Steuer- und Regelungstechnik

8. Übung

Victor Cheidde Chaim

07. März 2022

Universität der Bundeswehr München, LRT-15 Institut für Steuer- und Regelungstechnik

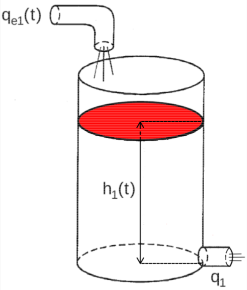
Aufgabe 8.1

Betrachten Sie einen Wasserbehälter mit einem Eingangsdurchsatz (Volumen pro Zeit) von $q_{e1}(t)$ und einem Ausgangsdurchsatz von $q_1(t)$, wie in der Abbildung dargestellt. F bezeichne die Querschnittsfläche der Behälter.

$q_1(h_1)$

Annahmen: Gesetz von Torricelli: $q_1 = \mu\sqrt{2g}\sqrt{h_1}$ sowie $g, \mu, F > 0$, $q_{e1} \geq 0$.

$u = q_{e1}(t)$



i) Modellieren Sie das Wasserbehälter-System in Zustandsform, mit $x = h_1$, $u = q_{e1}$ und $y = h_1$.

$$\dot{x} = f(x, u),$$
$$y = g(x, u).$$

Aufgabe 8.1

$$\dot h_1 = \frac{q_{e1} - q_1}{F} \qquad \left(\begin{array}{l} \dot V = q_{e1} - q_1 \\ V = h \cdot F \Rightarrow \frac{dV}{dt} = \dot h \cdot F \end{array} \right)$$

$$\dot x = f(x,u) \Rightarrow x = h_1$$

$$q_1 = \mu\sqrt{2g}\sqrt{h_1}$$

$$\dot x = \dot h_1 = \frac{\overbrace{q_{e1}}^{=u} - q_1}{F} = \frac{u - q_1}{F} = \frac{u - \mu\sqrt{2g}\sqrt{h_1}}{F}$$

$$= \boxed{\frac{u - \mu\sqrt{2g}\sqrt{x}}{F} = f(x,u)}$$

$$\boxed{y = h_1 = x = g(x,u)}$$

Aufgabe 8.1

ii) Diese und alle folgenden Teilaufgaben: Nur für den Spezialfall $F = \mu\sqrt{2g} = 1$ lösen! Geben Sie Bedingungen an x und u an, die Ruhelagen charakterisieren.

$F = 1, \quad \mu\sqrt{2g} = 1$ //

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,u) = \dfrac{u - 1\cdot\sqrt{x}}{1} = u - \sqrt{x} \\ y = x \end{cases}$$

Ruhelagen: $\dot{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad u_0 - \sqrt{x_0} = 0 \quad \Rightarrow \boxed{x_0 = u_0^2}$ //

Aufgabe 8.1

iii) Linearisieren Sie das Zustandssystem in den Ruhelagen. Berechnen Sie also die Matrizen

Konstante Matrix

$$A := D_1 f(x,u), B := D_2 f(x,u), C := D_1 g(x,u), D := D_2 g(x,u)$$

für Ruhelagen (x, u).

$$x_0 = u_0^2$$

$$A = \frac{\partial f(x_0, u_0)}{\partial x} = \frac{\partial (u - x^{1/2})}{\partial x} = -\frac{1}{2} x_0^{-1/2} = -\frac{1}{2 x_0^{1/2}} = -\frac{1}{2u_0}$$

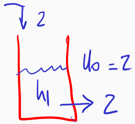
$$B = \frac{\partial f(x_0, u_0)}{\partial x} = 1$$

$$= g(x,u) = x$$

$$C = \frac{\partial g(x_0, u_0)}{\partial x} = 1, \quad D = \frac{\partial g(x_0, u_0)}{\partial u_0} = 0$$

Aufgabe 8.1

iv) Geben Sie die Übertragungsfunktion der Linearisierung an.



$$A = -\frac{1}{2u_0}, \quad B = 1, \quad C = 1, \quad D = 0$$

$$q_{e1} = q_1$$

$$H(s) = C(s\,\mathrm{id} - A)^{-1}B + D = 1\left(s - \left(-\frac{1}{2u_0}\right)\right)^{-1} 1$$

$$= \frac{1}{s + 1/2u_0}\left(\frac{2u_0}{2u_0}\right)\left(= \frac{2u_0}{2u_0 s + 1}\right)$$

Nach Linearisierung:

$$\cancel{\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}} \Rightarrow \begin{cases} \Delta\dot{x} = A\Delta x + B\Delta u \\ \Delta y = C\Delta x + D\Delta u \end{cases}$$

v) Geben Sie die Gewichtsfunktion der Linearisierung an.

