Universität der Bundeswehr München

$\mathrm{EW}(A) \neq \lambda$, wobei

$u(t) = e^{\lambda t} \cdot u_0$

Steuer- und Regelungstechnik

$\cancel{\mathrm{EW}(A) \neq u^{\lambda t}}$

7. Übung

Victor Cheidde Chaim

28. Februar 2022

Universität der Bundeswehr München, LRT-15 Institut für Steuer- und Regelungstechnik

Aufgabe 7.1

Gegeben sei die Übertragungsfunktion des Feder-Dämpfer-Masse-Systems mit der Position als Ausgang,

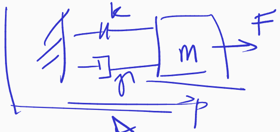
$$H(s) = \frac{1}{ms^2 + \gamma s + k},$$

wobei m für die Masse, γ für den Dämpfungskoeffizienten und k für die Federkonstante steht. Unter der Annahme, dass m und k positive reelle Konstanten sind, berechnen und skizzieren Sie die Sprungantwort für die folgenden Fälle:

i) $\gamma > 2\sqrt{km}$.

Aufgabe 7.1

$$H(s) = \frac{1}{ms^2 + \gamma s + k} \rightarrow$$



↳ Regelungsnormalform vom Beobachternormalform

$$m\ddot{p} = F - kp - \gamma\dot{p} \rightarrow$$

$$\ddot{p} = \frac{F}{m} - \frac{kp}{m} - \frac{\gamma\dot{p}}{m}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{p} \\ \ddot{p} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k/m & -\gamma/m \end{bmatrix}}_{=A} \begin{bmatrix} p \\ \dot{p} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1/m \end{bmatrix}}_{=B} \cdot F$$

$$p = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_{=C} \begin{bmatrix} p \\ \dot{p} \end{bmatrix} + \underbrace{0}_{=D} \cdot F$$

$$H(s) = C(s\,\mathrm{Id} - A)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1/m \end{bmatrix} = \frac{1}{s^2 + s\frac{\gamma}{m} + \frac{k}{m}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & -1 \\ k/m & s + \gamma/m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1/m \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{ms^2 + \gamma s + k} \quad //$$

i) $\gamma > 2\sqrt{km}$

Aufgabe 7.1

$$H(s) = \frac{1}{ms^2 + \gamma s + k} \Rightarrow \text{Pole: } s_{1,2} = \frac{-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 4km}}{2m}$$

$s_{1,2} \Rightarrow \mathbb{R}$, $s_{1,2} \Rightarrow \mathbb{C}$ ~~Km~~

$\gamma > 2\sqrt{km}$, $\gamma > 0$

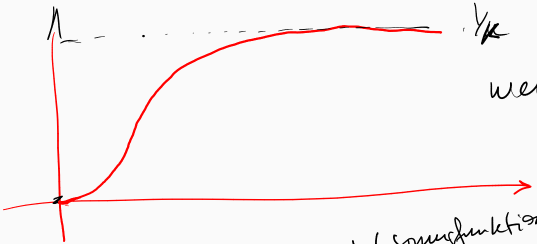
$$\text{Pole: } s_{1,2} = \frac{-\gamma \pm \sqrt{(\gamma^2 - 4km)}}{2m} \quad \text{mit } \gamma^2 - 4km > 0 \quad = \begin{cases} s_1 \\ \neq \\ s_2 \end{cases} \Rightarrow \underline{\underline{\mathbb{R}}}$$

$$\underline{g(t) = \sigma(t) \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{(s_1 - s_2)} \left(e^{s_1 t} - e^{s_2 t}\right)} \quad //$$

$g(t) = \sigma(t)\, C \cdot \exp(At) \cdot B$ //

Aufgabe 7.1

SA: $\psi(t,0,\bar{v}) = (g * \bar{v})(t) = \bar{v}(t)\cdot\frac{1}{k}\left(\frac{s_2}{s_1-s_2}e^{s_1 t} - \frac{s_1}{s_1-s_2}\cdot e^{s_2 t} + 1\right)$



wenn $\gamma > 2\sqrt{km}$

EW:

$u(\infty) = 1$ (Sprungfunktion)

$\psi(\infty,0,\bar{v}) = H(0)\cdot u(\infty) = \frac{1}{k}\cdot 1$

$H(0) = \frac{1}{\cancel{m0^2}+\cancel{\gamma 0}+k} = 1/k$

AW:

