

Übung 2 - Lösung

Thema: Nichtlineare Differentialgleichungen, Linearisierung

Aufgabe 1. Mechanisches System

Gegeben ist das in Abb. 1 dargestellte Feder-Masse-Dämpfer System aus der ersten Übung. Die

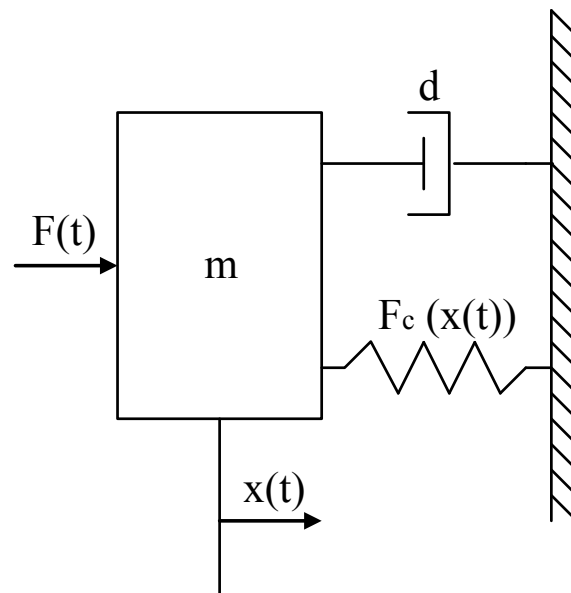


Abbildung 1: Feder-Masse-Dämpfer System

Feder wurde durch ein anderes Modell ersetzt, und besitzt nun eine nichtlineare Kennlinie der Form $F_c(x(t)) = \sqrt{C_0 \cdot x(t)}$. Das System wird weiterhin von einer zeitabhängigen Kraft $F(t)$ angeregt.

Aufgabe Bestimmen Sie die Differentialgleichung, die die Dynamik des oben dargestellten Feder-Masse-Dämpfer Systems mit der neuen Feder in der Koordinate x beschreibt. Linearisieren Sie anschließend die erhaltene Differentialgleichung um deren Ruhelage bei einer konstanten Anregung $F_0 \geq 0$.

Lösung Aufgabe 1.

Das System entspricht dem in der ersten Übung behandelten Feder-Masse-Dämpfer-System, mit Ausnahme der Feder. Diese besitzt in diesem Fall eine nichtlineare Kennlinie, sodass die Federkraft durch

$$F_c(x(t)) = \sqrt{(C_0 \cdot x(t))}$$

beschrieben wird. Ersetzt man in der DGL aus der ersten Übung die Beschreibung der linearen Feder durch den nichtlinearen Ausdruck, ergibt sich die gesuchte DGL sofort zu

$$m \cdot \ddot{x}(t) + d \cdot \dot{x}(t) + \sqrt{(C_0 \cdot x(t))} = F(t).$$

Durch die nichtlineare Federkennlinie wird das System nun durch eine nichtlineare inhomogene DGL beschrieben. Diese soll jetzt im Folgenden in einer Ruhelage linearisiert werden. Für die Ruhelage gilt:

- System ist in Ruhe, keine Bewegungen mehr vorhanden: $\ddot{x}_0 = \dot{x}_0 = 0$
- System wird mit einem konstanten $F_0 \geq 0$ angeregt

Eingesetzt in die DGL ergibt sich

$$m \cdot \underbrace{\ddot{x}_0}_{=0} + d \cdot \underbrace{\dot{x}_0}_{=0} + \sqrt{C_0 \cdot x_0} = F_0. \quad (1)$$

Die Gleichung wird nach x_0 aufgelöst, womit sich die einzige Ruhelage des Systems bei einer konstanten Anregung mit F_0 zu

$$x_0 = \frac{F_0^2}{C_0}$$

ergibt. In dieser Ruhelage wird die DGL durch ein lineares Modell angenähert, welches Abweichungen des Systems von dieser Ruhelage beschreibt. Hierzu werden die zeitabhängigen Größen in der DGL durch die folgenden Ausdrücke ersetzt:

- $\ddot{x}(t) = \ddot{x}_0 + \Delta\ddot{x}$
- $\dot{x}(t) = \dot{x}_0 + \Delta\dot{x}$
- $x(t) = x_0 + \Delta x$
- $F(t) = F_0 + \Delta F$

Diese Ausdrücke werden in (1) eingesetzt

$$m \cdot \left(\underbrace{\ddot{x}_0}_{=0} + \Delta\ddot{x} \right) + d \cdot \left(\underbrace{\dot{x}_0}_{=0} + \Delta\dot{x} \right) + \sqrt{C_0 \cdot (x_0 + \Delta x)} = F_0 + \Delta F. \quad (2)$$

Es zeigt sich, dass für die linearen Ausdrücke der beiden Ableitungen von $x(t)$ durch die Wahl der Ruhelage direkt die gewünschte Abhängigkeit von den Abweichungsgrößen ergibt. Der nichtlineare Ausdruck

$$f(x_0 + \Delta x) = \sqrt{C_0 \cdot (x_0 + \Delta x)}$$

wird nun durch eine Taylorreihen-Entwicklung linear angenähert. Hierzu wird der ursprüngliche nichtlineare Ausdruck aus der ursprünglichen DGL

$$f(x) = \sqrt{C_0 \cdot x(t)}$$

durch eine Taylorreihe entwickelt und nach dem linearen Glied abgebrochen

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=x_0} \cdot \Delta x + \dots$$

Angewandt auf das hier vorliegende Problem ergibt sich

$$\sqrt{C_0 \cdot (x_0 + \Delta x)} = \sqrt{C_0 \cdot x_0} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{C_0}{x_0}} \cdot \Delta x + \dots$$

Durch Einsetzen von x_0 und Vernachlässigen der Terme höherer Ordnung erhält man dann mit

$$\sqrt{C_0 \cdot (x_0 + \Delta x)} \approx \sqrt{C_0 \cdot \frac{F_0^2}{C_0}} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{C_0 \cdot \frac{C_0}{F_0^2}} \cdot \Delta x = F_0 + \frac{C_0}{2F_0} \cdot \Delta x$$

eine Approximation des nichtlinearen Terms. Wird diese Approximation nun in (2) eingesetzt, erhält man mit

$$m \cdot \Delta \ddot{x} + d \cdot \Delta \dot{x} + \frac{C_0}{2F_0} \cdot \Delta x = \Delta F$$

die gewünschte lineare Differentialgleichung, welche die DGL (1) in der Umgebung der Ruhelage x_0 approximiert.

Aufgabe 2. Elektrischer Hubmagnet

Gegeben ist der in Abb. 2 dargestellte System eines elektrischen Hubmagnetes aus Übung 1.) In

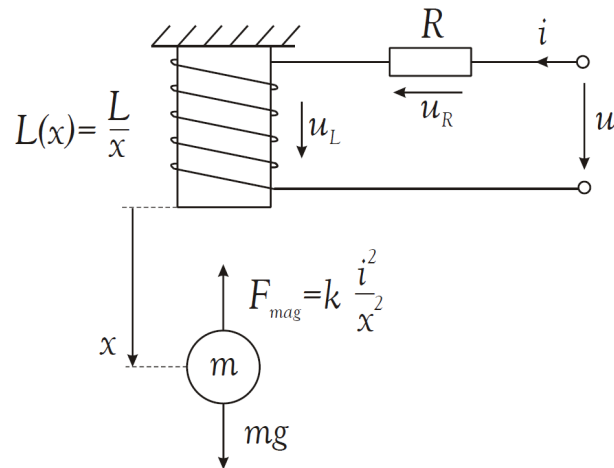


Abbildung 2: Elektrischer Hubmagnet

der vorherigen Übung wurden für das in Abb. 2 dargestellte System die folgenden Differentialgleichungen aufgestellt:

$$\frac{di}{dt} = -\frac{R}{L} \cdot i \cdot x + \frac{1}{L} \cdot x \cdot u, \quad (3)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = g - \frac{k}{m} \cdot \frac{i^2}{x^2}. \quad (4)$$

Des Weiteren wurde eine Ruhelage des System zu

$$i_0 = \frac{u_0}{R} \quad \wedge \quad x_0 = u_0 \cdot \frac{1}{R} \sqrt{\frac{k}{m \cdot g}}$$

bestimmt.

