F. Goßmann M.Sc
Universität der Bundeswehr München
Institut für Steuer- und Regelungstechnik (LRT-15)

Steuer- und Regelungstechnik, WT 2021

# Übung 7 - Lösung

Thema: Stabilität von Systemen, Künstliche Stabilisierung

**Aufgabe 1. Stabilität**
Gegeben ist das Zustandssystem

$$\begin{aligned}\dot{x} &= A \cdot x + B \cdot u \\ y &= C \cdot x\end{aligned}$$

mit den Matrizen

$$\begin{aligned}A &= \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ C &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

**Aufgabe** Zeigen Sie, dass das gegebene Zustandssystem asymptotisch stabil ist.

**Lösung Aufgabe 1.** Nach der Vorlesung ist ein System genau dann asymptotisch stabil, wenn alle Eigenwerte von $A$ einen negativen Realteil besitzen. Es gilt also, die Eigenwerte von $A$ zu berechnen. Mit Hilfe der Regel von Sarrus ergibt sich:

$$\begin{aligned}&\begin{pmatrix} \lambda+4 & 0 & 0 \\ -3 & \lambda+2 & -1 \\ 3 & 0 & \lambda+1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \lambda+4 & 0 \\ -3 & \lambda+2 \\ 3 & 0 \end{matrix} \\ &= (\lambda+4)(\lambda+2)(\lambda+1)\,, \\ &\Rightarrow \lambda_1 = -4,\ \lambda_2 = -2,\ \lambda_3 = -1\end{aligned}$$

Alle Eigenwerte von $A$ besitzen also einen negativen Realteil. Das System ist demnach asymptotisch stabil.

**Aufgabe 2. Stabilität von Übertragungsfunktionen**

Gegeben sind die beiden Übertragungsfunktionen

$$G_1(s) = \frac{1}{s^2 + 5s + 6},$$
$$G_2(s) = \frac{1}{s^2 + s - 6}.$$

**Aufgaben**

a) Berechnen Sie die Polstellen der beiden Übertragungsfunktionen.

b) Betrachten Sie beide Übertragungsfunktionen jeweils in einem Standardregelkreis mit einem P-Regler $G_R(s) = K_R$. Bestimmen Sie jeweils die Übertragungsfunktion des geschlossenen Regelkreises und deren Polstellen in Abhängigkeit von $K_R$.

c) Beschreiben Sie jeweils den Einfluss der Reglerverstärkung $K_R$ auf die Lage der Polstellen und die Stabilität des geschlossenen Regelkreises.

**Lösung Aufgabe 2.**

a) Für die erste Übertragungsfunktion $G_1(s)$ ergeben sich die Polstellen zu

$$\begin{aligned} s &= -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - 6} \\ &= -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - \frac{24}{4}} \\ &= -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}} \\ \Leftrightarrow s &= -2 \vee s = -3\,. \end{aligned}$$

Die Übertragungsfunktion hat also zwei Polstellen mit negativen Realteilen und ist daher stabil.

Für die zweite Übertragungsfunktion $G_2(s)$ ergeben sich analog die Polstellen zu

$$\begin{aligned} s &= -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 6} \\ &= -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{24}{4}} \\ &= -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}} \\ &= -\frac{1}{2} \pm \frac{5}{2} \\ \Leftrightarrow s &= 2 \vee s = -3\,. \end{aligned}$$

In diesem Fall ergibt sich eine Polstelle mit einem positiven Realteil, somit ist diese Übertragungsfunktion instabil.

b) Es wird in beiden Fällen der Standardregelkreis mit einem P-Regler $G_R(s) = K_R$ betrachtet.