$\psi(0,0,\bar{v}) = \underbrace{\cancel{H(\infty)}}_{=0} u(0) = 0$

$\lim_{s\to\infty} \frac{1}{ms^2+\gamma s+k} = 0$

Aufgabe 7.1

Gegeben sei die Übertragungsfunktion des Feder-Dämpfer-Masse-Systems mit der Position als Ausgang,

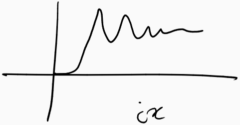
$$H(s) = \frac{1}{ms^2 + \gamma s + k},$$

wobei m für die Masse, γ für den Dämpfungskoeffizienten und k für die Federkonstante steht. Unter der Annahme, dass m und k positive reelle Konstanten sind, berechnen und skizzieren Sie die Sprungantwort für die folgenden Fälle:

ii) $0 < \gamma < 2\sqrt{km}$.

$$s_{1,2} = \frac{-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 4km}}{2m} \qquad \underline{0 < \gamma < 2\sqrt{km}}$$

$$\begin{matrix} s_1 \\ s_2 \end{matrix} \neq \rightarrow \quad s_1, s_2 \in \mathbb{C} \quad \rightarrow$$

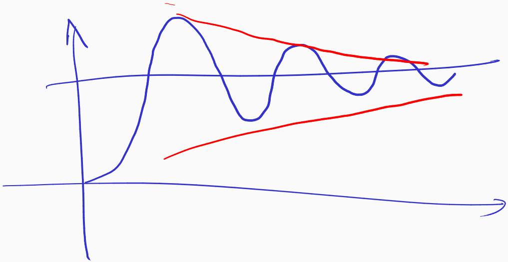


$$e^{ix} = \underline{\cos(x) + i\sin(x)}$$

$$g(t) = \frac{1}{m} \frac{1}{(s_1 - s_2)} \left(e^{s_1 t} - e^{s_2 t}\right)$$

$$SA: \; = \sigma(t) \cdot \frac{1}{k} \left(1 - \frac{1}{\left(1 - \frac{\gamma^2}{4km}\right)^{1/2}} \cdot e^{-\frac{t\gamma}{2m}} \sin\left(\frac{\left(1 - \frac{\gamma^2}{4km}\right)^{1/2}}{\sqrt{m/k}} \cdot t + \varphi \right) \right)$$

Aufgabe 7.1



$e^{-t D/2m}$

Aufgabe 7.1

Aufgabe 7.1

Gegeben sei die Übertragungsfunktion des Feder-Dämpfer-Masse-Systems mit der Position als Ausgang,

$$H(s) = \frac{1}{ms^2 + \gamma s + k},$$

wobei m für die Masse, γ für den Dämpfungskoeffizienten und k für die Federkonstante steht. Unter der Annahme, dass m und k positive reelle Konstanten sind, berechnen und skizzieren Sie die Sprungantwort für die folgenden Fälle:

iii) $\gamma = 2\sqrt{km}$.

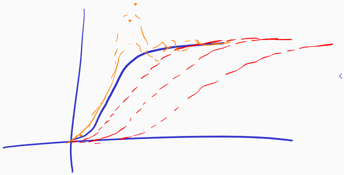
$$\gamma = 2\sqrt{km} \Rightarrow \text{Pole: } s_1, s_2 = \frac{-\gamma \pm \cancel{\sqrt{\gamma^2 - 4km}}^{0}}{2m}$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow \text{Resonanzfrequenz}$$

$$s_1, s_2 = \frac{-\gamma}{2m}$$

$$g(t) = \sigma(t) \frac{t}{m} e^{-\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t}$$

$$\text{SA: } \sigma(t) \frac{1}{k} \left(1 - \left(1 + \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t\right) e^{-t\sqrt{\frac{k}{m}}}\right)$$



Aufgabe 7.1

Aufgabe 7.1

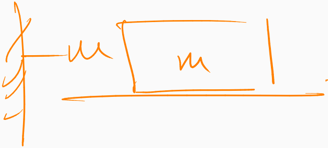
Aufgabe 7.1

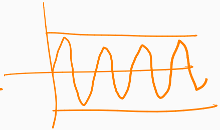
Gegeben sei die Übertragungsfunktion des Feder-Dämpfer-Masse-Systems mit der Position als Ausgang,

$$H(s) = \frac{1}{ms^2 + \gamma s + k},$$

wobei m für die Masse, γ für den Dämpfungskoeffizienten und k für die Federkonstante steht. Unter der Annahme, dass m und k positive reelle Konstanten sind, berechnen und skizzieren Sie die Sprungantwort für die folgenden Fälle:

iv) $\gamma = 0$.





