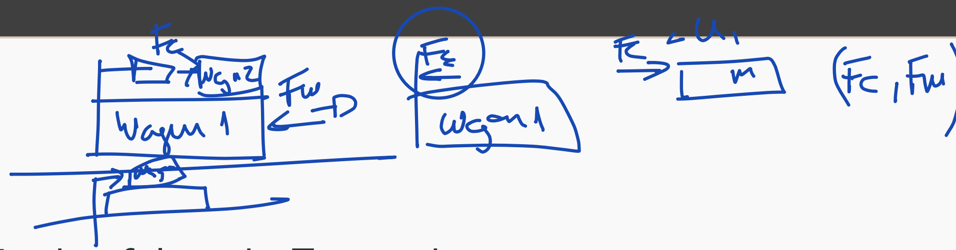
Steuer- und Regelungstechnik

4. Übung

Victor Cheidde Chaim

07. Februar 2022

Universität der Bundeswehr München, LRT-15 Institut für Steuer- und Regelungstechnik



Betrachten Sie das folgende Zustandssystem

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_1(t) + x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= u(t) \end{aligned} \quad , \qquad u(t) = \begin{cases} t & \text{falls } 0 \leq t \leq 1 \\ -2t & \text{falls } 1 < t \leq 2 \\ 0 & \text{andernfalls} \end{cases}$$

wobei der Eingang $u(t)$ eine stückweise lineare Funktion ist und $t \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie die Lösung des Systems unter der Annahme, dass die Anfangsbedingungen $x_1(0) = 0$ und $x_2(0) = 1$ sind.

$$x_e = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Aufgabe 3.3

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad , \quad u(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq 1 \\ -2t, & 1 \leq t \leq 2 \\ 0, & \text{andernfalls} \end{cases}$$

$$\varphi(t, x_0, u) = e^{At} \cdot x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) \, d\tau$$

$$\exp(At) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(At)^n}{n!} \Rightarrow A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = A$$

$$\exp(At) = id + A \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} = id - A + A \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}}_{e^t} = id - A + Ae^t$$

$$\exp(At) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^t & e^t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & e^t - 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} //$$

Aufgabe 3.3

$$\varphi(t, x_0, u) = e^{At} \cdot x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau)\, d\tau, \quad \varphi(t, x_0, u) \overset{\text{lin.}}{=} \varphi_1(t, x_0, u_1) + \varphi_2(t, x_1, u_2) + \varphi_3(t, x_2, u_3)$$

$\underline{0 \leq t \leq 1:}$ $\quad u_1(t) = t$

$$\varphi_1(t, x_0, u_1) = e^{At} \cdot x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u_1(\tau)\, d\tau$$

$$= \begin{bmatrix} e^{t} & e^{t}-1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u_1(\tau)\, d\tau$$

$$= \begin{bmatrix} e^{t}-1 \\ 1 \end{bmatrix} + e^{At} \int_0^t e^{-A\tau} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \tau\, d\tau$$

Aufgabe 3.3

$$\varphi_1(t, x_0, u_1) = \begin{bmatrix} e^{t} - 1 \\ 1 \end{bmatrix} + e^{At} \int_0^t e^{-A\tau} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \tau \, d\tau$$

$$= \begin{bmatrix} e^{t} - 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e^{t} & e^{t} - 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \int_0^t \begin{pmatrix} e^{-\tau} & e^{-\tau} - 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \tau \, d\tau$$

$$= \begin{bmatrix} e^{t} - 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e^{t} & e^{t} - 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \int_0^t \begin{pmatrix} e^{-\tau} - 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tau \, d\tau$$

$$= \begin{bmatrix} e^{t} - 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e^{t} & e^{t} - 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \int_0^t (e^{-\tau} - 1) \tau \, d\tau \\ \int_0^t \tau \, d\tau \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3.3

$$\psi_1(t, x_0, u) = \begin{bmatrix} e^t - 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e^t & e^t - 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \int_0^t (e^{-\tau} - 1)\tau \, d\tau \\ \int_0^t \tau \, d\tau \end{pmatrix}$$

$$\int_0^t (e^{-\tau} - 1)\tau \, d\tau = \underbrace{\int_0^t e^{-\tau} \cdot \tau \, d\tau}_{\text{Integration durch teile}} - \underbrace{\int_0^t \tau \, d\tau} = -e^{-\tau}(\tau + 1)\Big|_0^t - \frac{\tau^2}{2}\Big|_0^t$$