Daher ergibt sich für die Zusammenfassung der Rückkopplung

$$\begin{aligned} G_v &= K_R \cdot G(s)\,, \\ G_r &= 1\,, \end{aligned}$$

und somit gilt $G_0 = G_v$, da im Pfad der Rückkopplung keine Übertragungsfunktion vorliegt ($G_r = 1$). Somit gilt für die Gesamtübertragungsfunktion

$$G = \frac{G_0}{1 + G_0}\,.$$

Für die erste Übertragungsfunktion ergibt sich somit

$$G_v = G_0 = \frac{K_R}{s^2 + 5s + 6}\,.$$

Die Berechnung des Nenners ergibt dann

$$1 + G_0 = 1 + \frac{K_R}{s^2 + 5s + 6} = \frac{s^2 + 5s + 6 + K_R}{s^2 + 5s + 6}\,.$$

Für die Gesamtübertragungsfunktion ergibt sich somit

$$\begin{aligned} G &= \frac{\cancel{s^2 + 5s + 6}}{s^2 + 5s + 6 + K_R} \cdot \frac{K_R}{\cancel{s^2 + 5s + 6}} \\ &= \frac{K_R}{s^2 + 5s + 6 + K_R}\,. \end{aligned}$$

Für die Polstellen des geschlossenen Regelkreises gilt in diesem Fall

$$\begin{aligned} s &= -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - 6 - K_R} \\ &= -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - \frac{24 - 4K_R}{4}} \\ &= -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{1 - 4K_R}{4}} \\ &= \frac{-5 \pm \sqrt{1 - 4K_R}}{2}\,. \end{aligned}$$

Für die zweite Übertragungsfunktion gilt analog

$$G_v = G_0 = \frac{K_R}{s^2 + s - 6}\,.$$

Somit ergibt sich der Nenner der Gesamtübertragungsfunktion zu

$$1 + G_0 = 1 + \frac{K_R}{s^2 + s - 6} = \frac{s^2 + s - 6 + K_R}{s^2 + s - 6}\,,$$

und die gesuchte Übertragungsfunktion zu

$$
\begin{aligned}
G &= \frac{\cancel{s^2+s-6}}{s^2+s-6+K_R} \cdot \frac{K_R}{\cancel{s^2+s-6}} \\
&= \frac{K_R}{s^2+s-6+K_R} \,.
\end{aligned}
$$

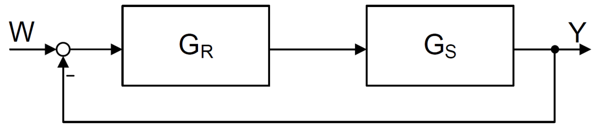
Die Polstellen des geschlossenen Regelkreises ergeben sich zu

$$
\begin{aligned}
s &= -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 6 - K_R} \\
&= -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{24-4K_R}{4}} \\
&= -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{25-4K_R}{4}} \\
&= -\frac{1 \pm \sqrt{25-4K_R}}{2} \,.
\end{aligned}
$$

Durch das $K_R$ kann in diesem Fall beispielsweise erreicht werden, dass die Polstelle mit dem positiven Realteil in den negativen Bereich verschoben und der geschlossene Regelkreis somit stabilisiert wird (künstliche Stabilisierung).

c) Siehe Übungsfolien

**Aufgabe 3. Algebraische Stabilitätskriterien**
Gegeben ist das folgende System in Blockschaltbild-Form




mit den beiden Übertragungsfunktionen $G_R(s)$ und $G_S(s)$. Für die Streckenübertragungsfunktion $G_S(s)$ sind die beiden Übertragungsfunktionen gegeben

$$\begin{aligned} G_S(s) &= \frac{10}{(s+1)(s+2)(s+3)}\,, \\ G_S(s) &= \frac{10\cdot(s+5)}{(s+1)(s+2)(s+3)}\,. \end{aligned}$$

**Aufgabe** Schließen Sie den Regelkreis in beiden Fällen mit einen P-Regler $G_R(s) = K_R$ und überprüfen Sie für mit dem Hurwitz-Kriterium, für welche $K_R$ der Regelkreis stabil ist.

