F. Goßmann M.Sc
Universität der Bundeswehr München
Institut für Steuer- und Regelungstechnik (LRT-15)

Steuer- und Regelungstechnik, WT 2021

Übung 4 - Lösung

Thema: Matrix-Exponentialfunktion, Berechnung von Zustandssignalen

Aufgabe 1. Berechnung der Matrix-Exponentialfunktion
Gegeben sind die folgenden zwei Matrizen:

a) $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

b) $A_2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe Berechnen Sie für die beiden gegebenen Matrizen A_1 und A_2 jeweils die Matrix-Exponentialfunktion e^{At}.

Lösung Aufgabe 1.

a) Matrix A_1 ist eine obere Dreiecksmatrix, sodass sich die Eigenwerte direkt ablesen lassen. Es ergibt sich also für A_1 mit $\lambda_{1,2,3} = 2$ ein dreifacher Eigenwert. Nach der Vorlesung ist bekannt, dass eine Dreiecksmatrix mit nur einem Eigenwert wie folgt umgeformt werden kann:

$$\mathrm{e}^{At} = \mathrm{e}^{\lambda t} \cdot \mathrm{e}^{(A-\lambda I)t}\,.$$

Dabei entsteht ein Produkt aus einem Skalar und einer nilpotenten Matrix. Aus der Vorlesung ist ebenfalls bekannt, dass sich die Matrix-Exponentialfunktion einer nilpotenten Matrix direkt über die Reihe

$$\mathrm{e}^{At} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{A^k t^k}{k!}$$

berechnen lässt. Es genügt also, die allgemeine Reihe zur Berechnung der Matrix-Exponentialfunktion bis zum $n-1$-Glied auszuwerten, wobei n der Dimension von A entspricht.

Es gilt also:

$$\mathrm{e}^{A_1 t} = \mathrm{e}^{2t} \cdot \mathrm{e}^{N \cdot t}$$

mit

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix N ist wie bereits erwähnt nilpotent, sodass $\mathrm{e}^{N \cdot t}$ direkt über die Reihe (mit $n = 3$) berechenbar ist:

$$\exp(Nt) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{t^2}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Damit ergibt sich die gesuchte Matrix unmittelbar:

$$\mathrm{e}^{A_1 t} = \begin{pmatrix} e^{2t} & e^{2t}t & \frac{1}{2}e^{2t}t^2 \\ 0 & e^{2t} & e^{2t}t \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix}.$$

b) Die Matrix A_2 ist eine allgemeine 3x3 Matrix, sodass es zunächst erforderlich ist, die Jordan-Normalform der Matrix zu bestimmen. Dazu werden zunächst die Eigenwerte mit

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda - 4 & 0 & 0 \\ -3 & \lambda - 2 & -1 \\ 3 & 0 & \lambda - 1 \end{pmatrix}$$

berechnet. Die Eigenwerte einer 3x3 Matrix lassen sich beispielsweise mit der Regel von Sarrus berechnen:

$$\begin{pmatrix} \lambda - 4 & 0 & 0 \\ -3 & \lambda - 2 & -1 \\ 3 & 0 & \lambda - 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \lambda - 4 & 0 \\ -3 & \lambda - 2 \\ 3 & 0 \end{matrix}$$
$$= (\lambda - 4)(\lambda - 2)(\lambda - 1).$$

Das charakteristische Polynom ergibt sich also zu

$$\chi(\lambda) = (\lambda - 4)(\lambda - 2)(\lambda - 1),$$

woraus die drei Eigenwerte 4,2 und 1 unmittelbar folgen. Die Jordan-Normalform ergibt sich also sofort:

$$T^{-1} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} T.$$

Um die Matrix-Exponentialfunktion mit $\mathrm{e}^{At} = \mathrm{e}^{T^{-1}JT} = T\mathrm{e}^{J}T^{-1}$ zu berechnen, muss noch die Transformationsmatrix T berechnet werden, welche sich in dem Fall von drei verschiedenen Eigenwerten aus den jeweiligen Eigenvektoren ergibt, die mit Hilfe von

$$(\lambda I - A)x = 0$$

ermittelt werden können. Diese ergeben sich zu:

$$T = \left(\begin{array}{c|c|c} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Somit ergibt die Matrix-Exponentialfunktion zu:

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{At} &= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{T} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{4t} & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{1t} \end{pmatrix}}_{\mathrm{e}^{Jt}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{T^{-1}} \\ &= \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{4t} & 0 & 0 \\ -\mathrm{e}^{t} + \mathrm{e}^{4t} & \mathrm{e}^{2t} & -\mathrm{e}^{t} + \mathrm{e}^{2t} \\ \mathrm{e}^{t} - \mathrm{e}^{4t} & 0 & \mathrm{e}^{t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Aufgabe 2. Berechnung von Zustandssignalen

Es wird ein harmonischer Oszillator (mit Anregung) betrachtet, dessen Dynamik durch

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\gamma & \omega \\ -\omega & -\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + u(t),$$

gegeben ist. Es gilt $\gamma \geq 0$, $\omega > 0$ und $u\colon \mathbb{R} \to \mathbb{F}^2$ stellt das Eingangssignal dar.

Aufgabe Berechne Sie das allgemeine Zustandssignal φ für den Fall

a) $u(t) = (0,0)^T$ für alle $t \in \mathbb{R}$,

b) $u(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-\gamma t} \sin(2\omega t) \\ \mathrm{e}^{-\gamma t} \cos(2\omega t) \end{pmatrix}$.

Lösung Aufgabe 2.

Aus der Aufgabenstellung folgt $A = \begin{pmatrix} -\gamma & \omega \\ -\omega & -\gamma \end{pmatrix}$.

a) Aus der Vorlesung ist bekannt, dass für das Zustandssignal φ

$$\varphi(t, x_0, u(t) = 0) = \mathrm{e}^{At} x_0, \ \forall x_0 \in \mathbb{R}^2$$

gilt. Der Ausdruck e^{At} lässt beispielsweise sich mit Hilfe der Jordan-Normalform von A bestimmen. Hierzu kann die folgende Formel

$$e^{At} = Te^{Jt}T^{-1}$$

verwendet werden. Hierbei stellt J die Jordan-Normalform der Systemmatrix A dar, es gilt also

$$A = TJT^{-1}.$$

Zur Bestimmung der Matrix-Exponentialfunktion wird als die Jordan-Normalform von A sowie die zugehörige Transformation T benötigt. Dazu werden zunächst die Eigenwerte und die Eigenvektoren von A benötigt. Das charakteristische Polynom von A ist gegeben durch

$$\chi_A(\lambda) = (\lambda + \gamma)^2 + \omega^2 \,,$$

sodass sich die Eigenwerte $\lambda_1 = -\gamma - i\omega$ und $\lambda_2 = -\gamma + i\omega$ ergeben. Durch Lösen des Gleichungssystems

$$(\lambda_j I - A)x = 0, \; j = 1, 2$$

erhält man die Eigenvektoren $v_1 = (i, 1)^T$ bzw. $v_2 = (-i, 1)^T$ zu den Eigenwerten λ_1 bzw. λ_2. Setzt man nun

$$T = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

so erhält man $A = TJT^{-1}$, wobei J die gesuchte Jordan-Normalform darstellt:

$$J = \begin{pmatrix} -\gamma - i\omega & 0 \\ 0 & -\gamma + i\omega \end{pmatrix}.$$

Mit

$$T^{-1} = \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} 1 & i \\ -1 & i \end{pmatrix}.$$

folgt also

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{At} &= \mathrm{e}^{TJT^{-1}t} = T\mathrm{e}^{Jt}T^{-1} \\ &= \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-\gamma t - i\omega t} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-\gamma t + i\omega t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & i \\ -1 & i \end{pmatrix} = \\ &= \frac{\mathrm{e}^{-\gamma t}}{2i} \begin{pmatrix} i\mathrm{e}^{i\omega t} + i\mathrm{e}^{-i\omega t} & \mathrm{e}^{i\omega t} - \mathrm{e}^{-i\omega t} \\ -\mathrm{e}^{i\omega t} + \mathrm{e}^{-i\omega t} & i\mathrm{e}^{i\omega t} + i\mathrm{e}^{-i\omega t} \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{-\gamma t} \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & \sin(\omega t) \\ -\sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Folglich gilt

$$\varphi(t, x_0, u(t) = 0) = \mathrm{e}^{-\gamma t} \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & \sin(\omega t) \\ -\sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix} x_0.$$

b) Es gilt

$$\varphi(t, x_0, u(t)) = \Phi(t)x_0 + \Phi(t) \int_0^t \Phi(-\tau)u(\tau)d\tau \,.$$