Aufgabe 7.1

Sprungantwort: $\sigma(t) \cdot \frac{1}{k} \left(1 - \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t\right)\right)$

Aufgabe 7.1

Aufgabe 7.1

a

Aufgabe 7.1

Gegeben sei die Übertragungsfunktion des Feder-Dämpfer-Masse-Systems mit der Position als Ausgang,

$$H(s) = \frac{1}{ms^2 + \gamma s + k},$$

wobei m für die Masse, γ für den Dämpfungskoeffizienten und k für die Federkonstante steht. Unter der Annahme, dass m und k positive reelle Konstanten sind, berechnen und skizzieren Sie die Sprungantwort für die folgenden Fälle:

v) $\gamma < 0$.

Aufgabe 7.1

Pole: $s_1, s_2 = \frac{-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 4km}}{2m}$

$Re(s_1, s_2) \geq 0 \Rightarrow$ System ist instabil für $\gamma < 0$

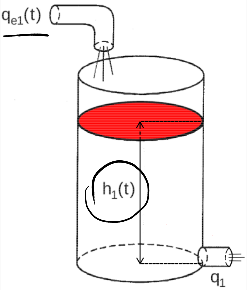
Aufgabe 7.1

Aufgabe 7.1

Aufgabe 7.2

Betrachten Sie einen Wasserbehälter mit einem Eingangsdurchsatz (Volumen pro Zeit) von $q_{e1}(t)$ und einem Ausgangsdurchsatz von $q_1(t)$, wie in der Abbildung dargestellt. F bezeichne die Querschnittsfläche der Behälter.

Annahmen: Gesetz von Torricelli: $q_1 = \mu\sqrt{2g}\sqrt{h_1}$ sowie $g, \mu, F > 0$, $q_{e1} \geq 0$.



i) Modellieren Sie das Wasserbehälter-System in Zustandsform, mit $x = h_1$, $u = q_{e1}$ und $y = h_1$.

$$\dot{x} = f(x, u),$$
$$y = g(x, u).$$

$V = h_1 \cdot F$

$q_{e1} - q_1 = \dot{V}$

$= \dot{h}_1 \cdot F$

$\dot{h}_1 = \frac{q_{e1} - q_1}{F}$ //

Aufgabe 7.2

$$q_1 = \mu\sqrt{2g}\sqrt{h_1} \Rightarrow q_{e1} - q_1 = \dot{V} \Rightarrow V = h_1 \cdot F$$

$$\dot{V} = \dot{h}_1 F = q_{e1} - q_1$$

$x = h_1$

$$\dot{x} = f(x,u)$$

$$\boxed{\dot{h}_1 = \frac{q_{e1} - q_1}{F}}$$

$$\dot{h}_1 = \frac{\overset{u}{q_{e1}} - q_1}{F} = \frac{u - q_1}{F}$$

(ZS):

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{u - q_1}{F} \\ y = x \end{cases}$$

$$y = g(x,u) \Rightarrow \boxed{y = h_1}$$

Aufgabe 7.2

ii) Diese und alle folgenden Teilaufgaben: Nur für den Spezialfall $F = \mu\sqrt{2g} = 1$ lösen! Geben Sie Bedingungen an x und u an, die Ruhelagen charakterisieren.

$F = 1 \quad , \quad \mu\sqrt{2g} = \underline{1}$

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{u - q_1}{F} = \dfrac{u - \mu\sqrt{2g}\cdot\sqrt{h_1}}{F} = u - h_1^{1/2} \\ y = x \end{cases}$$

$$\underline{q_1 = \mu\sqrt{2g}\sqrt{h_1}}$$

Bedingung Ruhelagen:

$\dot{x} = 0$

$0 = u_0 - h_{1_0}^{1/2}$

$h_{1_0} = u_0^2$ //

Aufgabe 7.2

iii) Linearisieren Sie das Zustandssystem in den Ruhelagen. Berechnen Sie also die Matrizen

$$A := D_1 f(x,u), B := D_2 f(x,u), C := D_1 g(x,u), D := D_2 g(x,u)$$

für Ruhelagen (x,u). $\underline{h_{1_0} = u_0^2}$, $\dot{x} = \underline{u - h_1^{1/2}}$

$$\frac{\partial f}{\partial h_1}(h_{1_0}) = -\frac{1}{2} h^{(1/2 - 1)} = -\frac{1}{2} h^{-1/2} = -\underline{\underline{\frac{1}{2\sqrt{h_0}}}} = -\frac{1}{2u_0}$$

$$\frac{\partial f(h_{1_0})}{\partial u} = 1$$

$$\begin{cases} A = -\frac{1}{2u_0}, & B = 1 \\ C = 1, & D = 0 \quad (y = \underline{x_1}) \end{cases}$$