$$g(t) = C \exp(At) B \sigma(t) + \cancel{\delta(t) D}^{\,0}$$

$$= 1 \cdot e^{-t/2u_0} \cdot 1 \cdot \sigma(t) = \sigma(t) e^{-t/2u_0}$$

Aufgabe 8.1

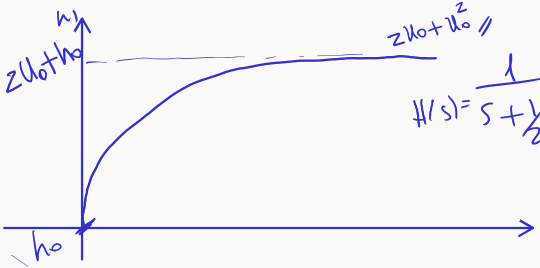
vi) Skizzieren Sie die Sprungantwort der Größe k, d.h., Antwort auf den Sprung $k \cdot \sigma$, für das linearisierte Zustandsystem und geben Sie ihren Anfangswert und ihren stationären Endwert an, wobei k eine positive reelle Konstante ist.

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases} \quad , \quad k \cdot \sigma(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ k, & t \geq 0 \end{cases}$$

$$\Delta y = \psi(t, 0, k\sigma(t)) = k\sigma(t) \int_0^t e^{-\tau/2u_0}\, d\tau = 2u_0 k \sigma(t) \left(\frac{1}{\cancel{2u_0}} - \frac{e^{-t/2u_0}}{\cancel{2u_0}} \right) =$$

$$= \frac{k}{\cancel{2u_0}} \sigma(t) \left(1 - e^{-t/2u_0} \right) \cdot 2u_0$$

Aufgabe 8.1



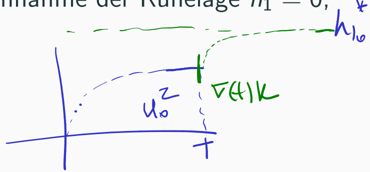
$$H(s) = \frac{1}{s+1/2u_0} \qquad \underline{\underline{h_0 = u_0^2}}$$

Δy

$$\underline{\underline{\psi(\infty,0,k\sigma)}} = \lim_{t\to\infty} \psi(t,0,k\sigma) = \frac{k}{\cancel{2u_0}}\, 2u_0 = \Delta y(\infty)$$

$$\left(= \underline{\underline{H(0)\,u(\infty)}} \overset{= k\sigma(\infty)}{} = \left(\frac{1}{0+1/2u_0}\right)\cdot k = 2u_0 k \right)$$

vii) Berechnen Sie den stationären Endwert für die Sprungantwort der Größe k des nichtlinearen Systems unter Annahme der Ruhelage $\dot{h}_1 = 0$, wobei k eine positive reelle Konstante ist.



$$q_{e_1} = u_0 \quad (t \to T)$$

$$\dot{h}_1 = u - \sqrt{h_1}$$

$$u = u_0 + k\sigma(t) = u_0 + k$$

$$\dot{h}_1 = 0 \Rightarrow u = \sqrt{h_1}$$

$$u_0 + k = \sqrt{h_{1_0}^*}$$

$$h_{1_0} = u_0^2$$

$$= (u_0 + k)^2 = u_0^2 + k^2 + 2u_0k \;//$$

Aufgabe 8.1

Aufgabe 8.1

$u_0^2 + k^2 + 2u_0k$ $\qquad$ $2ku_0 + u_0^2$

viii) Bestimmen Sie eine Fehlerfunktion $e = \| h_{1nl} - \psi(\infty, h_0, k\sigma(t)) \|$, wobei h_{1nl} der stationäre Endwert der Ruhelage für die nichtlineare Funktion $f(h_1, k\sigma(t) + u_0)$ und h_0 die Anfangsbedingung ist.

$$e = \| \cancel{u_0^2} + k^2 + \cancel{2u_0k} - (\cancel{2ku_0} + \cancel{u_0^2}) \| = k^2$$

