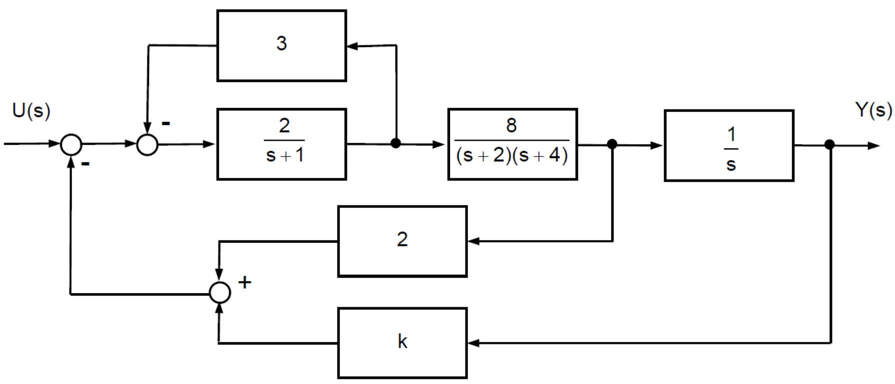
F. Goßmann M.Sc
Universität der Bundeswehr München
Institut für Steuer- und Regelungstechnik (LRT-15)

Steuer- und Regelungstechnik, WT 2021

Übung 8 - Lösung

Thema: Stabilität von Systemen, Sprungantworten, stationäre Genauigkeit

Aufgabe 1. Stabilität
Gegeben ist folgendes Blockschaltbild:



Aufgaben

a) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $G_{yu} = \frac{Y(s)}{U(s)}$ in Abhängigkeit des Parameters k

b) Ermitteln Sie mit Hilfe des Hurwitz-Kriteriums den Bereich $[k_{min}; k_{max}]$ von k, für den das System asymptotisch stabil ist.

c) Bestimmen Sie den stationären Endwert y_∞ für den Fall $u(t) = 1(t)$ und $k = \frac{k_{max}}{4}$. Was lässt sich für den Fall $k = 2k_{max}$ bezüglich y_∞ aussagen?

Lösung Aufgabe 1.

a) Durch geschicktes Verschieben eines Verzweigungspunktes sowie Zusammenfassen der Rückkopplung im Vorwärtszweig ergibt sich

$$Y(s) = \frac{\frac{2}{s+1}}{1 + 3\frac{2}{s+1}} \cdot \frac{8}{(s+2)(s+4)} \cdot \frac{1}{s} \cdot [U(s) - 2sY(s) - kY(s)]\ .$$

Durch Umformung ergibt sich dann die gesuchte Übertragungsfunktion

$$
\begin{aligned}
Y(s) &= \frac{1}{s} \cdot \frac{8}{(s+2)(s+4)} \cdot \frac{2}{s+1+6} \cdot \frac{1}{s} \cdot [U(s) - (2s+k)Y(s)] \\
\Leftrightarrow s(s+2)(s+4)(s+7)Y(s) &= 16 \cdot [U(s) - (2s+k)Y(s)] \\
\Leftrightarrow [s(s+2)(s+4)(s+7) + 16(2s+k)] \cdot Y(s) &= 16 \cdot Y(s) \\
\Leftrightarrow Y(s) &= \underbrace{\frac{16}{s(s+2)(s+4)(s+7) + 16(2s+k)}}_{G(s)} \cdot U(s) \, .
\end{aligned}
$$

b) Zur Bestimmung des Bereiches von k, für den das System stabil ist, wird das Nennerpolynom $N(s)$

$$
\begin{aligned}
N(s) &= s(s+2)(s+4)(s+7) + 16(2s+k) \\
&= \underbrace{1}_{a_4} \cdot s^4 + \underbrace{13}_{a_3} \cdot s^3 + \underbrace{50}_{a_2} \cdot s^2 + \underbrace{88}_{a_1} \cdot s + \underbrace{16k}_{a_0}
\end{aligned}
$$

betrachtet. Nach Hurwitz ist die Übertragungsfunktion dann stabil, wenn alle Koeffizenten von $N(s)$ vorhanden sind und das gleiche Vorzeichen besitzen. Die Koeffizienten $a_4 - a_1$ sind alle vorhanden und positiv. Somit muss für Stabilität

