Steuer- und Regelungstechnik

2. Übung

Victor Cheidde Chaim

24. Januar 2022

Universität der Bundeswehr München, LRT-15 Institut für Steuer- und Regelungstechnik

Aufgabe 1.12

$\underline{A = T \Lambda T^{-1}}$ $\rightarrow T = [v_1 \; v_2]$, $\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$,

Wenn A die Eigenwerte 0 und 1 hat, zu denen die Eigenvektoren $v_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}^T$ und $v_2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix}^T$ gehören, wie kann man dann im Voraus erkennen, dass A symmetrisch ist? Berechnen Sie die Matrix A. Wie lauten die Eigenwerte und Eigenvektoren von A^2? Welche Beziehung besteht zwischen A und A^2?

$T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, $T^{-1} = \dfrac{1}{\det(T)} \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} =$

$\det(T) = 1(-1) - 2 \cdot 2 = -5$

Aufgabe 1.12

$$T^{-1} = -\frac{1}{5}\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/5 & 2/5 \\ 2/5 & -1/5 \end{bmatrix}$$

$$A = T\Lambda T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/5 & 4/5 \\ 2/5 & -1/5 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 4/5 & -2/5 \\ 2/5 & 1/5 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = A \cdot A = (T\Lambda T^{-1})(T\Lambda T^{-1}) = T\Lambda \underbrace{T^{-1} T}_{I = id} \Lambda T = T\Lambda^2 T^{-1}$$

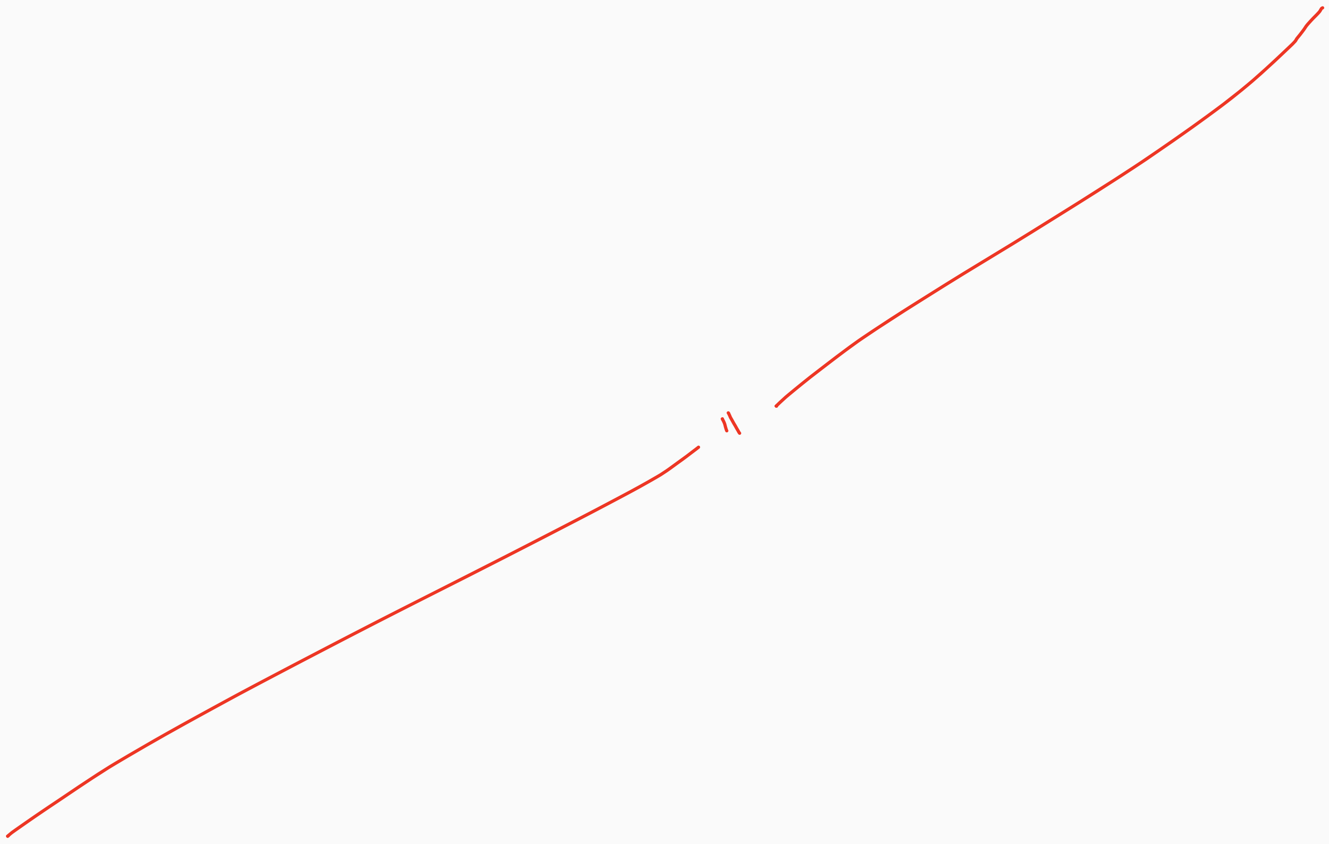
$$A^n = \underbrace{(T\Lambda \underbrace{T^{-1})(T}_{id}\Lambda T^{-1}) \cdots (\underbrace{T}_{id}\Lambda T^{-1})}_{n\text{-mal}} = T\Lambda^n T^{-1}$$