$$= -e^{-t}(t+1) + 1 - \frac{t^2}{2}$$

$$\psi_1(t, x_0, u) = \begin{bmatrix} e^t - 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e^t & e^t - 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -e^{-t}(t+1) + 1 - \frac{t^2}{2} \\ \frac{t^2}{2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} e^t - 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e^t - \cancel{\frac{t^2}{2} e^t} - (t+1) + \cancel{e^t \cdot \frac{t^2}{2}} - \frac{t^2}{2} \\ \frac{t^2}{2} \end{bmatrix} =$$

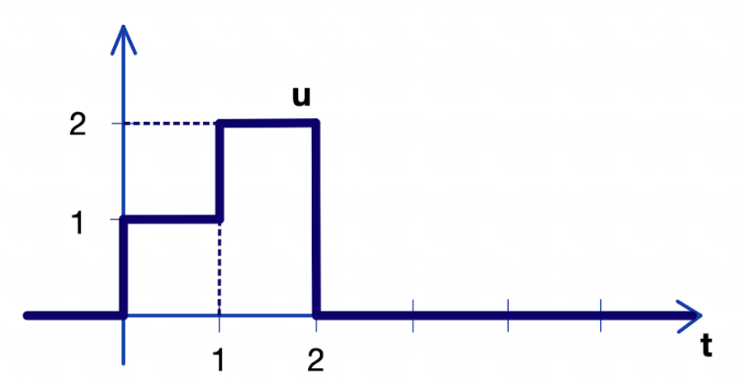
Aufgabe 3.3

$$y_1(t, x_0, u_1) = \begin{bmatrix} e^t - 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e^t - \cancel{\frac{t^2}{2} e^t} - (t+1) + \cancel{e^t \cdot \frac{t^2}{8}} - \frac{t^2}{2} \\ \frac{t^2}{2} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} e^t - 1 + e^t - (t+1) - t^2/2 \\ 1 + t^2/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e^t - t^2/2 - t - 2 \\ 1 + t^2/2 \end{bmatrix}$$ ↯

Betrachten Sie das folgende Differentialgleichungssystem

$$\ddot{x}(t) = -9\dot{x}(t) - 20x(t) + u(t)$$
$$y(t) = x(t)$$
$$x(0) = 0 \quad \text{und} \quad \dot{x}(0) = 0$$



Berechnen Sie das Ausgangssignal y.

$$x = [x \quad \dot x]$$

$$\ddot x = -9\dot x - 20x + u$$
$$y = x$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}\dot x\\ \ddot x\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ -20 & -9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ \dot x\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}\cdot u$$

$$x_0 = [0 \quad 0]^T$$

$$y = [1 \quad 0]\begin{bmatrix}x\\ \dot x\end{bmatrix} + 0\cdot u$$

$$\sigma(t) = \begin{cases}1, & t \geq 0\\ 0, & \text{sonst}\end{cases}$$

$$x_0 = [0 \quad 0]^T$$

Impulsantwort: $g(t) = \sigma(t)\cdot C e^{At}\cdot B + \cancel{\delta(t) D} = \sigma(t) C e^{At}\cdot B$

$$\exp(At) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(At)^n}{n!},$$

$A \rightarrow$ diag schreiben

$$A = T\Lambda T^{-1} \rightarrow$$

$T \Rightarrow$ eigenvektoren

$\Lambda \Rightarrow$ diag. eigenwerte

Aufgabe 4.1

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -20 & -9 \end{bmatrix} \rightarrow \det(A-\lambda I) = \det\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -20 & -9-\lambda \end{pmatrix} = (-\lambda)(-9-\lambda)+20$$

$$= \lambda^2 + 9\lambda + 20 = 0$$

$\lambda_1 = -4,\ \lambda_2 = -5,\ v_1$ und v_2

$$\lambda_1,\ v_1 = [v_{11}\ \ v_{12}]^T \rightarrow A v_1 = \lambda v_1 \rightarrow (A-\lambda_1 I)v_1 = 0$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -20 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{bmatrix} = 0 \rightarrow -v_{11} = \frac{v_{12}}{4} \rightarrow v_1 = [1\ \ -4]^T$$

