Universität der Bundeswehr München

Steuer- und Regelungstechnik

6. Übung

Victor Cheidde Chaim

21. Februar 2022

Universität der Bundeswehr München, LRT-15 Institut für Steuer- und Regelungstechnik

$-k+1>0$

$(-k>-1) \quad (\cdot(-1)) \Rightarrow k<1$

$\alpha<0, \quad \alpha\in\mathbb{R}^-$

$\alpha<0 \quad \mathbb{R}^-: \{x<0$

oder

$\{x\leq 0\}$

Aufgabe 6.1

Betrachtet werde das von reellen Parametern α, β und γ abhängende Zustandssystem

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t),$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t),$$
$$\text{wobei}\quad A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} \beta \\ 2 \end{pmatrix},\quad C = \begin{pmatrix} \gamma & 1 \end{pmatrix},\quad D = (\alpha).$$

Für welche Werte der Parameter α, β und γ ist das System BIBO-stabil?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \beta \\ 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} \gamma & 1 \end{pmatrix}, \quad D = (\alpha).$$

1) Ist das ZS asympt. stabil? EW: $\det(A - \lambda I) = 0$

↳ nein

$\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$

2) Satz 7.9 (5). BIBO-stabil $\longleftrightarrow$ $Re(p) < 0$.

$H(s) = C(s\,id - A)^{-1}B + \cancel{D}^{\,0}$ ⇒ D spielt keine Rolle bei BIBO stabilität

$H^*(s) = \overset{\checkmark}{C}(s\,id - A)^{-1}\overset{\checkmark}{B}$

$$(s\,id - A) = \begin{pmatrix} s-1 & -\alpha \\ 0 & s+1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6.1

$$(s\,\mathrm{id} - A) = \begin{pmatrix} s-1 & -\alpha \\ 0 & s+1 \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad \det(s\,\mathrm{id} - A) = (s-1)(s+1)$$

$$(s\,\mathrm{id} - A)^{-1} = \frac{1}{\det(s\,\mathrm{id} - A)} \begin{pmatrix} s+1 & \alpha \\ 0 & s-1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{*}{H}(s) = C(s\,\mathrm{id} - A)^{-1}B = \begin{pmatrix} \gamma & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s+1 & \alpha \\ 0 & s-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{(s+1)(s-1)}$$

$$H(s) = \begin{pmatrix} \gamma & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta(s+1) + 2\alpha \\ 2(s-1) \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{(s-1)(s+1)}$$

$$H^*(s) = \begin{pmatrix} \gamma & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta(s+1) + 2\alpha \\ 2(s-1) \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{(s-1)(s+1)}$$

$$H^*(s) = \frac{\cancel{\gamma\beta(s+1)}^{0} + \cancel{2\alpha\gamma}^{0} + 2(s-1)}{\underbrace{(s-1)}_{\text{instabil}}(s+1)}$$

Zähler $= 0$

Zähler $= k(s-1)$

Zähler : $(s-1)$ $\Rightarrow$ $\gamma \equiv 0$ $\rightarrow$ $H^*(s) = \frac{2}{(s+1)}$ $\Rightarrow$ BIBO stabil

α, β egal

$$H^*(s) = \frac{s(2+\gamma\beta) + (\gamma\beta + 2\gamma\alpha - 2)}{(s-1)(s+1)} \stackrel{!}{=} (s-1)$$

$2 + \gamma\beta = 1$ $\rightarrow$ $\gamma\beta = -1$

$\gamma\beta + 2\alpha\gamma - 2 = -1$

$2\alpha\gamma = 2 \Rightarrow \alpha\gamma = 1$

Aufgabe 6.1

I) $\gamma = 0$, α, β egal

II) $\alpha\gamma = 1$, $\beta\gamma = -1 \rightarrow \alpha = -\beta$

$$\text{Zähler} = 0 : \quad H^*(s) = \frac{s(2+\gamma\beta) + \overbrace{(\gamma\beta + 2\alpha\gamma - 2)}^{=0}}{(s-1)(s+1)}$$

$$2 + \gamma\beta = 0 \rightarrow \gamma\beta = -2$$

$$\gamma\beta + 2\alpha\gamma - 2 = 0 \quad -2 + 2\alpha\gamma - 2 = 0 \rightarrow \alpha\gamma = 4/2 = 2$$