Allgemein ✓

$$A^2 = T\begin{bmatrix} 0^2 & 0 \\ 0 & 1^2 \end{bmatrix} T^{-1} = T\Lambda T^{-1} = A$$

$\boxed{A^n = A}$ $\Rightarrow$ nur für die Aufgabe

Aufgabe 1.12



Aufgabe 2.1

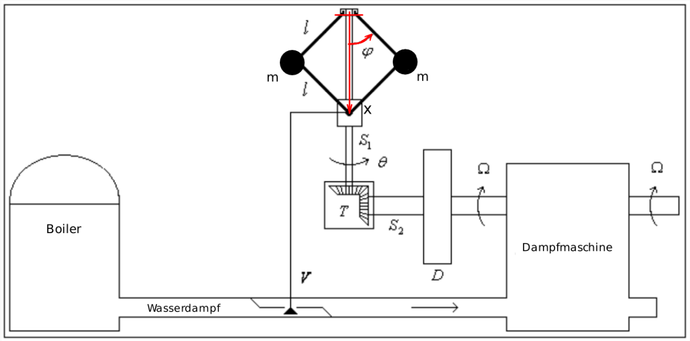
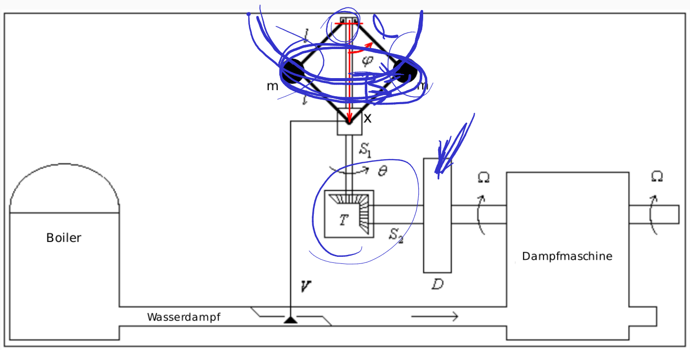