Aufgaben

- Linearisieren Sie das dargestellte System um die angegebene Ruhelage bei einer konstanten Eingangsspannung $u_0 \geq 0$.
- Stellen Sie das linearisierte System in Form eines Blockschaltbildes dar.

Lösung Aufgabe 2.

- a) Beide Differentialgleichungen enthalten nichtlineare Terme, die mehrere zeitabhängige Größen enthalten, daher ist eine mehrdimensionale Taylor-Reihenentwicklung notwendig. Diese ergibt sich zu

$$f(x_{10} + \Delta x_1, x_{20} + \Delta x_2, \dots) = f(x_{10}, x_{20}, \dots) + \left. \frac{\partial f}{\partial x_1} \right|_{AP} \cdot \Delta x_1 + \left. \frac{\partial f}{\partial x_2} \right|_{AP} \cdot \Delta x_2 + \dots$$

Ersetzt man in (4) die zeitabhängigen Größen durch die Beschreibung der Ruhelagen-Abweichung ergibt sich

$$\left(\frac{di}{dt} \right)_0 + \Delta \left(\frac{di}{dt} \right) = -\frac{L}{R}(i_0 + \Delta i)(x_0 + \Delta x) + \frac{1}{L}(x_0 + \Delta x)(u_0 + \Delta u), \quad (5)$$

$$\ddot{x}_0 + \Delta \ddot{x} = g - \frac{k}{m} \cdot \frac{(i_0 + \Delta i)^2}{(x_0 + \Delta x)^2}. \quad (6)$$

In Gleichung (5) (elektrisches Teilsystem) muss folgender Teil linearisiert werden

$$f(i_0 + \Delta i, x_0 + \Delta x, u_0 + \Delta u) = -\frac{L}{R}(i_0 + \Delta i)(x_0 + \Delta x) + \frac{1}{L}(x_0 + \Delta x)(u_0 + \Delta u). \quad (7)$$

Diese Gleichung wird nun durch den mehrdimensionalen Taylor-Ansatz linear approximiert. Hierzu gilt es zunächst die drei partiellen Ableitungen nach den drei zeitabhängigen Größen aus der ursprünglichen DGL zu bilden

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial f}{\partial i} \right|_{i_0, x_0, u_0} &= -\frac{R}{L} \cdot x_0, \\ \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{i_0, x_0, u_0} &= -\frac{R}{L} \cdot i_0 + \frac{1}{L} \cdot u_0, \\ \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{i_0, x_0, u_0} &= \frac{1}{L} \cdot x_0. \end{aligned}$$

In (7) eingesetzt ergibt sich

$$\begin{aligned} f(i_0 + \Delta i, x_0 + \Delta x, u_0 + \Delta u) &\approx f(i_0, x_0, u_0) \\ &\quad - \frac{R}{L} \cdot x_0 \cdot \Delta i + \left(-\frac{R}{L} \cdot i_0 + \frac{1}{L} \cdot u_0 \right) \cdot \Delta x + \frac{1}{L} \cdot x_0 \cdot \Delta u \end{aligned}$$

Einsetzen in (5) ergibt

$$\underbrace{\left(\frac{di}{dt} \right)_0}_{=0} + \Delta \left(\frac{di}{dt} \right) = f(i_0, x_0, u_0) - \frac{R}{L} \cdot x_0 \cdot \Delta i + \left(-\frac{R}{L} \cdot i_0 + \frac{1}{L} \cdot u_0 \right) \cdot \Delta x + \frac{1}{L} \cdot x_0 \cdot \Delta u.$$