λ_2

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -20 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{bmatrix} = 0 \rightarrow -v_{21} = \frac{v_{22}}{5} \rightarrow v_2 = [1\ \ -5]$$

$$T = [v_1 \ v_2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -4 & -5 \end{bmatrix}, \qquad \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\det(T) = -5 + 4 = -1$$

$$T^{-1} = \frac{1}{\det(T)} \begin{bmatrix} -5 & -1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}, \qquad A = T \Lambda T^{-1}$$

$$\Lambda^n = \begin{bmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{bmatrix}$$

$$(T\Lambda T^{-1})^n = T \Lambda^n T^{-1}$$

$$\exp(At) = \exp(T\Lambda T^{-1} t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(T\Lambda T^{-1})^n t^n}{n!} = T \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Lambda^n t^n}{n!} \right) T^{-1}$$

$$\exp(At) = T \begin{bmatrix} \underbrace{\sum \frac{\lambda_1^n t^n}{n!}}_{= e^{\lambda_1 t}} & 0 \\ 0 & \underbrace{\sum \frac{\lambda_2^n t^n}{n!}}_{= e^{\lambda_2 t}} \end{bmatrix} T^{-1} = T \begin{bmatrix} e^{-4t} & 0 \\ 0 & e^{-5t} \end{bmatrix} T^{-1}$$

Aufgabe 4.1

$$\exp(At) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -4 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-4t} & 0 \\ 0 & e^{-5t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -4 & -1 \end{bmatrix} \quad , \quad g(t) = \sigma(t)\, C\, e^{At} B$$

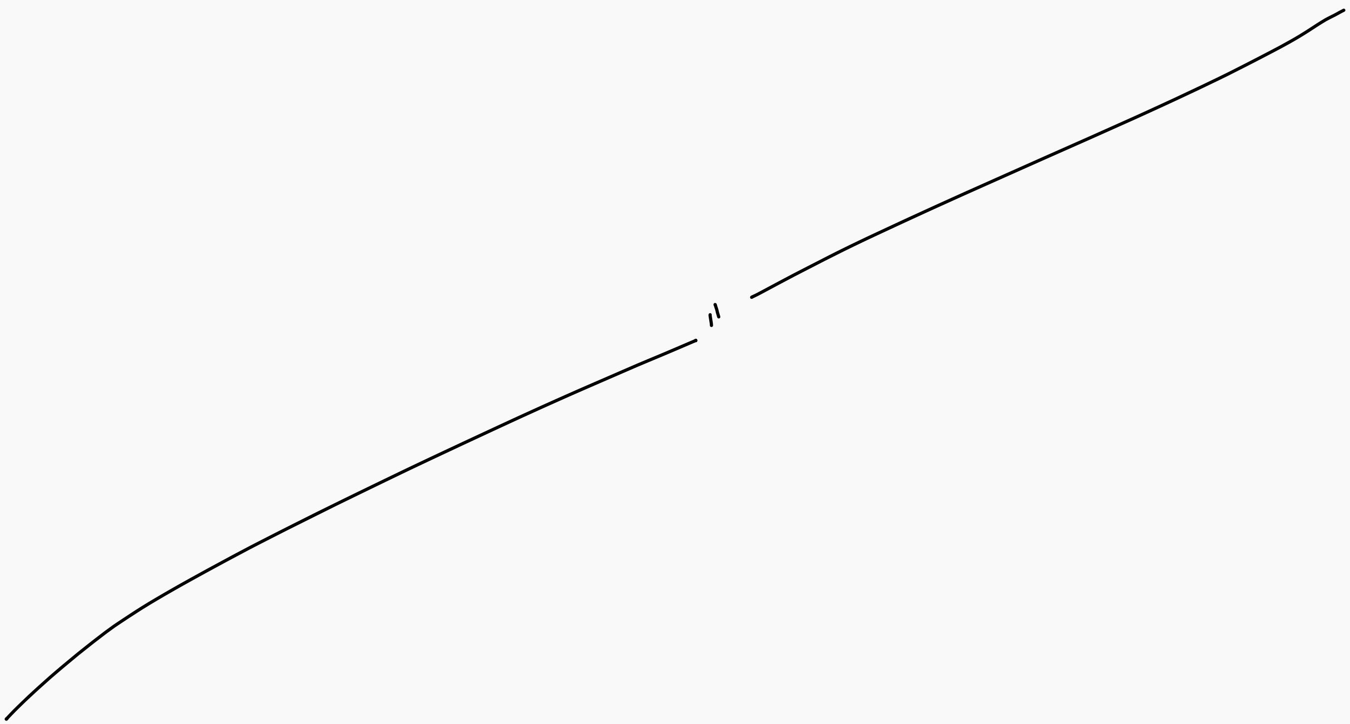
$$g(t) = \sigma(t) \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -4 & -5 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} e^{-4t} & 0 \\ 0 & e^{-5t} \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