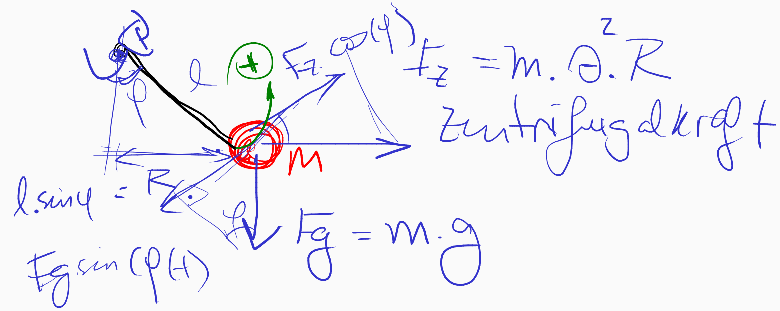
Abbildung 1: System: Dampfmaschine und Fliehkraftregler.
Quelle (bearbeitet von V. Chaim): *Bifurcation Analysis of the Watt Governor System*, Sotomayor, J.; Mello, L. F.; Braga, D. C.; Computational and Applied Mathematics, Vol. 26, N.1, pp 19-44, 2007.

- Drehmoment-Dämpfung $M_r = -b\dot{\varphi}(t)$;
- Getriebeverhältnis $\theta(t) = n\Omega(t)$;
- Eingang $u(t) = k(x(t) - x_{ref})$.

1) Modellierungsziel: Zusammenhang zw. $\varphi(t)$ und $\theta(t)$ $(\Omega(t))$

2) Blöcke: Masse, Trägheitsmoment $(= I_D)$, Dämpfer, Getriebeverhältnis.





3)a) Verhalten der Blöcke:

Masse: $M_I = I_m \cdot \ddot{\varphi}(t)$, $M_{F_g} = l\, F_g \sin(\varphi(t))$, $M_{F_z} = F_z\, l \cdot \cos(\varphi)$

Dämpfer: $M_r = -b\dot{\varphi}$, Gd: $\theta(t) = n\,\Omega(t)$, $M_{I_D} = u = k(x - x_g)$

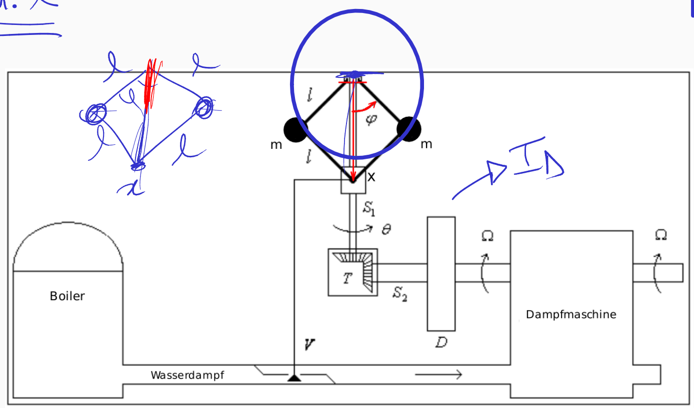
Aufgabe 2.1

3) b) Verbindungen der Blöcke: $\sum M = I \cdot \alpha = I \cdot \ddot{\varphi}$

$$I_M \cdot \ddot{\varphi} = -F_g \cdot l \cdot \sin\varphi + F_t \cdot l \cdot \cos\varphi - b \cdot \dot{\varphi} = -m \cdot g \cdot l \cdot \sin\varphi + R\, m\, \dot{\theta}^2 l \cdot \cos\varphi - b\dot{\varphi}$$

$I_M = m \cdot l^2$

$$\boxed{m l^2 \ddot{\varphi} = -m g \cdot l \sin\varphi + m \dot{\theta}^2 l^2 \cos\varphi \sin\varphi - b\dot{\varphi}} \quad (I)$$



$$I_D \cdot \dot{\Omega} = u = k(x - x_{vg})$$

$$x = 2l \cdot \cos\varphi \rightarrow I_D \dot{\Omega} = k(2l\cos\varphi - x_{vg})$$

$$\boxed{I_D \cdot \frac{\dot{\theta}(t)}{n} = k(2l\cos\varphi - x_{vg})} \quad (II)$$