für $k = 0{,}5 \rightarrow e = 0{,}25$

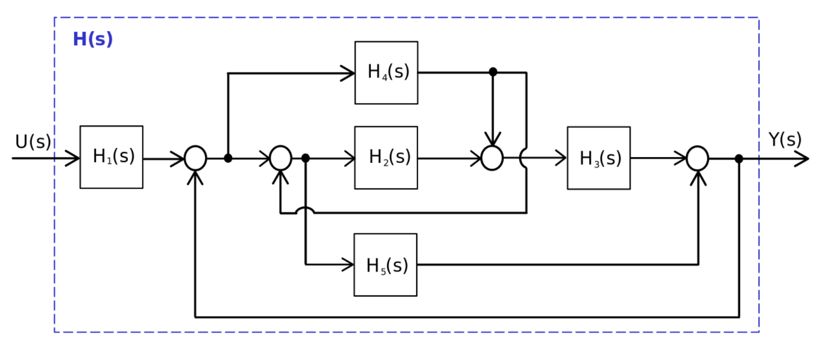
$k = 2 \rightarrow e = 4$

ix) Beweisen Sie, dass das Verhältnis zwischen der Größe des Fehlers und der Größe der Sprungfunktion umso kleiner ist, je kleiner der Betrag der eingegebenen Sprungfunktion ist. Hinweis: Beweisen Sie, dass

$$\lim_{k \to 0} \frac{e}{k} = 0.$$

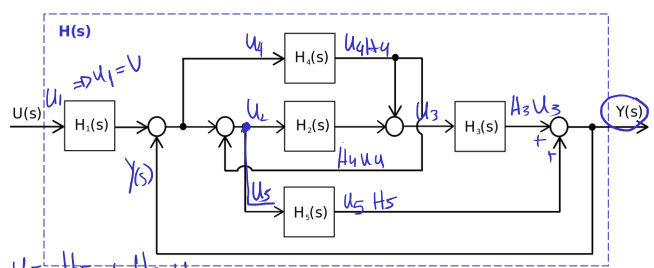
$$\lim_{k \to 0} \frac{e}{k} = \lim_{k \to 0} \frac{\cancel{k}^2}{\cancel{k}} = 0 \; //$$

Gegeben ist folgendes Blockschaltbild:



Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $H(s) = Y(s)/U(s)$ aus dem Blockschaltbild.

Aufgabe 8.2



$$Y(s) = u_5 \cdot H_5 + H_3 \cdot u_3$$

$$u_1(U, Y, H_1 \dots)$$

$$u_2(\dots)$$

$$u_1 = u$$

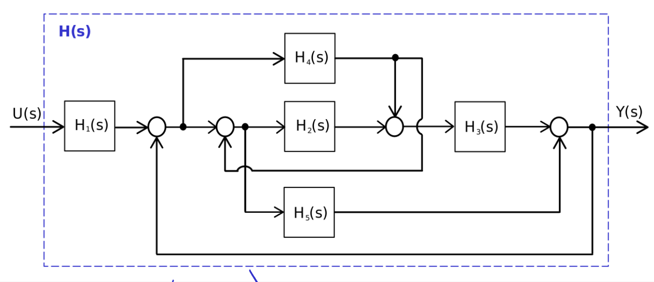
$$u_2 = u_4 H_4 + u_4 = u_4(1 + H_4)$$

$$u_3 = u_4 H_4 + u_2 H_2$$

$$u_4 = Y(s) + U(s) H_1$$

$$u_5 = u_2$$

Aufgabe 8.2



$$u_1 = u$$

$$u_2 = u_4 H_4 + u_4 = u_4(1+H_4)$$

$$u_3 = u_4 H_4 + \underline{u_2 H_2}$$

$$u_4 = Y(s) + U(s) H_1$$

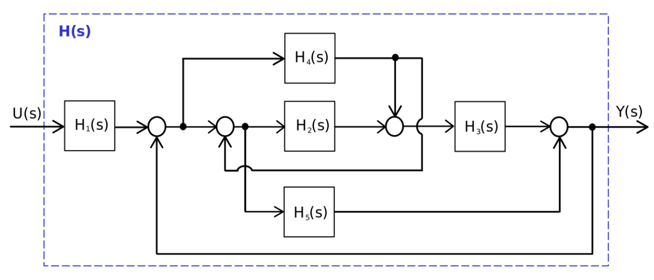
$$u_5 = u_2 = u_4(1+H_4) = (Y(s) + U(s) H_1)(1+H_4)$$

$$Y(s) = \underline{u_5} \cdot \underline{H_5} + \underline{H_3} \cdot u_3 \quad //$$

✓

$$u_3 = (Y(s) + U(s) H_1) H_4 + u_4(1+H_4) H_2 = H_4(Y(s) + U(s) H_1) + (Y(s) + U(s) H_1) H_2 (1+H_4)$$