$$
\begin{aligned}
16k &> 0 \\
k &> 0
\end{aligned}
$$

gelten. Zusätzlich müssen noch die Determinanten der drei Hurwitz-Matrizen

$$
\begin{aligned}
H_1 &= a_3 \\
H_2 &= \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ a_4 & a_2 \end{vmatrix} \\
H_2 &= \begin{vmatrix} a_3 & a_1 & 0 \\ a_4 & a_2 & a_0 \\ 0 & a_3 & a_1 \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

betrachtet werden. Für die Determinante von H_1 gilt $a_3 = 13$, somit ist diese unabhängig von k positiv. Für die Determinante von H_2 ergibt sich

$$
\begin{aligned}
\det H_2 &= \det \begin{vmatrix} 13 & 88 \\ 1 & 50 \end{vmatrix} \\
&= 13 \cdot 88 - 1 \cdot 88 \\
&= 562 \, .
\end{aligned}
$$

Diese Determiante ist auch unabhängig von k positiv, somit ergibt sich auch hieraus keine weitere Bedingungen. Abschließend wird noch die Determinante von H_3 geprüft

$$\begin{aligned}
\det H_3 &= \det \begin{vmatrix} 13 & 88 & 0 \\ 1 & 50 & 16k \\ 0 & 13 & 88 \end{vmatrix} \\
&= 13 \cdot 50 \cdot 88 - 88^2 - 13^2 \cdot 16k \\
&= 49456 - 2704k \,.
\end{aligned}$$

Durch diese Determinante ergibt sich eine zusätzliche Bedingung für k, da

$$\begin{aligned}
&49456 - 2704k > 0 \\
\Leftrightarrow\, &49456 > 2704k \\
\Leftrightarrow\, &18.2899 > k
\end{aligned}$$

gelten muss. Somit ergibt sich für k der folgende Bereich

$$0 < k < 18.2899 \,,$$

in dem die Übertragungsfunktion stabil ist.

c) Es gilt für $u(t) = 1(t)$, es wird also der stationäre Endwert der Sprunganwort betrachtet. Im Laplace-Bereich entspricht der Einheitssprung einem $U(s) = \frac{1}{s}$. Somit gilt für den stationären Endwert

$$\begin{aligned}
y_\infty &= \lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} s \cdot Y(s) \\
&= \lim_{s\to 0} \cancel{s} \cdot G(s) \cdot \frac{1}{\cancel{s}} \\
&= \lim_{s\to 0} G(s)
\end{aligned}$$

Setzt man die Übertragungsfunktion $G(s)$ aus der Aufgabe a) ein ergibt sich

$$\begin{aligned}
y_\infty &= \lim_{s\to 0} \frac{16}{s(s+2)(s+4)(s+7) + 16(2s+k)} \\
&= \frac{16}{16k} \\
&= \frac{1}{k}
\end{aligned}$$

Somit ergibt sich der stationäre Endwert für den Fall $k = \frac{4}{k_{\max}}$ zu

$$y_\infty = \frac{4}{k_{\max}} = \frac{4}{18.2899} \approx 0.219 \,.$$

Für den Fall $k = 2k_{\max}$ würde sich nach dem ermittelten Ausdruck in Abhängigkeit von k ebenfalls ein stationärer Endwert ergeben. Jedoch ist die Übertragungsfunktion in diesem Fall instabil, somit existiert in diesem Fall auch kein stationärer Endwert, da der Zusammenhang zwischen stationärem Endwert im Zeit und Laplace-Bereich nur für stabile Systeme gilt.

Aufgabe 2. Sprungantwort eines Systems
Gegeben ist die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{2}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}\,.$$

Zusätzlich wurde eine der Lösungen der charakteristischen Gleichung zu

$$s_1 = -1$$

bestimmt.

Aufgaben

a) Ermitteln Sie die Sprungantwort des Systems und transformieren Sie diese in den Zeitbereich.

b) Berechnen sie den stationären Endwert der in a) ermittelten Sprungantwort.

c) Betrachten Sie für die Übertragungsfunktion des Systems einen Standardregelkreis mit einem P-Regler $G_R(s) = K_R$. Ermitteln Sie die Sprungantwort des geschlossenen Regelkreises.

d) Berechnen Sie den stationären Endwert des geschlossenen Regelkreises in Abhängigkeit von K_R und bewerten Sie das Ergebnis im Hinblick auf die stationäre Genauigkeit eines Regelkreises.