Der erste Teil der Gleichung entspricht der in Aufgabe a) gefunden Lösung. Demnach gilt es noch

$$\tilde{\Phi}(t) = \Phi(t) \int_0^t \Phi(-\tau)u(\tau)d\tau$$

zu bestimmen. Einsetzen liefert

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}(t) &= \mathrm{e}^{-\gamma t} \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & \sin(\omega t) \\ -\sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix} \int_0^t \mathrm{e}^{\gamma t} \begin{pmatrix} \cos(-\omega\tau) & \sin(-\omega\tau) \\ -\sin(-\omega\tau) & \cos(-\omega\tau) \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-\gamma t} \begin{pmatrix} \sin(2\omega\tau) \\ \cos(2\omega\tau) \end{pmatrix} d\tau \\ &= \mathrm{e}^{-\gamma t} \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & \sin(\omega t) \\ -\sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix} \int_0^t \begin{pmatrix} \cos(\omega t)\sin(2\omega\tau) - \sin(\omega t)\cos(2\omega\tau) \\ \sin(\omega t)\sin(2\omega\tau) + \cos(\omega t)\cos(2\omega\tau) \end{pmatrix} d\tau \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Additionstheoreme

$$\begin{aligned}
\sin(x-y) &= \sin(x)\cos(y) - \cos(x)\sin(y)\\
\cos(x-y) &= \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y)
\end{aligned}$$

lässt sich der Ausdruck weiter zu

$$\tilde{\Phi}(t) = e^{-\gamma t}\begin{pmatrix}\cos(\omega t) & \sin(\omega t)\\ -\sin(\omega t) & \cos(\omega t)\end{pmatrix}\int_0^t \begin{pmatrix}\sin(2\omega\tau - \omega\tau)\\ \cos(2\omega\tau - \omega\tau)\end{pmatrix} d\tau$$

vereinfachen. Durch Lösen des Integrals ergibt sich

$$\begin{aligned}
\tilde{\Phi}(t) &= e^{-\gamma t}\begin{pmatrix}\cos(\omega t) & \sin(\omega t)\\ -\sin(\omega t) & \cos(\omega t)\end{pmatrix}\begin{bmatrix}-\frac{1}{\omega}\cos(\omega\tau)\\ \frac{1}{\omega}\sin(\omega\tau)\end{bmatrix}_0^t\\
&= e^{-\gamma t}\begin{pmatrix}\cos(\omega t) & \sin(\omega t)\\ -\sin(\omega t) & \cos(\omega t)\end{pmatrix}\frac{1}{\omega}\begin{pmatrix}1-\cos(\omega t)\\ \sin(\omega t)\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Ausmultiplizieren führt auf

$$\tilde{\Phi}(t) = \mathrm{e}^{-\gamma t}\frac{1}{\omega}\begin{pmatrix}\cos(\omega t) - \cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t)\\ -\sin(\omega t) + \sin(\omega t)\cos(\omega t) + \sin(\omega t)\cos(\omega t)\end{pmatrix}.$$

Die letzten beiden Summanden in beiden Spalten lassen sich ebenfalls durch Additionstheoreme zusammenfassen, sodass sich final

$$\tilde{\Phi}(t) = \mathrm{e}^{-\gamma t}\frac{1}{\omega}\begin{pmatrix}\cos(\omega t) - \cos(2\omega t)\\ \sin(2\omega t) - \sin(\omega t)\end{pmatrix}$$

ergibt.

Somit ergibt sich das vollständige Zustandssignal zu

$$\varphi(t, x_0, u(t)) = \mathrm{e}^{-\gamma t}\begin{pmatrix}\cos(\omega t) & \sin(\omega t)\\ -\sin(\omega t) & \cos(\omega t)\end{pmatrix}x_0 + e^{-\gamma t}\frac{1}{\omega}\begin{pmatrix}\cos(\omega t) - \cos(2\omega t)\\ \sin(2\omega t) - \sin(\omega t)\end{pmatrix}$$