III) $\alpha\gamma = 2$, $\beta\gamma = -2 \rightarrow \underline{\underline{\alpha = -\beta}}$

Aufgabe 6.1

I) $\gamma = 0 \rightarrow H^*(s) = \dfrac{s(2+0\cdot\beta)+(0\cdot\beta+2\cdot 0\cdot\alpha-2)}{(s-1)(s+1)}$

$$= \frac{2s-2}{(s-1)(s+1)} = \frac{2\cancel{(s-1)}}{\cancel{(s-1)}(s+1)} = \frac{2}{(s+1)} \,/\!/$$

$$\text{pol} = -1 < 0 \rightarrow \text{BIBO stabil}$$

II) $\alpha = -\beta \rightarrow H^*(s) = \dfrac{s(2+\gamma\beta)+(\gamma\beta-2\beta\gamma-2)}{(s-1)(s+1)} =$

$$= \frac{(2+\gamma\beta)s - 2 - \beta\gamma}{(s-1)(s+1)} = \frac{\cancel{(s-1)}(2+\beta\gamma)}{\cancel{(s-1)}(s+1)}$$

$\Rightarrow \text{pol} = -1 < 0 \rightarrow \text{BIBO stabil}$

Aufgabe 6.1

Aufgabe 6.2

Betrachtet werde das Zustandssystem $A = -2$ $B = 1$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -2x(t) + u(t), \\ y(t) = x(t) + u(t). \end{cases}$$

$C = 1$ $D = 1$

$\phi(t) = \exp(At)$

1. Geben Sie die Hauptfundamentalmatrix zur Anfangszeit 0 an.
2. Geben Sie die Übertragungsfunktion an. $H(s)$
3. Geben Sie die Gewichtsfunktion an. $g(t)$
4. Skizzieren Sie die Sprungantwort und geben Sie ihren Anfangswert und ihren stationären Endwert an.

Aufgabe 6.2

$A = -2, \quad B = 1, \quad C = 1, \quad D = 1 \quad \rightarrow e^{t} = \sum t^n/n!$

1) $\phi(t) = \exp(At) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2t)^n}{n!} = e^{-2t}$ //

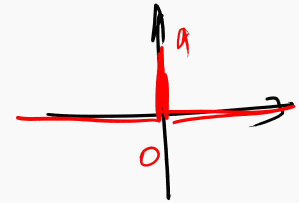
2) $H(s) = C(s\,id - A)^{-1} B + D$

$= 1 \cdot (s-(-2))^{-1} \cdot 1 + 1 = \frac{1}{s+2} + 1 = \frac{1+s+2}{s+2}$

$= \frac{s+3}{s+2}$ //

Aufgabe 6.2

3) $g(t) = \sigma(t) C \cdot \exp(At) B + \underline{\underline{\delta(t) \cdot D}}$



Impulse-function

Sprungfunktion

$$\sigma(t) \begin{cases} = 1, & t \geq 0 \\ = 0, & \text{andernfalls} \end{cases}$$

$$g(t) = \sigma(t) \cdot 1 \cdot e^{-2t} \cdot 1 + \delta(t) \cdot 1 = \underline{\underline{\sigma(t) e^{-2t} + \delta(t)}}$$

Aufgabe 6.2

Aufgabe 6.2

Aufgabe 6.2

Aufgabe 6.2

Aufgabe 6.2

Aufgabe 6.3

Gegeben sei die Übertragungsfunktion des Feder-Dämpfer-Masse-Systems mit der Position als Ausgang,

$$H(s) = \frac{1}{ms^2 + \gamma s + k},$$

wobei m, γ und k reelle positive Konstanten sind.

1. Geben Sie die Regelungsnormalform von $H(s)$ an.
2. Betrachten Sie das gleiche System, aber mit der Beschleunigung als Ausgang, gegeben durch die Übertragungsfunktion

   $$G(s) = \frac{s^2}{ms^2 + \gamma s + k}.$$

   Geben Sie die Regelungsnormalform von $G(s)$ an.

