

25.02.22,

Victor Cheidde Chaim

=>

Probeklausuraufgaben

WT22-SRT

6. Aufgabenblatt

$$6.5) \quad H(s) = \frac{(2s+1)(3s+2)}{(4s+3)(s-4)}$$

Ja, weil $H(s)$ proper ist. 0,5 Punkt

$$D = bn \rightarrow H(s) = \frac{6s^2 + \dots}{4s^2 + \dots} = \frac{6/4 \cdot s^2 + \dots}{s^2 + \dots} \quad \therefore D = 6/4 = 3/2 \quad 0,5 \text{ Punkt}$$

$$6.6) \quad u(t) = e^{\alpha t} \sin(e^{2t}) \quad , \quad \sin(e^{2t}) \text{ schon beschränkt, } \|\sin(x)\| \leq 1$$

Bedingung: $e^{\alpha t}$ beschränkt \rightarrow genau dann, wenn $\alpha \leq 0$. 1 Punkt6.7) Für alle Pole p der Übertragungsfunktion gilt $\operatorname{Re}(p) < 0$. 1 Punkt6.8) Für keine Werte, da A unabhängig von den Parameterwerten den Eigenwert 1 hat. 1 Punkt

$$\text{EW: } \det(A - \lambda \operatorname{id}) = \det \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = (1-\lambda)(-1-\lambda) = 0 \rightarrow \lambda_1 = 1 \rightarrow \operatorname{Re}(\lambda_1) > 0, \text{ nicht asympt. stabil}$$

$$6.9) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} \gamma & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \alpha$$

ZS ist nicht asympt. stabil: EW: 1, -1.

BIBO-stabil: $\operatorname{Re}(p) < 0$, $p =$ Pole von $H(s) = C(s \operatorname{id} - A)^{-1} B + D$. D spielt keine Rolle bei BIBO Stabilität. Nehmen wir $D=0$ an.

$$(s \operatorname{id} - A) = \begin{bmatrix} s-1 & -\alpha \\ 0 & s+1 \end{bmatrix} \rightarrow (s \operatorname{id} - A)^{-1} = \frac{1}{(s-1)(s+1)} \begin{bmatrix} s+1 & \alpha \\ 0 & s-1 \end{bmatrix} \quad 1 \text{ Punkt}$$

$$H(s) = C(s \operatorname{id} - A)^{-1} B = \begin{bmatrix} \gamma & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{(s-1)(s+1)} \begin{bmatrix} s+1 & \alpha \\ 0 & s-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2\alpha \\ 2(s-1) \end{bmatrix} \frac{1}{(s-1)(s+1)} = \frac{2((s-1) + \gamma\alpha)}{(s-1)(s+1)} \quad 1 \text{ Punkt}$$

BIBO-stabil \rightarrow Zähler = $k(s-1)$, $k \in \mathbb{R} \rightarrow 2((s-1) + \gamma\alpha) = k(s-1)$ (instabil Pol)

$$\begin{cases} 2s = ks & \rightarrow k=2 \\ -2 + 2\gamma\alpha = -k & \rightarrow 2\gamma\alpha = 0 \rightarrow \text{BIBO-stabil genau dann, wenn } \gamma\alpha = 0. \end{cases} \quad 2 \text{ Punkte}$$

Überprüfung: $\gamma\alpha = 0 \rightarrow H(s) = \frac{2(s-1)}{(s-1)(s+1)} = \frac{2}{s+1}$, $p = -1 < 0$ BIBO-stabil

$$6.10) \quad A = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = 0$$

$$i) \quad H(s) = C(s \operatorname{id} - A)^{-1} B + D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} (s \operatorname{id} - A)^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + 0$$

$$(s \operatorname{id} - A) = \begin{bmatrix} s+3 & 0 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix} \rightarrow (s \operatorname{id} - A)^{-1} = \frac{1}{(s+3)(s+1)} \begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ 0 & s+3 \end{bmatrix} \quad 1 \text{ Punkt}$$

$$H(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ 0 & s+3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{1}{(s+3)(s+1)} = \begin{bmatrix} s+1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{1}{(s+3)(s+1)} = \frac{(s+1)}{(s+3)(s+1)} = \frac{1}{s+3} //$$

ii) ja, da $v(\infty) = 1$ und ZS BIBO-stabil.

$$g(t) = v(t) C e^{At} B = v(t) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-3t} & 0 \\ 0 & e^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = v(t) e^{-3t}$$

1 Punkt

$$\psi(\infty, 0, v) = \lim_{t \rightarrow \infty} (g_{xv})(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} v(t) \int_0^t e^{-3z} dz = \lim_{t \rightarrow \infty} v(t) \left(\frac{e^{-3z}}{-3} \right) \Big|_0^t = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1 - e^{-3t}}{3} = \frac{1}{3} //$$

(oder einfacher: $\psi(\infty, 0, v) = H(0) \cdot v(\infty) = \left(\frac{1}{0+3} \right) \cdot 1 = \frac{1}{3}$)

iii) $u(t) = \sin(3t)$, $x = e^{3it}$ ($u(t) = \text{Im}(e^{3it})$)

Bedingung: EW(A) $\neq \lambda$, wobei $u(t) = e^{\lambda t} u_0$; EW(A) = -3, -1 $\neq 3i$ ($= \lambda$) ✓ erfüllt

1 Punkt

$$y(t) = \text{Im}(\tilde{y}(t)) \quad (\text{Satz 7.3}), \quad \tilde{y}(t) = H(\lambda) \cdot u(t) = H(3i) e^{3it}$$

$$H(3i) = \frac{1}{3i+3} = \frac{3i-3}{(3i+3)(3i-3)} = \frac{3i-3}{9i^2-9} = \frac{3i-3}{-9-9} = \frac{3i-3}{-18} = -\frac{1}{6}(i-1) = \frac{1}{6}(1-i)$$

$e^{xi} = \cos x + i \sin x$
 $\frac{1}{2}i \quad (e^{\frac{1}{2}i} = \cos \frac{1}{2} + i \sin \frac{1}{2} = i)$

1 Punkt

$$\tilde{y}(t) = \frac{1}{6}(1-i) e^{3it} = \frac{1}{6} \left(e^{3it} - i e^{3it} \right)$$

$\sin(\theta + \frac{\pi}{2}) = \cos(\theta)$

$$y(t) = \text{Im}(\tilde{y}(t)) = \frac{1}{6} (\sin(3t) - \cos(3t)) \quad 1 \text{ Punkt}$$

//