Aufgabe 2.1

3) c) Vereinfachung und Elimination

$$\begin{cases} \ddot{\varphi} \cdot m\ell^2 = \ell^2 m \dot{\theta}^2 \cos\varphi \sin\varphi - \sin\varphi\, \ell m g - b \cdot \dot{\varphi} \\ I_D \cdot \frac{\dot{\theta}}{n} = k(2\ell\cos\varphi - x_{ruf}) \end{cases}$$

$$\ddot{\varphi} = \dot{\theta}^2 \cos\varphi \sin\varphi - \sin\varphi \frac{g}{\ell} - \overbrace{\frac{b}{m\ell^2}}^{b^*} \dot{\varphi} = \underline{\dot{\theta}^2 \cos\varphi \sin\varphi - \sin\varphi \frac{g}{\ell} - b^* \dot{\varphi}}$$

$$\dot{\theta} = \underbrace{\frac{k \cdot n \cdot 2 \cdot \ell}{I_D}}_{k^*} \cdot \cos\varphi - \underbrace{\frac{x_{ruf} \cdot k \cdot n}{\dot{\theta}}}_{k_1} = k^* \cos\varphi - k_1$$

$$\vec{x} = [\varphi \quad \dot{\varphi} \quad \theta] \quad \Rightarrow \quad \dot{x} = f(\vec{x}, u) = \begin{pmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\theta}^2 \cos\varphi \sin\varphi - \sin\varphi \frac{g}{\ell} - b^* \dot{\varphi} \\ k^* \cos\varphi - k_1 \end{pmatrix}$$

3)e) Linearisierung:

Ruhelage: $\dot{\bar{x}} = 0$, $\boxed{\dot{\varphi}_0 = 0}$,

$$\begin{cases} \theta_0^2 \cos\varphi_0 \sin\varphi_0 - \sin\varphi_0 \frac{g}{\ell} - \cancel{b^* \dot{\varphi}_0} = 0 \xrightarrow[\sin\varphi_0 \neq 0]{:\sin\varphi_0} \theta_0^2 \cos\varphi_0 = \frac{g}{\ell} \\ k^* \cos\varphi_0 - k_1 = 0 \Rightarrow \boxed{\cos\varphi_0 = \frac{k_1}{k^*}} \end{cases}$$

$$\boxed{\theta_0^2 = \frac{g}{\ell \cos\varphi_0} = \frac{g}{\ell k_1} \cdot k^*}$$

φ_0, θ_0, $\dot{\varphi}_0 = 0$, $A = D_1 f(x_0, u_0)$ $\quad f = \begin{pmatrix} \dot{\varphi} \\ \theta^2 \cos\varphi \sin\varphi - \sin\varphi \frac{g}{\ell} - b^* \dot{\varphi} \\ k^* \cos\varphi - k_1 \end{pmatrix}$

$A_{11} = \frac{\partial f_1}{\partial \varphi}(x_0, u_0) = 0$, $A_{12} = \frac{\partial f_1}{\partial \dot{\varphi}} = 1$, $A_{13} = \frac{\partial f_1}{\partial \theta} = 0$

$$A_{21} = \frac{\partial f_2}{\partial \varphi} = \theta_0^2 (\underbrace{\cos^2\varphi_0 - \sin^2\varphi_0}_{\cos 2\varphi_0}) - \cos\varphi_0 \frac{g}{\ell} = \theta_0^2 \cdot \cos(2\varphi_0) - \cos\varphi_0 \frac{g}{\ell} \quad //$$