**Lösung Aufgabe 3.**

(i) Zunächst wird die erste Übertragungsfunktion

$$G_S(s) = \frac{10}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

betrachtet. Laut Aufgabenstellung wird ein Standardregelkreis mit einem P-Regler $G_R(s) = K_R$ betrachtet. Somit ergibt sich für die beiden Teile der Rückkopplung

$$\begin{aligned} G_v(s) &= \frac{10K_R}{(s+1)(s+2)(s+3)}\,, \\ G_r(s) &= 1\,. \end{aligned}$$

Da im Rückkopplungspfad keine Übertragungsfunktion vorhanden ist, gilt $G_v(s) = G_0(s)$ und somit für die Übertragungsfunktion des geschlossenen Regelkreises

$$G(s) = \frac{G_0(s)}{1+G_0(s)}\,.$$

Für den Nenner ergibt sich

$$1 + G_0(s) = 1 + \frac{10K_R}{(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{(s+1)(s+2)(s+3) + 10K_R}{(s+1)(s+2)(s+3)}\,.$$

Somit ergibt sich für $G(s)$

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{\cancel{(s+1)(s+2)(s+3)}}{(s+1)(s+2)(s+3)+10K_R} \cdot \frac{10K_R}{\cancel{(s+1)(s+2)(s+3)}} \\ &= \frac{10K_R}{(s+1)(s+2)(s+3)+10K_R} \\ &= \frac{10K_R}{s^3+6s^2+11s+(6+10K_R)}\,. \end{aligned}$$

Um einen Bereich für $K_R$ zu bestimmen, in dem der geschlossene Regelkreis stabil ist, wird nun das Hurwitz-Kriterium verwendet. Dafür wird das Nennerpolynom $N(s)$

$$N(s) = \underbrace{1}_{a_3} \cdot s^3 + \underbrace{6}_{a_2} \cdot s^2 + \underbrace{11}_{a_1} \cdot s + \underbrace{(6+10K_R)}_{a_0} \tag{1}$$

betrachtet. Nach der notwendingen Bedingung für Stabilität müssen alle Koeffizienten $a_i$ für $i = 0, \ldots, n$ in (1) vorhanden sein und das gleiche Vorzeichen besitzen. Die Koeffizenten $a_3 - a_1$ sind vorhanden und positiv, somit ergibt sich mit

$$\begin{aligned} 6 + 10K_R &> 0 \\ \Leftrightarrow K_R &> -0.6 \end{aligned}$$

eine erste Bedingung an $K_R$. Zusätzlich müssen für die hinreichende Bedingung für Stabilität nach Hurwitz noch die Determinanten der beiden Hurwitz-Matrizen

$$\begin{aligned} H_1 &= a_2 \\ H_2 &= \begin{vmatrix} a_2 & a_0 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

geprüft werden. Die Matrix $H_1$ ist unabhängig von $K_R$ und deren Determinante beträgt $a_2 = 6$ und ist somit positiv. Betrachten von $H_2$ ergibt

$$\begin{aligned} \det H_2 &= \det \begin{vmatrix} 6 & 6+10K_R \\ 1 & 11 \end{vmatrix} \\ &= 60 - 10K_R\,. \end{aligned}$$

Für Stabilität muss die Determinante von $H_2$ positiv sein, somit ergibt sich

$$\begin{aligned} 60 - 10K_R &> 0 \\ \Leftrightarrow 6 &> K_R\,. \end{aligned}$$

Somit ist der geschlossene Regelkreis nur genau dann stabil, wenn für $K_R$ ein Wert im Bereich

$$-0.6 < K_R < 6$$

gewählt wird.