Aufgabe 7.2

iv) Geben Sie die Übertragungsfunktion an.

$$H(s) = C\,(s\,id - A)^{-1} B + \cancel{D}^{\,0}$$

$$H(s) = 1\left(s - \left(-\frac{1}{2u_0}\right)\right)^{-1} 1 = \frac{1}{s + 1/2u_0}$$

$\underline{u_0 > 0}$

v) Geben Sie die Gewichtsfunktion an.

$$g(t) = \sigma(t) C \cdot \exp(At) \cdot B + \cancel{\delta(t) \cdot D}^{\,0}$$

$$g(t) = \sigma(t) \cdot 1 \cdot \exp\left(-\frac{t}{2u_0}\right) \cdot 1 = \sigma(t)\, e^{-t/2u_0}$$

$$H(s) = \frac{1}{s + 1/2u_0} \rightarrow \text{Pol: } s_1 = \frac{-1}{2u_0} < 0$$

BIBO-stabilität

vi) Skizzieren Sie die Sprungantwort und geben Sie ihren Anfangswert und ihren stationären Endwert an.

BIBO-stabil ist

Anfangswert: $\psi(0,0,\sigma) = H(\infty) \cdot u(0)$

$$\boxed{H(s) = \frac{1}{s+1/2u_0} \Rightarrow \lim_{s\to\infty} \frac{1}{s+1/2u_0} = 0 \Rightarrow \psi(0,0,\sigma) = 0}$$

$$\boxed{\psi(t,0,\sigma) = (g*\sigma)(t)} = \sigma(t)\int_0^t e^{-\tau/2u_0}\, d\tau = \sigma(t)\left(\cancel{\frac{-1}{2u_0}}\, 2u_0 \cdot \left(e^{-\tau/2u_0}\right)\Big|_0^t\right)$$

$$= \frac{\sigma(t)}{\cancel{2u_0}}\left(1 - e^{t/2u_0}\right) \cdot 2u_0$$

$$\psi(0,0,\sigma) = 2u_0 \cdot \frac{\sigma(t)}{\cancel{2u_0}}\left(1 - e^{0/2u_0}\right) = 0$$

Aufgabe 7.2

$$H(s) = \frac{1}{s + \frac{1}{2u_0}}$$

Endwert: $\psi(\infty, 0, \sigma) = H(0) \cdot u(\infty)$

$u =$ Sprungfunktion $\rightarrow \lim_{t \to \infty} \sigma(t) = 1 \rightarrow u(\infty) = 1$

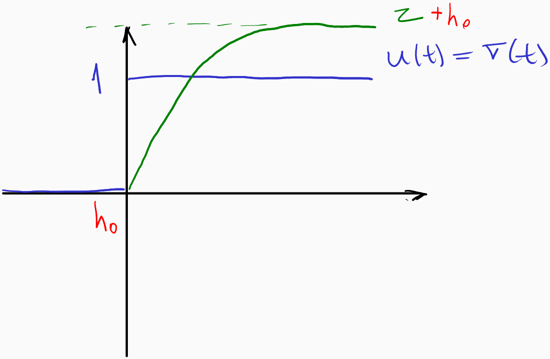
Unter der Annahme, dass:

$$H(0) = \frac{1}{0 + \frac{1}{2u_0}} = 2u_0 \rightarrow \underline{\underline{u_0 = 1}} \rightarrow \boxed{H(0) = 2}$$

$$EW = \psi(\infty, 0, \sigma) = 2 \cdot 1 = 2$$

$$\psi(\infty, 0, \sigma) = \lim_{t \to \infty} \frac{2u_0 \sigma(t)}{\cancel{2u_0}} \left(1 - \cancel{e^{-t/2u_0}}\right) = \frac{2u_0}{\cancel{2u_0}} = \cancel{\tfrac{1}{2}} \; 2$$

Aufgabe 7.2



$= \underline{g_{e1} = g_1} \rightarrow \quad 1 = \underbrace{\mu \sqrt{2g}}_{1} \sqrt{u_0^2} = 1,$