I}{s} + \frac{sK_D}{1+T_1 \cdot s}$$

Aufgabe 10.2

$$H_2(s) = \frac{k_P(s(1+T_1 s)) + k_I(1+T_1 \cdot s) + k_D \cdot s^2}{s(1+T_1 s)}$$

$$= \frac{s^2(k_D + k_P \cdot T_1) + s(k_I T_1 + k_P) + k_I}{s + T_1 \cdot s^2}$$

Aufgabe 10.2

(ii) Zeigen Sie, dass der Regelkreis mit dem entworfenen Regler BIBO-stabil ist und eine stationäre Genauigkeit besitzt.

* BIBO-Stabilität: $CLCP_0 \Rightarrow CLCP$ mit $T_1 = 0$

$$CLCP_0 = Z_1 Z_2 + N_1 N_2 = (8-3s)\left(s^2(k_D + \cancel{k_P \cdot T_1}^{0}) + s(\cancel{k_I T_1}^{0} + k_P) + k_I\right) +$$

$$+ (s^2 + 6s + 9) \cdot (s + \cancel{T_1 \cdot s^2}^{0})$$

N_1

$k_P = 1{,}2$

$k_I = 1{,}9$

$k_D = 0{,}19$

$$CLCP_0 = s^3 \cdot 0{,}43 + s^2 \cdot 3{,}92 + s \cdot 12{,}9 + 15{,}2$$

$\hookrightarrow$ Hurwitz?

Aufgabe 10.2

Hurwitz-kriterium:

1. Bedingung: dasselben Vorzeichen für c_0, c_1, c_2 und c_3:

$$\underbrace{\underbrace{s^3 \cdot 0{,}43}_{=c_3} + \underbrace{s^2 \cdot 3{,}92}_{=c_2} + \underbrace{s \cdot 12{,}9}_{=c_1} + \underbrace{15{,}2}_{=c_0}}_{\text{gleiche Vorzeichen}}$$

gleiche Vorzeichen ✓ erfüllt.

2. $$H = \begin{bmatrix} c_1 & c_3 & c_5 \\ c_0 & c_2 & c_4 \\ 0 & c_1 & c_3 \end{bmatrix} = \begin{array}{ccc} D_1 & D_2 & D_3 \\ \left[\begin{array}{ccc} 12{,}9 & 0{,}43 & 0 \\ 15{,}2 & 3{,}92 & 0 \\ 0 & 12{,}9 & 0{,}43 \end{array}\right. & & \left.\right] \end{array}$$

$D_1 = 12{,}9 > 0$ ✓

$D_2 = 12{,}9 \cdot 3{,}92 - 0{,}43 \cdot 15{,}2 \approx 44 > 0$ ✓

$D_3 = (-1)^{3+3} \cdot 0{,}43 \cdot D_2 \approx 18{,}9 > 0$ ✓

$CLCP_0 \Rightarrow$ ist Hurwitz.

Aufgabe 10.2

$k_D \cdot b'_{n-1} = k_D \cdot b'_1 = 0{,}19 \cdot (-3) = -0{,}57 \neq -1$ ✓

$H_1(s) = \dfrac{\overset{=b'_0}{8} - \overset{=b'_1}{3}s}{s^2+6s+9}$

theorem 10.3

$k_I \cdot b'_0 = 1{,}9 \cdot 8 \approx 15{,}2 > 0$ ✓

für hinreichend kleines $T_1 > 0$ ist der Regelkreis stabil!

Aufgabe 10.2

- stationäre Genauigkeit: $\text{FÜF}(0) = 1$

$\text{SÜF}(0) = 0$

$Z_1(s) = 8 - 3s$

$Z_1(0) = 8$

$N_2(s) = s + T_1 s^2$

$N_2(0) = 0$

$$\text{FÜF}(0) = \frac{Z_1(0)\, Z_2(0)}{\text{CLCP}(0)} = \frac{8 \cdot \overset{=k_I}{1{,}9}}{8 \cdot \underset{=k_I}{1{,}9}} = 1 \checkmark$$

$$\text{CLCP}_{T1} = (8 - \cancel{3s})\left(\cancel{s^2(k_D + k_p T_1)} + \cancel{s(k_I T_1 + k_p)} + k_I\right) +$$

$$+ (\cancel{s^2 + 6s + 9}) \cdot \cancel{(s + T_1 \cdot s^2)} = 8 \cdot k_I$$

$$\text{SÜF}(0) = \frac{Z_1(0) \cdot N_2(0)}{\text{CLCP}_{T1}(0)} = \frac{0 \cdot 8}{8 \cdot k_I} = 0 \checkmark$$

Aufgabe 10.2

oder: stationäre Genauigkeit wird erreicht, weil der Regler einen Integrator hat
(d.h., 0 ist Pol von H_2).