$$A_{22} = \frac{\partial f_2}{\partial \dot\varphi} = -b^*$$

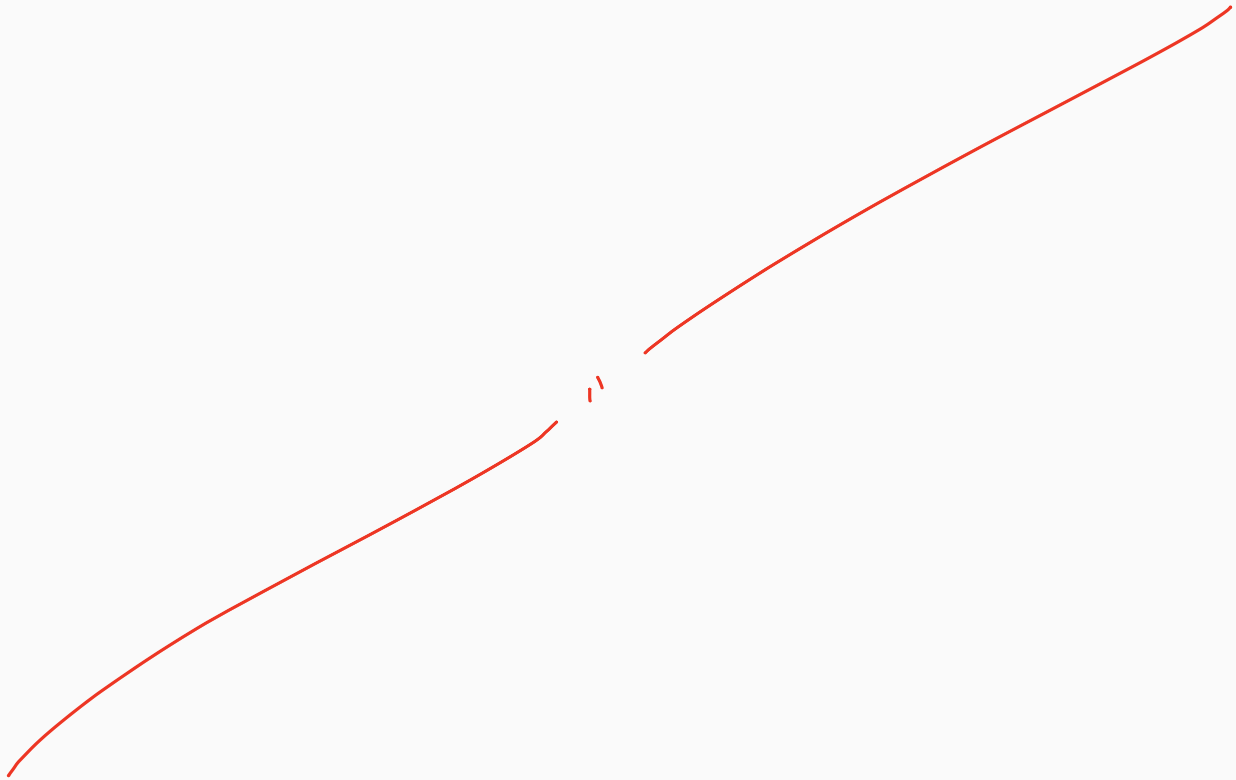
$$f = \begin{pmatrix} \dot\varphi \\ \theta^2 \cos\varphi \sin\varphi - \sin\varphi \frac{g}{\ell} - b^* \dot\varphi \\ k^* \cos\varphi - k_1 \end{pmatrix}$$

$$A_{23} = \frac{\partial f_2}{\partial \theta} = 2\theta_0 \underbrace{\cos\varphi_0 \sin\varphi_0}_{= \sin 2\varphi_0} = \theta_0 \sin(2\varphi_0)$$

$$A_{31} = \frac{\partial f_3}{\partial \varphi} = -k^* \sin\varphi_0 \quad , \quad A_{32} = \frac{\partial f_3}{\partial \dot\varphi} = 0 \quad , \quad A_{33} = \frac{\partial f_3}{\partial \theta} = 0$$

$$\begin{bmatrix} \dot\varphi \\ \ddot\varphi \\ \dot\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \theta_0^2 \cos 2\varphi_0 - \cos\varphi_0 \frac{g}{\ell} & -b^* & \theta_0 \sin 2\varphi_0 \\ -k^* \sin\varphi_0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi \\ \dot\varphi \\ \theta \end{bmatrix}$$