Aufgabe 8.2

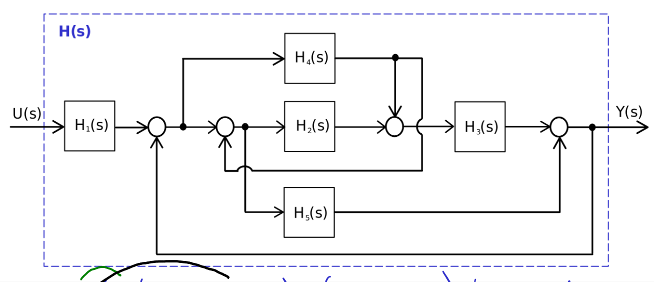


$$U_5 = U_2 = U_4(1+H_4) = (Y(s)+U(s)H_1)(1+H_4)$$

$$U_3 = (Y(s)+U(s)H_1)H_4 + U_4(1+H_4)H_2 = H_4(Y(s)+U(s)H_1)+(Y(s)+U(s)H_1)H_2(1+H_4)$$

$$Y(s) = U_3H_3 + U_5H_5 = H_3\big(H_4(Y(s)+U(s)H_1)+(Y(s)+U(s)H_1)H_2(1+H_4)\big) +$$
$$H_5(Y(s)+U(s)H_1)(1+H_4)$$

Aufgabe 8.2



$$Y(s) = H_3\left(H_4\left(Y(s)+U(s)H_1\right)+\left(Y(s)+U(s)H_1\right)H_2\left(1+H_4\right)\right) + H_5\left(Y(s)+U(s)H_1\right)\left(1+H_4\right)$$

$$Y(s)\left(1 - H_3H_4 - H_3H_2 - H_3H_2H_4 - H_5 - H_5H_4\right) =$$

$$U(s)\left(H_3H_4H_1 + H_3H_1H_2 + H_1H_2H_3H_4 + H_5H_1 + H_5H_1H_4\right)$$

Aufgabe 8.2

$$Y(s)\left(1 - H_3H_4 - H_3H_2 - H_3H_2H_4 - H_5 - H_5H_4\right) =$$

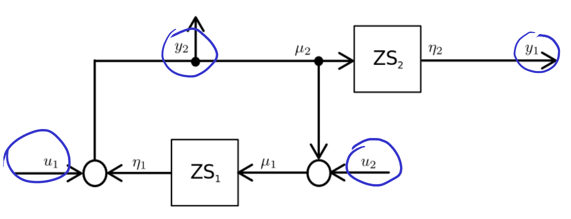
$$U(s)\left(H_3H_4\underline{H_1} + H_3\underline{H_1}H_2 + \underline{H_1}H_2H_3H_4 + H_5\underline{H_1} + H_5\underline{H_1}H_4\right)$$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{H_1\left(H_3H_4 + H_2H_3 + H_2H_3H_4 + H_5 + H_5H_4\right)}{\left(1 - H_3H_4 - H_2H_3 - H_2H_3H_4 - H_5 - H_4H_5\right)}$$

Aufgabe 8.3

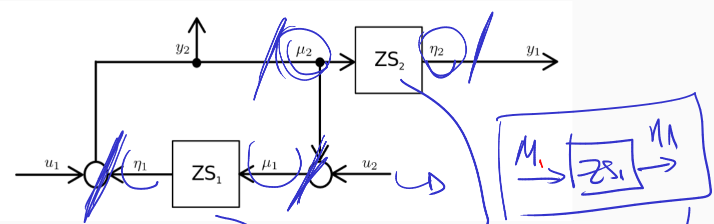
Betrachten Sie die Kopplung der unten dargestellten Zustandssysteme ZS_1 und ZS_2 mit ihren jeweiligen Matrizen A_i, B_i, C_i und D_i,wobei $i = 1, 2$. Bestimmen Sie die Matrizen A, B, C und D des Zustandssystems, das das Gesamtsystem beschreibt, mit $y = (y_1, y_2)$ und $u = (u_1, u_2)$, für die beiden folgenden Fälle:

1. $A_1 = diag(-1, -2)$, $B_1 = (0, 1)$, $C_1 = (0, 1)$, $D_1 = 0$ und $A_2 = diag(-2, -3)$, $B_2 = (1, 0)$, $C_2 = (1, 0)$, $D_2 = 0$;
2. $A_1 = -1$, $B_1 = 2$, $C_1 = 1$, $D_1 = 1$ und $A_2 = 3$, $B_2 = 2$, $C_2 = 1$, $D_2 = 0$.