Lösung Aufgabe 2.

a) Ermittelt werden kann die Sprungantwort, indem das System mit einem Einheitssprung $u(t) = 1(t)$ beaufschlagt wird. Die Laplace Transformierte des Einheitssprunges beträgt

$$U(s) = \frac{1}{s}\,.$$

Die Übertragungsfunktion $G(s)$ wurde in der Aufgabenstellung mit

$$G(s) = \frac{2}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$$

angegeben. Die Sprungantwort $H(s)$ für diesen Fall ergibt sich dann zu

$$H(s) = \frac{2}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6} \cdot \underbrace{\frac{1}{s}}_{U(s)} = \frac{2}{(s+1)(s+2)(s+3)s}\,.$$

Für die Berechnung der Nullstellen sei auf Mitschriften der Übung verwiesen. Gesucht ist die Sprungantwort $h(t)$ im Zeitbereich, weshalb dieser Ausdruck nun noch in den Zeitbereich zurück transformiert werden muss. Da $H(s)$ in dieser Form keine Entsprechung in der Korrespondenz-Tafel hat, muss der Term durch eine Partialbruchzerlegung zunächst in bekannte Korrespondenzen zerlegt werden. Es bietet sich hier die folgende Zerlegung an

$$\frac{2}{(s+1)(s+2)(s+3)s} = \underbrace{\frac{A}{s}}_{\text{Nr.1}} + \underbrace{\frac{B}{s+1}}_{\text{Nr.3}} + \underbrace{\frac{C}{s+2}}_{\text{Nr.3}} + \underbrace{\frac{D}{s+3}}_{\text{Nr.3}} \,.$$

Für den Koeffizientenvergleich wird der rechte Teil auf den gleichen Nenner gebracht

$$\frac{A(s+1)(s+2)(s+3) + Bs(s+2)(s+3) + Cs(s+1)(s+3) + Ds(s+1)(s+2)}{(s+1)(s+2)(s+3)s}$$

und die beiden Zähler miteinander verglichen

$$2 = A(s+1)(s+2)(s+3) + Bs(s+2)(s+3) + Cs(s+1)(s+3) + Ds(s+1)(s+2)\,.$$

Durch gezieltes Auswerten des Zählers an bestimmten Punkten ergeben sich die Koeffizienten zu

$$\begin{aligned}
s = 0 \rightarrow 2 &= A(1 \cdot 2 \cdot 3)\\
\Leftrightarrow 2 &= 6A\\
\Leftrightarrow A &= \frac{1}{3}\,,\\[1ex]
s = -1 \rightarrow 2 &= B(-1)(-1+2)(-1+3)\\
\Leftrightarrow 2 &= -2B\\
\Leftrightarrow B &= -1\,,\\[1ex]
s = -2 \rightarrow 2 &= C(-2)(-2+1)(-2+3)\\
\Leftrightarrow 2 &= 2C\\
\Leftrightarrow C &= 1\,,\\[1ex]
s = -3 \rightarrow 2 &= D(-3)(-3+1)(-3+2)\\
\Leftrightarrow 2 &= -6D\\
\Leftrightarrow D &= -\frac{1}{3}\,.
\end{aligned}$$

Somit ergibt sich für die Sprungantwort

$$H(s) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{s+3}\,.$$

Diese lässt sich mit Hilfe der Laplace-Korrespondenztafel direkt zurück transformieren, sodass sich

$$h(t) = \frac{1}{3}\mathrm{e}^{-t} + \mathrm{e}^{-2t} - \frac{1}{3}\mathrm{e}^{-3t}$$

als Lösung im Zeitbereich ergibt.

b) Der stationäre Endwert kann durch Anwenden des Endwertsatzes direkt zu

$$\begin{aligned} h_\infty &= \lim_{t\to\infty} h(t) \\ &= \lim_{s\to 0} s \cdot H(s) = \lim_{s\to 0} s \cdot G(s) \cdot \frac{1}{s} \\ &= \lim_{s\to 0} \frac{2}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6} \\ &= \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

berechnet werden.

c) Es wird ein Standardregelkreis mit einem P-Regler $G_R(s) = K_R$ betrachtet. Es ergibt sich zusammen mit der Übertragungsfunktion aus der Aufgabestellung

$$\begin{aligned} G_v(s) = K_R \cdot \frac{2}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6} \\ G_r(s) = 1 \end{aligned}$$

Nach der Regel für das Zusammenfassen der Rückkopplung (negative Rückkopplung – Standardregelkreis) der Nenner der Gesamtübertragungsfunktion zu

$$\begin{aligned} 1 + G_0(s) &= 1 + K_R \cdot \frac{2}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6} \\ &= \frac{s^3 + 6s^2 + 11s + 6 + 2K_R}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}, \end{aligned}$$

und die Gesamtübertragungsfunktion zu

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{G_0(s)}{1 + G_0(s)} \\ &= \frac{2K_R}{\cancel{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}} \cdot \frac{\cancel{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6 + 2K_R} \\ &= \frac{2K_R}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6 + 2K_R}. \end{aligned}$$