Aufgabe 2.1



Aufgabe 2.1

Aufgabe 2.1

Aufgabe 2.2

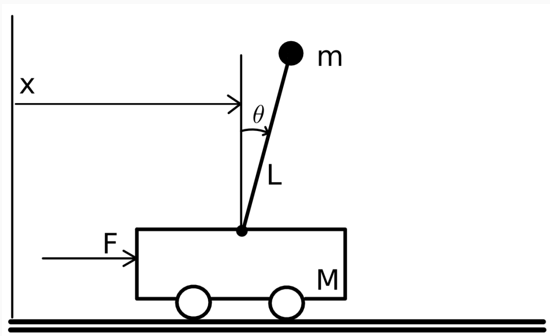


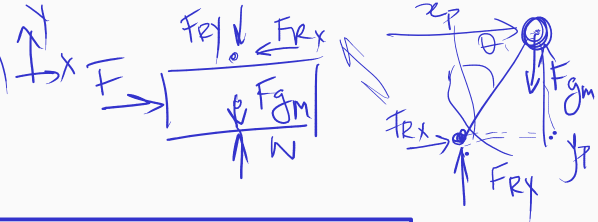
Abbildung 2: System: Umgekehrtes Pendel auf einem Wagen.

- die Kraft $F =$ Eingang;
- keine Reibung zwischen dem Wagen und dem Boden.

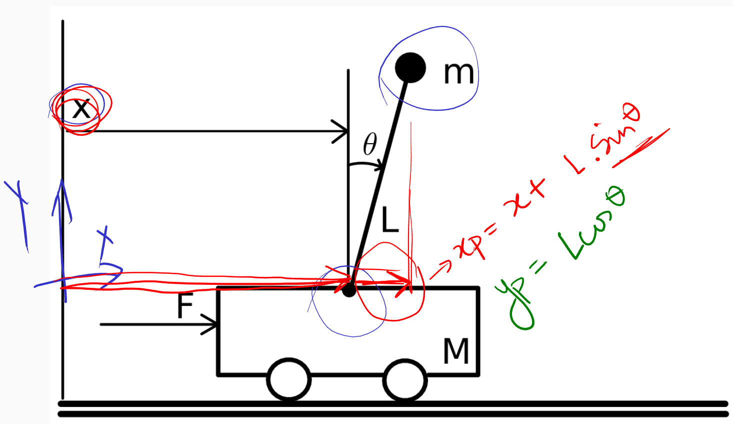
1) Modellierungsziel: Zusammenhang zw. Kraft auf Wagen (F) und

$x(t), \theta(t)$

3) (a-c)



2) Blöcke: 2 Massen



$$\boxed{\begin{aligned} &\text{Newton } x: \quad M\ddot{x} = F - F_{Rx} \\ &\text{Newton } x: \quad m\ddot{x}_p = F_{Rx} \\ &\qquad\quad\; y: \quad m\ddot{y}_p = F_{Ry} - F_{gm} \end{aligned}}$$

Euler θ: $0 = F_{Rx}\cos\theta \cdot L - F_{Ry}\sin\theta \cdot L$

$$\boxed{F_{Rx}\cos\theta = F_{Ry}\sin\theta}$$

$\dot{x}_p = \dot{x} + L\dot{\theta}\cos\theta$ $\quad \ddot{x}_p = \ddot{x} + L(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta)$

$\dot{y}_p = -L\dot{\theta}\sin\theta$ $\quad \ddot{y}_p = -L(-\ddot{\theta}\sin\theta - \dot{\theta}^2\cos\theta)$