Aufgabe 6.3

7.5: Regelungsnormalform:

$$h(s) = \frac{b_n s^n + \ldots + b_1 \cdot s + b_0}{s^n + a_{n-1} \cdot s^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot s + a_0}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$C = (b_0 - b_n a_0, \; b_1 - b_n a_1, \ldots), \quad D = b_n$$

Aufgabe 6.3

Regelungsnormalform:

$$h(s) = \frac{b_n s^n + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$C = (\underline{\underline{b_0 - b_n a_0}}, \; b_1 - b_n a_1, \dots), \quad D = b_n$$

1) $$H(s) = \frac{1}{ms^2 + \gamma s + k} \cdot \frac{1/m}{1/m}$$

$$H(s) = \frac{1/m = b_0}{s^2 + \underset{a_1}{\underset{\shortparallel}{\gamma/m}}\, s + \underset{a_0}{\underset{\shortparallel}{k/m}}} \qquad b_2 = 0, \quad b_1 = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k/m & -\gamma/m \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1/m & 0 \end{pmatrix}, \quad D = 0$$

2) $$G(s) = \frac{s^2}{ms^2 + \gamma s + k} \cdot \frac{1/m}{1/m} = \frac{s^2/m}{s^2 + \gamma/m\, s + k/m}$$

Regelungsnormalform:

$$h(s) = \frac{b_n s^n + \dots + b_1 \cdot s + b_0}{s^n + a_{n-1} \cdot s^{n-1} + \dots + a_1 \cdot s + a_0}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$C = (b_0 - b_n a_0,\ b_1 - b_n a_1, \dots), \quad D = b_n$$

$$b_2 = 1/m, \quad b_1 = 0, \quad b_0 = 0$$

$$a_0 = k/m \quad a_1 = \gamma/m$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k/m & -\gamma/m \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \left(0 - \tfrac{1}{m} \cdot \tfrac{k}{m} \;\middle|\; 0 - \tfrac{1}{m} \cdot \tfrac{\gamma}{m}\right), \quad D = 1/m$$

Aufgabe 6.3

H(s) : Position

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k/m & -\gamma/m \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1/m & 0 \end{pmatrix}, \quad D = 0$$

G(s) : Regelungsnormalform : Beschleunigung

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k/m & -\gamma/m \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \left(0 - \tfrac{1}{m} \tfrac{k}{m} \mid 0 - \tfrac{1}{m} \cdot \tfrac{\gamma}{m} \right), \quad D = \tfrac{1}{m}$$

Aufgabe 6.3

Aufgabe 6.4

Gegeben ist das Zustandssystem

$$\dot{x} = Ax + Bu,$$
$$y = Cx + Du,$$

mit den Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}, D = 0.$$

1. Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion des Zustandssystems.
2. Bestimmen Sie das harmonische Ausgangssignal zum Eingangssignal u gegeben durch $u(t) = \cos(3t)$.

Aufgabe 6.4

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}, D = 0.$$

1) $H(s) = C(s\,id - A)^{-1} B + \cancel{D} \xrightarrow{} 0$

$(s\,id - A) = \begin{pmatrix} s+3 & 0 \\ 0 & s+1 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ $(s\,id - A)^{-1} = \begin{pmatrix} s+1 & 0 \\ 0 & s+3 \end{pmatrix} \cdot \dfrac{1}{\det(s\,id - A)}$

$\det(s\,id - A) = (s+3)(s+1)$

$(s\,id - A)^{-1} = \dfrac{1}{(s+3)(s+1)} \begin{pmatrix} s+1 & 0 \\ 0 & s+3 \end{pmatrix}$