Aufgabe 8.3

1) $A_1 = diag(-1, -2)$, $B_1 = (0, 1)$, $C_1 = (0, 1)$, $D_1 = 0$ und
$A_2 = diag(-2, -3)$, $B_2 = (1, 0)$, $C_2 = (1, 0)$, $D_2 = 0$;



3)a) Verhalten der Blöcke:

ZS_1: $\dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1 \mu_1$

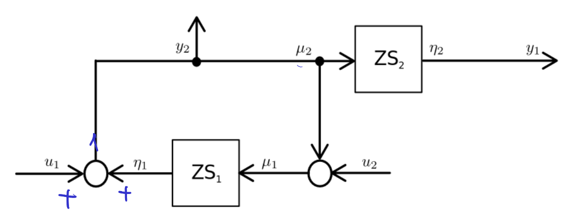
$\eta_1 = C_1 x_1 + D_1 \mu_1$

ZS_2: $\dot{x}_2 = A_2 x_2 + B_2 \mu_2$

$\rightarrow \underline{\eta_2} = C_2 x_2 + D_1 \mu_1$

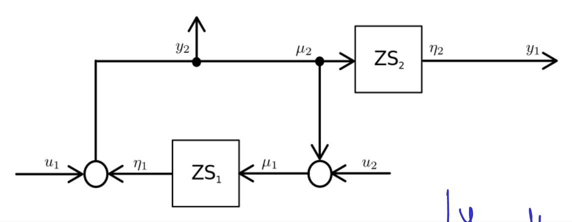
Aufgabe 8.3

1) $A_1 = diag(-1,-2),\ B_1 = (0,1),\ C_1 = (0,1),\ D_1 = 0$ und
$A_2 = diag(-2,-3),\ B_2 = (1,0),\ C_2 = (1,0),\ D_2 = 0;$



3)b) Verbindungen der Blöcke:

$$\begin{cases} \mu_1 = u_2 + \mu_2 = u_2 + \eta_1 + u_1 \\ \mu_2 = \eta_1 + u_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} y_2 = \mu_2 = u_1 + \eta_1 \\ y_1 = \eta_2 \end{cases}$$



$$\begin{cases} \mu_1 = u_2 + \mu_2 = u_2 + \eta_1 + u_1 \\ \mu_2 = \eta_1 + u_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_2 = \mu_2 = u_1 + \eta_1 \\ y_1 = \eta_2 \end{cases}$$

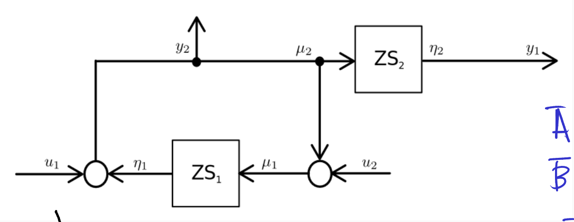
$$\mu = K\eta + L\,u$$

$$y = E\eta + Fu$$

$$\Rightarrow \mu = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \quad \eta = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \mu = \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}^{=K} \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix} + \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}^{=L} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$y = \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}^{=E} \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix} + \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}^{=F} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$



$A_1, A_2, \dots$ gegeben

$\bar{A} = \mathrm{dig}(A_1, A_2)$

$\bar{B} = \mathrm{dig}(B_1, B_2)$

$\bar{C} = \mathrm{dig}(C_1, C_2)$

$\bar{D} = \mathrm{dig}(D_1, D_2)$

$$\mu = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{=K} \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{=L} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{=E} \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{=F} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

Verbindung

$$\dot{x} = \bar{A}x + \bar{B}\mu$$

$$\eta = \bar{C}x + \bar{D}\mu$$

Teilsystem

Aufgabe 8.3

$$\dot{x} = A x + B u$$

$$y = C x + D u$$

Bedingung:

$(id - k\bar{D}) \rightarrow$ muss invertierbar sein!

$$A = \bar{A} + \bar{B}(id - k\bar{D})^{-1} k \bar{C}$$

$$B = \bar{B}(id - k\bar{D})^{-1} L$$

$$C = E(id + \bar{D}(id - k\bar{D})^{-1} k)\bar{C}$$

$$D = F + E\bar{D}(id - k\bar{D})^{-1} L$$

$$\bar{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hookrightarrow (id - k\bar{D}) = id \Rightarrow \text{invertierbar}$$

$$\det(id) = 1 \neq 0$$

Aufgabe 8.3

$$A = \bar{A} + \underbrace{\bar{B}\,(id - K\bar{D})^{-1} K \bar{C}}_{id^{-1} = id} .$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \operatorname{diag}(A_1, A_2) + \bar{B}\, id \cdot K \cdot \bar{C}, \qquad \bar{B} = \operatorname{diag}(B_1, B_2)$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

Aufgabe 8.3

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1\cancel{0} & \cancel{1}0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1\cancel{0} & \cancel{1}0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1\cancel{0} & \cancel{-1}\,-2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \;//$$