Universität der Bundeswehr München

Steuer- und Regelungstechnik

5. Übung

Victor Cheidde Chaim

14. Februar 2022

Universität der Bundeswehr München, LRT-15 Institut für Steuer- und Regelungstechnik

4.5 Aufgabe .

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & (1) \end{pmatrix} = \underline{\text{diag}\,(A_1, A_2)}$$

A_1, A_2

$\lambda_1, \lambda_2 = 2 \Rightarrow$ 2. Trick

$\Rightarrow e^{t}$

3. Trick

Aufgabe 5.1

Gegeben sei die Matrix A, berechnen Sie $\exp(At)$.

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 1 \\ -3 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

$$A = \begin{pmatrix} \underbrace{\begin{matrix} -4 & 0 \\ 3 & -4 \end{matrix}}_{A_1} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} & \underbrace{-4}_{A_2} \end{pmatrix}$$

$A = \mathrm{diag}(A_1, A_2)$

Eigenwerte

1. $\lambda_{1,\dots,n} = 0$ | A ist nilpotent

2. $\lambda_{1,\dots,} = k$ | 2. trick EW-Verschiebung

3. $\lambda_{1,\dots,} = \begin{cases} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{cases}$ | 4 trick → Diagonalform $A = T \Lambda T^{-1}$

Aufgabe 5.1

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 1 \\ -3 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$\rightarrow$ Es ist nicht möglich A als diag(. . . .) umzuschreiben.

$$\det(A - \lambda\, id) = \det\begin{pmatrix} -4-\lambda & 0 & 0 \\ 3 & -4-\lambda & 1 \\ -3 & 0 & -4-\lambda \end{pmatrix} = (-4-\lambda)^3$$

$\lambda_{1,2,3} = -4$ // $\rightarrow$ EW-Verschiebung z. Trick

$$(A - \lambda\, id) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\rightarrow$ EW: $\lambda_{1,2,3} = 0$

$$A = \underbrace{\lambda\, id}_{\text{diagonal}} + \underbrace{(A - \lambda\, id)}_{\text{nilpotent}}$$

Aufgabe 5.1

$$\exp(At) = \exp((\lambda \mathrm{id} + (A - \lambda \mathrm{id}))t) =$$

$$= \underbrace{\exp(\lambda \mathrm{id}\, t)}_{\mathrm{I}} \underbrace{\exp((A - \lambda \mathrm{id})t)}_{\mathrm{II}}$$

$$\mathrm{I}: \quad \exp(\lambda . \mathrm{id} . t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n . \mathrm{id}^n . t^n}{n!} = \mathrm{id} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n t^n}{n!} = e^{\lambda t}$$

$$\exp(\lambda \mathrm{id} t) = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-4t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-4t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-4t} \end{pmatrix} \quad //$$

Aufgabe 5.1

II: $\exp((A-\lambda id)t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(A-\lambda id)^n t^n}{n!}$

nilpotent: $A^k = 0, \quad k \geq \underline{\underline{m}}$

$$(A-\lambda id)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(A-\lambda id)^3 = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=(A-\lambda id)^2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^k = 0, \quad \underline{\underline{k \geq 3}}$$

Aufgabe 5.1

$$\exp((A-\lambda id)t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(A-\lambda id)^n t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{2} \frac{(A-\lambda id)^n t^n}{n!}$$

$$= id + (A-\lambda id)t + \frac{(A-\lambda id)^2 \cdot t^2}{2}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{t^2}{2}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3t - \frac{3}{2}t^2 & 1 & t \\ -3t & 0 & 1 \end{pmatrix} //$$

Aufgabe 5.1

$$\exp(At) = \exp(\lambda \, id \, t)\exp((A-\lambda \, id)t)$$

$$= \begin{pmatrix} e^{-4t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-4t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-4t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3t-\frac{3}{2}t^2 & 1 & t \\ -3t & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e^{-4t} & 0 & 0 \\ e^{-4t}\left(3t-\frac{3}{2}t^2\right) & e^{-4t} & t\,e^{-4t} \\ -3t\,e^{-4t} & 0 & e^{-4t} \end{pmatrix} \,//$$

Aufgabe 5.2

Gegeben sei ein vom Parameter k abhängendes Polynom p durch $p(s) = s^3 + ks^2 + (1+k)s + 6$. Für welche Werte des Parameters k ist das Polynom ein Hurwitz-Polynom?