Die Sprungantwort ergibt sich dann direkt zu

$$\begin{aligned} H(s) &= G(s) \cdot \frac{1}{s} \\ &= \frac{2K_R}{s(s^3 + 6s^2 + 11s + 6 + 2K_R)} \end{aligned}$$

d) Der stationäre Endwert der Sprungantwort kann dann analog zur Aufgabe b) direkt mit dem Endwertsatz ermittelt werden

$$
\begin{aligned}
h_\infty &= \lim_{s\to 0} s \cdot H(s) \\
&= \lim_{s\to 0} s \cdot \frac{2K_R}{s(s^3+6s^2+11s+6+2K_R)} \\
&= \lim_{s\to 0} \frac{2K_R}{s^3+6s^2+11s+6+2K_R} \\
&= \frac{2K_R}{6+2K_R} \\
&= \frac{K_R}{3+K_R}\,.
\end{aligned}
$$

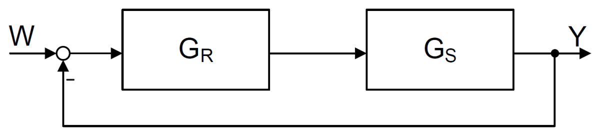
Da der vorgegebene Sollwert bei einer Sprungantwort 1 ist, kann in diesem Fall eine stationäre Genauigkeit ($y_{soll} = y, e = 0$) nur mit einer unendlich großen Verstärkung K_R erreicht werden. Da dies technisch nicht realisierbar ist, ist mit einem P-Regler in diesem Fall eine stationäre Genauigkeit nicht erreichbar.

Aufgabe 3. Stationäre Genauigkeit

Gegeben ist ein IT_1-System mit der Übertragungsfunktion

$$G_S(s) = \frac{1}{s(s+1)}\,.$$

Es wird ein Standardregelkreis der Form



betrachtet, wobei als Regler ein P-Regler $G_R(s) = K_R$ eingesetzt wird.

Aufgabe Berechnen Sie die Übertragungsfunktion des geschlossenen Regelkreises und den stationären Endwert der Sprungantwort. Welche Aussage lässt sich aufgrund des Ergebnisses im Hinblick auf die stationäre Genauigkeit treffen?

Lösung Aufgabe 3.

Zunächst muss die Übertragungsfunktion des geschlossenen Regelkreises bestimmt werden. Da es sich um einen Standardregelkreis handelt, gilt

$$
\begin{aligned}
G_v(s) &= G_R(s) \cdot G_S(s) \\
G_r(s) &= 1\,.
\end{aligned}
$$

Daraus folgt, dass $G_0(s) = G_v(s)$ gilt und somit

$$G(s) = \frac{G_0(s)}{1+G_0(s)}\,.$$

Als erstes wird der Nenner der Gesamtübertragungsfunktion berechnet

$$\begin{aligned}1 + G_0(s) &= 1 + \frac{K_R}{s(s+1)} \\ &= \frac{s(s+1) + K_R}{s(s+1)}\,.\end{aligned}$$

Damit ergibt sich dann die gesamte Übertragungsfunktion zu

$$\begin{aligned}G(s) &= \frac{K_R}{\cancel{s(s+1)}} \cdot \frac{\cancel{s(s+1)}}{s(s+1) + K_R} \\ &= \frac{K_R}{s(s+1) + K_R}\,.\end{aligned}$$

Anschließend wird noch der stationäre Endwert der Sprungantwort berechnet. Für die Sprungantwort gilt

$$H(s) = G(s) \cdot \frac{1}{s}\,.$$

Für den stationären Endwert der Sprungantwort ergibt sich dann

$$\begin{aligned}h_\infty &= \lim_{s\to 0} s \cdot H(s) \\ &= \lim_{s\to 0} s \cdot G(s) \cdot \frac{1}{s} \\ &= \lim_{s\to 0} \frac{K_R}{s(s+1) + K_R} = 1\,.\end{aligned}$$

Es zeigt sich, dass dieser Regelkreis trotz der Verwendung eines P-Reglers stationär genau ist. Dies ist mit der Stuktur der Regelstrecke begründet, da in dieser bereits ein freies I-Glied vorhanden ist.