$$g(t) = \sigma(t) \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-4t} & 0 \\ 0 & e^{-5t} \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} =$$

$$= \sigma(t) \begin{bmatrix} e^{-4t} & e^{-5t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \sigma(t)\left(e^{-4t} - e^{-5t}\right)$$

$\rightarrow$ Impulsantwort

Aufgabe 4.1



Aufgabe 4.1

Impulsantwort:

$$g(t) = \sigma(t)\left(e^{-4t} - e^{-5t}\right)$$

$$u = \underset{\sigma(t)}{\underset{\shortparallel}{u_1}} + \underset{\sigma(t-1)}{\underset{\shortparallel}{u_2}} + \underset{-2\sigma(t-2)}{\underset{\shortparallel}{u_3}}$$

$$u = \underbrace{\sigma(t)}_{u_1} + \underbrace{\sigma(t-1)}_{u_2} - \underbrace{2\sigma(t-2)}_{u_3}$$

Vorlesungsbeispiel

Folie 4|4

$$y(t) = 2(g*\sigma)(t-1) - (g*\cancel{1}\,\sigma)(t-2)$$

$$y(t) = \psi(t,0,u) =$$
$$\psi(t,0,u_1) + \psi(t,0,u_1) -$$
$$2\psi(t,0,u_3)$$

$$y(t) = (g*\sigma)(t) + (g*\sigma)(t-1) - 2(g*\sigma)(t-2)$$

$$g(t) = \sigma(t)\left(e^{-4t} - e^{-5t}\right)$$

$$(g * \sigma)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)\, \sigma(t-\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \overset{=0,\ \tau<0}{\sigma(\tau)} \left(e^{-4\tau} - e^{-5\tau}\right) \overset{=0,\ \tau>t}{\sigma(t-\tau)}\, d\tau =$$

$$= \int_{0}^{t} \overset{=1}{\sigma(\tau)} \left(e^{-4\tau} - e^{-5\tau}\right) \overset{=1}{\sigma(t-\tau)}\, d\tau = \sigma(t) \int_{0}^{t} \left(e^{-4\tau} - e^{-5\tau}\right) d\tau$$

$$= \sigma(t) \left(\left(\frac{e^{-4\tau}}{-4}\right)\Bigg|_0^t - \left(\frac{e^{-5\tau}}{-5}\right)\Bigg|_0^t \right) = \sigma(t) \left(\frac{e^{-4t}}{-4} + \frac{1}{4} + \frac{e^{-5t}}{5} - \frac{1}{5} \right)$$

$$= \sigma(t) \left(\frac{e^{-5t}}{5} - \frac{e^{-4t}}{4} + \frac{1}{20} \right) \mathbin{/\!/}$$

Aufgabe 4.1

$$(g*\sigma)(t) = \sigma(t)\left(\frac{e^{-5t}}{5} - \frac{e^{-4t}}{4} + \frac{1}{20}\right) //$$

$$y(t) = (g*\sigma)(t) + (g*\sigma)(t-1) - 2(g*\sigma)(t-2)$$

$$y(t) = \sigma(t)\left(\frac{e^{-5t}}{5} - \frac{e^{-4t}}{4} + \frac{1}{20}\right) + \sigma(t-1)\left(\frac{e^{-5(t-1)}}{5} - \frac{e^{-4(t-1)}}{4} + \frac{1}{20}\right) -$$

$$-2 \cdot \sigma(t-2)\left(\frac{e^{-5(t-2)}}{5} - \frac{e^{-4(t-2)}}{4} + \frac{1}{20}\right) //$$