Aufgabe 6.4

$$H(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s+1 & 0 \\ 0 & s+3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{(s+1)(s+3)}$$

$$= \begin{pmatrix} s+1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{(s+1)(s+3)}$$

$$= \frac{\cancel{(s+1)}}{\cancel{(s+1)}(s+3)} = \frac{1}{(s+3)}$$

$$H(s) = \frac{1}{(s+3)}$$

Aufgabe 6.4

2) $y(t)$, $u = \cos(3t)$ $\qquad e^{i\alpha} = \cos(\alpha) + i\sin(\alpha)$

$$u = \mathrm{Re}\left(e^{3it}\right) \rightarrow e^{iz} = \cos(z) + i\sin(z)$$

$$e^{3it} = \underline{\cos(3t)} + i\sin(3t$$

$$\mathrm{Re}\left(e^{3it}\right) = \cos(3t)$$

$$\tilde{u}(t) = e^{3it} \quad \underline{\left(u(t) = \mathrm{Re}\left(e^{3it}\right)\right)}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Probeklausuraufgaben 6.9:} \\ u(t) = \sin(3t) \\ \tilde{u}(t) = e^{3it} \quad \left(u(t) = \mathrm{Im}\left(e^{3it}\right)\right) \end{array}}$$

$$\tilde{y}(t) \rightarrow y(t) = \mathrm{Re}\left(\tilde{y}(t)\right) \qquad \tilde{y}(t) = H(\lambda) \cdot \tilde{u}(t)$$

Aufgabe 6.4

$\lambda = 3i$

i) $\cancel{EW(A) \neq \underline{\underline{u}}^{\lambda t}}$, $A = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow EW = -3, -1 \neq 3i$

✓ erfüllt

$EW(A) \neq \lambda$,
wobei $u(t) = e^{\lambda t} \cdot u_0$

$3i \rightarrow \tilde{u} = e^{3it}$

ii) $y(t) = H(\underset{}{\overset{= 3i}{\lambda}}) \cdot \tilde{u}$

$H(s) = \frac{1}{(s+3)}$

$$H(\lambda) \Rightarrow H(3i) = \frac{1}{3i+3} = \frac{3i-3}{(3i+3)(3i-3)} = \frac{3(i-1)}{9\underbrace{i^2}_{=-1} - 9} = -\frac{3}{18}(i-1)$$

$$= -\frac{1}{6}(i-1)$$

$$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$$

$$H(3i) = -\frac{1}{6}(i-1) = -\frac{1}{6}\left(e^{\frac{\pi}{2} i} - 1\right)$$

$$\hookrightarrow e^{\frac{\pi}{2}i} = \underbrace{\cancel{\cos\tfrac{\pi}{2}}}_{0} + i \underbrace{\cancel{\sin \pi/2}}_{1} = i$$

Aufgabe 6.4

$$H(3i) = -\frac{1}{6}\left(e^{\frac{\pi}{2}i} - 1\right)$$

$$\left(-1 = e^{0i} \right)$$

$$\tilde{y}(t) = H(3i)\cdot\tilde{u} = -\frac{1}{6}\left(e^{\frac{\pi}{2}i} - 1\right)\cdot e^{3it} = -\frac{1}{6}\left(e^{\left(\frac{\pi}{2}+3t\right)i} - e^{3it}\right) \quad //$$

$$y(t) = \mathrm{Re}(\tilde{y}(t)) = -\frac{1}{6}\mathrm{Re}\left(e^{\left(\frac{\pi}{2}+3t\right)i} - e^{3it}\right)$$

$$= -\frac{1}{6}\mathrm{Re}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}+3t\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}+3t\right) -\right.$$

$$\underline{u(t) = \mathrm{Re}(\tilde{u})} \Rightarrow u(t) = \mathrm{Re}\left(e^{3it}\right) = \mathrm{Re}(\cos 3t + i\sin 3t)$$

$$= \cos(3t) \quad //$$

Aufgabe 6.4

$$y(t) = \mathrm{Re}(\tilde{y}(t)) = -\frac{1}{6}\,\mathrm{Re}\left(e^{\left(\frac{\pi}{2}+3t\right)i} - e^{3it}\right)$$

$$= -\frac{1}{6}\,\mathrm{Re}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}+3t\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}+3t\right) - \cos(3t) - i\sin(3t)\right)$$

$$= -\frac{1}{6}\left(\cos\left(3t+\frac{\pi}{2}\right) - \cos(3t)\right) = \underline{\underline{\frac{1}{6}\left(\cos(3t) - \cos\left(3t+\frac{\pi}{2}\right)\right)}}$$