

⇒ Probeklausuraufgaben
WT22-SRT

5. Aufgabenblatt

5.4) Alle Zustandssignale des Zustandssystem haben dasselbe Stabilitätsverhalten. (6.2 Satz, Seite 504, Vorlesung 5) 1 Punkt

5.5) $\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(t) = 0$, $\Phi(t)$: Hauptfundamentalmatrix von Zustandssystem zur Anfangszeit 0. 1 Punkt

(6.5 Satz (ii), Seite 506, Vorlesung 5)

5.6) Das Polynom $p(s)$ ist Hurwitz, wenn c_1 und c_2 größer als 0 sind, da $c_0 = 1$ positiv ist. Das ist eine hinreichende Bedingung, weil $p(s)$ von 2. Ordnung ($n=2$) ist. 1 Punkt

5.7) $p(s) = s^4 + 2s^3 + s^2 + s + (k-1)$

1. Bedingung: $(k-1) > 0$, da $c_4, c_3, c_2, c_1 > 0$. (Alle Koeffizienten mit demselben Vorzeichen.)
 $k-1 > 0 \iff k > 1$ 1 Punkt

2. Bedingung: Hauptabschnittsdeterminante von $H > 0$.

$c_0 = (k-1), c_1 = 1, c_2 = 1, c_3 = 2, c_4 = 1$.

$$H = \begin{bmatrix} c_1 & c_3 & c_5 & c_7 \\ c_0 & c_2 & c_4 & c_6 \\ 0 & c_1 & c_3 & c_5 \\ 0 & c_0 & c_2 & c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ k-1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & k-1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$
 1 Punkt

$D_1 = 1 > 0$ ok ✓

$D_2 = 1 - 2(k-1) = 1 - 2k + 2 = 3 - 2k > 0 \iff k < 3/2$ ✓

$D_3 = 1 \cdot 1 \cdot 2 - 1 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot 2 \cdot (k-1) = 2 - 1 - 4k + 4 = 5 - 4k > 0 \iff k < 5/4$ ✓

$D_4 = 1 \cdot (-1)^{4+4} \cdot D_3 = D_3$ ✓

1. Bedingung

$p(s)$ ist Hurwitz, wenn $1 < k < 5/4$. 1 Punkt

2. Bedingung

5.8) $u(t) = e^{\alpha t} \sin(e^{2t})$: $\|u(t)\| = \|e^{\alpha t} \sin(e^{2t})\| \leq \|e^{\alpha t}\| \cdot 1$, weil $\|\sin(\cdot)\| \leq 1$.

wenn $\alpha < 0$: $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\alpha t} \sin(e^{2t}) \leq \lim_{t \rightarrow \infty} e^{\alpha t} = 0$, $u(\infty) = 0$, wenn $\alpha < 0$

1 Punkt

$$5.9) \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}, \quad A = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ -3 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \ 1 \ 0], \quad D = 0.$$

i) Eigenwerte von A: $(\det(A - \lambda I) = 0) \det \begin{pmatrix} -4-\lambda & 0 & 0 \\ 3 & -2-\lambda & 1 \\ -3 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix} = (-4-\lambda)(-2-\lambda)(-1-\lambda) = 0$ 1 Punkt

$\lambda_1 = -4, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = -1 \rightarrow$ Das Zustandssystem ist asymptotisch stabil, da für alle Eigenwerte λ von A $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$ gilt. (6.5 Satz (iii), Seite 507, Vorlesung 5)

ii) Stationäre Endwerte: $\varphi(\infty, x_0, u) = -A^{-1} B \cdot u(\infty)$ 1 Punkt

$u(\infty): u(t) = 1 - \frac{1}{1+t^2}, \quad u(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} 1 - \frac{1}{1+t^2} = \lim_{t \rightarrow \infty} 1 - \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{1+t^2} = 1$

$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}, \quad c_{11}, c_{12}, \dots$ Kofaktoren: $c_{11} = 2, c_{12} = 0, c_{13} = -6$
 $c_{21} = 0, c_{22} = 4, c_{23} = 0$
 $c_{31} = 0, c_{32} = 4, c_{33} = 8$

$\det(A) = (-4)(-2)(-1) = -8 \quad \therefore \quad A^{-1} = -\frac{1}{8} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 \\ -6 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ 2 Punkte

$\varphi(\infty, x_0, u) = -A^{-1} B u(\infty) = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 \\ -6 & 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ 2 Punkte