(ii) Jetzt wird die Übertragungsfunktion

$$G_S(s) = \frac{10 \cdot (s+5)}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

betrachtet. Analog zur vorherigen Aufgabe wird ein Standardregelkreis mit einem P-Regler betrachtet, somit gilt

$$\begin{aligned} G_v(s) &= \frac{10K_R(s+5)}{(s+1)(s+2)(s+3)}\,, \\ G_r(s) &= 1\,, \end{aligned}$$

und da $G_r = 1$ ist gilt hier ebenfalls $G_v = G_0$ und somit

$$G(s) = \frac{G_0(s)}{1+G_0(s)}\,.$$

Daraus folgt für den Nenner der Übertragungsfunktion

$$1 + G_0(s) = 1 + \frac{10K_R(s+5)}{(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{(s+1)(s+2)(s+3) + 10K_R(s+5)}{(s+1)(s+2)(s+3)}\,.$$

Daraus folgt für die vollständige Übertragungsfunktion des geschlossenen Regelkreises

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{\cancel{(s+1)(s+2)(s+3)}}{(s+1)(s+2)(s+3) + 10K_R(s+5)} \cdot \frac{10K_R(s+5)}{\cancel{(s+1)(s+2)(s+3)}} \\ &= \frac{10K_R(s+5)}{(s+1)(s+2)(s+3) + 10K_R(s+5)} \\ &= \frac{10K_R(s+5)}{s^3 + 6s^2 + (11+10K_R)\,s + (6+50K_R)}\,. \end{aligned}$$

Durch die zusätzliche Nullstelle $s = -5$ in der Regelstrecke wirkt das $K_R$ in diesem Fall auf zwei Koeffizienten im Nennerpolynom des geschlossenen Regelkreises.

Um den Bereich für $K_4$ festzulegen, für den der geschlossene Regelkreis stabil ist, wird wieder das Hurwitz-Kriterium verwendet. Für das Nennerpolynom $N(s)$ gilt

$$N(s) = \underbrace{1}_{a_3} \cdot s^3 + \underbrace{6}_{a_2} \cdot s^2 + \underbrace{(11+10K_R)}_{a_1} \cdot s + \underbrace{(6+50K_R)}_{a_0} \tag{2}$$

Damit der geschlossene Regelkreis stabil ist, müssen alle Koeffizienten $a_i$ für $i = 0, \ldots, n$ in (2) vorhanden sein und das gleiche Vorzeichen besitzen. Die beiden Koeffizienten $a_3$ und $a_2$ sind vorhanden und positiv, somit muss für die verbleibenden Koeffzienten

$$\begin{aligned} a_1 &= 11 + 10K_R > 0\,, \\ a_0 &= 6 + 50K_R\,, \end{aligned}$$

gelten. Daraus folgt

$$
\begin{aligned}
K_R &> -1.1\,, \\
K_R &> -0.12\,.
\end{aligned}
$$

Für Stabilität müssten beide Bedinungen erfüllt sein, somit ist der geschlossene Regelkreis nur für $K_R > -0.12$ stabil. Zusätzlich müssen noch die Determinanten der Hurwitz-Matrizen

$$
\begin{aligned}
H_1 &= a_2 \\
H_2 &= \begin{vmatrix} a_2 & a_0 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

geprüft werden. Für die Determinante von $H_1$ gilt $a_2 = 6$ und somit unabhängig von $K_R$ positiv. Für $H_2$ ergibt sich

$$
\begin{aligned}
\det H_2 &= \det \begin{vmatrix} 6 & 6 + 50K_R \\ 1 & 11 + 10K_R \end{vmatrix} \\
&= 60 + 10K_R\,.
\end{aligned}
$$

Für Stabilität muss die Determinante von $H_2$ positiv sein, somit gilt

$$
\begin{aligned}
& 60 + 10K_R > 0 \\
\Leftrightarrow\ & K_R > -6\,.
\end{aligned}
$$

Da diese Bedingung bereits durch die vorher aufgestellte Bedingung $K_R > -0.12$ erfüllt ist, wird der stabile Bereich von $K_R$ nicht weiter eingeschränkt. Es ist also ein beliebig großes postives $K_R$ wählbar, ohne dabei die Stabilität zu verlieren.