1. Bedingung: $p(s) = s^3 + \underline{k}s^2 + (1+k)s + 6 \rightarrow \begin{cases} c_0 = 6 \\ c_1 = 1+k \\ c_2 = k \\ c_3 = 1 \end{cases}$

$$\boxed{k > 0}\ , \quad (1+k) > 0 \Rightarrow \underline{k > -1}$$

2. Bedingung: Determinante > 0

$$H = \begin{pmatrix} c_1 & c_3 & \cancel{c_5} \\ c_0 & c_2 & \cancel{c_4} \\ 0 & c_1 & c_3 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} D_1 \quad D_2 \quad D_3 \\ \begin{pmatrix} (1+k) & 1 & 0 \\ 6 & k & 0 \\ 0 & (1+k) & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Aufgabe 5.2

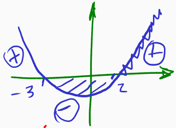
Hurwitz-matrix:

$$
\begin{array}{cccc}
 & D_1 & D_2 & D_3 \\
H = & & & \\
\end{array}
\qquad
H = \begin{pmatrix} (1+k) & 1 & 0 \\ 6 & k & 0 \\ 0 & (1+k) & 1 \end{pmatrix}
$$

$D_1: \; 1+k > 0 \;, \quad \underline{k > -1} \quad (k > 0)$ 1. Bedingung

$D_2: \; (1+k)k - 6 = k^2 + k - 6 > 0$

$$k = \frac{-1 \pm 5}{2} \;\rightarrow\; k_1 = -3, \quad k_2 = 2$$



$\hookrightarrow \; \cancel{k < -3}$ oder $\boxed{k > 2}$

1. Bedingung $k > 0$

$\underline{D_3 = D_2}$

$\boxed{k > 2} \rightarrow P(s)$ Hurwitz

Aufgabe 5.2

Aufgabe 5.2

Aufgabe 5.2

Aufgabe 5.3

Gegeben ist das Zustandssystem

$$\dot{x} = Ax + Bu,$$
$$y = Cx + Du,$$

mit den Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & 0 \\ 5 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, D = 0.$$

1. Betrachten Sie $a_2 = 0$. Für welche Werte der Parameter a_1 ist das Zustandssystem asympotisch stabil?

Aufgabe 5.3

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

Eigenwerte:

$$\det(A - \lambda\, id) = \begin{pmatrix} a_1-\lambda & 0 & 0 \\ 5 & -1-\lambda & 2 \\ -1 & 0 & -4-\lambda \end{pmatrix} = (a_1-\lambda)(-1-\lambda)(-4-\lambda)$$

$$= 0$$

$\lambda_1 = -1$ ✓

$\lambda_2 = -4$ ✓ $\Rightarrow$ Stabilität : $Re(\lambda) < 0$

$\lambda_3 = a_1$

$\hookrightarrow$ $\boxed{a_1 < 0}$ $a_1 \in \mathbb{R}$

Aufgabe 5.3

Aufgabe 5.3

Gegeben ist das Zustandssystem

$$\dot{x} = Ax + Bu,$$
$$y = Cx + Du,$$

mit den Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & 0 \\ 5 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, D = 0.$$

2. Betrachten Sie $a_2 = 10$. Für welche Werte der Parameter a_1 ist das Zustandssystem asympotisch stabil?

Aufgabe 5.3

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 10 & 0 \\ 5 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda\, id) = \begin{pmatrix} a_1 - \lambda & 10 & 0 \\ 5 & -1-\lambda & 2 \\ -1 & 0 & -4-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= (a_1 - \lambda)(-1-\lambda)(-4-\lambda) - 20 - 10 \cdot 5 \cdot (-4-\lambda)$$

$$= (a_1 - \lambda)(4 + \lambda + 4\lambda + \lambda^2) - 20 - 50(-4-\lambda)$$

$$= (a_1 4 + 5a_1\lambda + a_1\lambda^2 - 4\lambda - 5\lambda^2 - \lambda^3 - 20 + 200 + 50\lambda$$

Aufgabe 5.3

$$(a_1 4 + 5a_1\lambda + a_1\lambda^2 - 4\lambda - 5\lambda^2 - \lambda^3 - 20 + 200 + 50\lambda =$$

$$= -\lambda^3 - \lambda^2(5 - a_1) - \lambda(-46 - 5a_1) + (180 + a_1 4) = p(s)$$

$$= \lambda^3 + \lambda^2(5 - a_1) + \lambda(-46 - 5a_1) - (180 + a_1 4) = p(s)$$

$\Rightarrow$ 1. Bedingung für HK: $c_0, c_1, c_2, c_3 \Rightarrow$

$(5 - a_1) > 0$ I

$(-46 - 5a_1) > 0$ II

$-180 - a_1 \cdot 4 > 0$ III

$c_3 = 1$, $c_2 = (5 - a_1)$, $c_1 = -5a_1 - 46$

$c_0 = -180 - 4a_1$

Aufgabe 5.3

I: $5 - a_1 > 0 \quad \Rightarrow \quad -a_1 > -5 \quad \overset{(-1)}{\Rightarrow} \quad \boxed{a_1 < 5}$ I

II: $-46 - 5a_1 > 0 \quad \Rightarrow \quad -5a_1 > 46 \quad \Rightarrow \quad \boxed{a_1 < -46/5}$ II

III: $-180 - 4a_1 > 0 \quad \Rightarrow \quad -4a_1 > 180 \quad \Rightarrow \quad \boxed{a_1 < -180/4} = -45$ III

$c_3 = 1, \; c_2 = (5 - a_1), \; c_1 = -5a_1 - 46$

Hurwitz Matrix:

$c_0 = -180 - 4a_1$

D1 D2

$$H = \begin{vmatrix} c_1 & c_3 & \cancel{c_5}^{\,0} \\ c_0 & c_2 & \cancel{c_4}^{\,0} \\ 0 & c_1 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5a_1 - 46 & 1 & 0 \\ -180 - 4a_1 & (5 - a_1) & 0 \\ 0 & (-5a_1 - 46) & 1 \end{vmatrix}$$

$D_3 = D_2$

Aufgabe 5.3

$D_1: \quad -5a_1 - 46 > 0 \quad \rightarrow \quad a_1 < \frac{-46}{5} \quad | \quad \boxed{a_1 < -45}$

$D_2: \quad (-5a_1 - 46)(5 - a_1) - (-180 - 4a_1)$

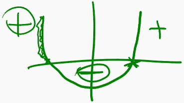
$-25a_1 + 46a_1 + 5a_1^2 - 5 \cdot 46 + 180 + 4a_1$

$5a_1^2 + 25a_1 - 50 = D_2 \quad \rightarrow \quad 5a_1^2 + 25a_1 - 50 = 0$

$a_1^2 + 5a_1 - 10 = 0$

1. Bedingung: $\boxed{a_1 < -45}$

$a_1 = \frac{-5 \pm \sqrt{25+40}}{2} \quad \rightarrow$



$$a_1 < \frac{-5-\sqrt{65}}{2} \quad \left(> -45 \right) \rightarrow \boxed{a_1 < -45}$$

↳ Polynom Hurwitz

$$\underline{Re(\lambda) < 0}$$

Aufgabe 5.3

Gegeben ist das Zustandssystem

$$\dot{x} = Ax + Bu,$$
$$y = Cx + Du,$$

mit den Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & 0 \\ 5 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, D = 0.$$

3. Gegeben sei ein Signal $u\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $u(t) = 3 - t^{-2} - e^{-3t}$ und die Parameter $a_1 = -2$ und $a_2 = 0$. Bestimmen Sie den stationären Endwert des Zustandssignals $\varphi(\cdot, x_0, u)$.

Aufgabe 5.3

$$a_{11} = (-1)^{1+1} \cdot -4 \cdot \Rightarrow C_{11} = 4$$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -4 \end{pmatrix} \qquad \underline{u(t) = 3 - t^{-2} - e^{-3t}}$$

$$\boxed{u(\infty) = 3}$$

$$\varphi(\infty, x_0, u) = -A^{-1} B u(\infty)$$

$$u(\infty) = \lim_{t\to\infty} \left(3 - t^{-2} - e^{-3t}\right) = \lim_{t\to\infty} 3 - \cancel{\lim_{t\to\infty} t^{-2}}^{\,0} - \cancel{\lim_{t\to\infty} e^{-3t}}^{\,0}$$

$$= 3 \,//$$

Aufgabe 5.3

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 18 & 8 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{8} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 18 & 8 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = -8$$

$$\varphi(\infty, x_0, u) = -A^{-1} B\, u(\infty) = +\frac{1}{8} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 18 & 8 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} 3$$

$$= \frac{3}{8} \begin{pmatrix} -4 + 0 + 0 \\ -18 - 16 + 4 \\ 1 + 0 + 2 \end{pmatrix} = \frac{3}{8} \begin{pmatrix} -4 \\ -30 \\ 3 \end{pmatrix}$$