Für $f(i_0, x_0, u_0)$ ergibt sich

$$f(i_0, x_0, u_0) = -\frac{R}{L} \cdot \frac{u_0}{R} \cdot \frac{1}{R} \sqrt{\frac{k}{m \cdot g}} \cdot u_0 + \frac{1}{L} \cdot \frac{1}{R} \sqrt{\frac{k}{m \cdot g}} \cdot u_0^2 = 0.$$

Somit ergibt sich die linearisierte DGL des elektrischen Teilsystems

$$\Delta \left(\frac{di}{dt} \right) = -\frac{R}{L} \cdot x_0 \cdot \Delta i + \left(-\frac{R}{L} \cdot i_0 + \frac{1}{L} \cdot u_0 \right) \cdot \Delta x + \frac{1}{L} \cdot x_0 \cdot \Delta u.$$

Das Einsetzen der Ruhelagen liefert schlussendlich

$$\begin{aligned} \Delta \left(\frac{di}{dt} \right) &= -\frac{R}{L} \cdot \sqrt{\frac{k}{m \cdot g}} \cdot u_0 \cdot \Delta i + \left(-\frac{R}{L} \cdot \frac{u_0}{R} + \frac{1}{L} \cdot u_0 \right) \cdot \Delta x + \frac{1}{L} \cdot \sqrt{\frac{k}{m \cdot g}} \cdot \frac{1}{R} \cdot u_0 \Delta u \\ &= \underbrace{-\frac{u_0}{L} \sqrt{\frac{k}{m \cdot g}}}_{k_u} \cdot \Delta i + \underbrace{\frac{u_0}{LR} \sqrt{\frac{k}{m \cdot g}}}_{k_{i,1}} \Delta u \end{aligned}$$

Analoger Ansatz wird bei der DGL (6) des mechanischen Teilsystems angewendet. Hier muss der Teil

$$f(i_0 + \Delta i, x_0 + \Delta x) = -\frac{k}{m} \cdot \frac{(i_0 + \Delta i)^2}{(x_0 + \Delta x)^2}$$

linearisiert werden. Hierzu werden ebenfalls zunächst werden die beiden partiellen Ableitungen des nichtlinearen Gliedes der ursprünglichen Differentialgleichung

$$f(i, x) = -\frac{k}{m} \cdot \frac{i^2}{x^2}$$

gebildet um die Differenzenfunktion zu approximieren

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial f}{\partial i} \right|_{i_0, x_0} &= -2 \cdot \frac{k}{m} \cdot \frac{i_0}{x_0^2}, \\ \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{i_0, x_0} &= 2 \cdot \frac{k}{m} \cdot \frac{i_0^2}{x_0^3}. \end{aligned}$$

Aufstellen der zweidimensionalen Taylor-Näherung des Terms ergibt

$$f(i_0 + \Delta i, x_0 + \Delta x) \approx \underbrace{-\frac{k}{m} \cdot \frac{i_0^2}{x_0^2}}_{f(i_0, x_0)} + 2 \cdot \frac{k}{m} \cdot \frac{i_0^2}{x_0^3} \cdot \Delta x - 2 \cdot \frac{k}{m} \cdot \frac{i_0}{x_0^2} \Delta i.$$

Der Term wird nun in (6) eingesetzt, wodurch sich

$$\underbrace{\ddot{x}_0}_{=0} + \Delta \ddot{x} = g - \frac{k}{m} \cdot \frac{i_0^2}{x_0^2} + 2 \cdot \frac{k}{m} \cdot \frac{i_0^2}{x_0^3} \cdot \Delta x - 2 \cdot \frac{k}{m} \cdot \frac{i_0}{x_0^2} \Delta i$$

ergibt. Durch anschließendes Einsetzen der Ruhelage x_0 erhält man die lineare approximierten Differentialgleichung um die Abweichung von der Ruhelage

$$\begin{aligned} \Delta \ddot{x} &= g - \frac{k}{m} \cdot i_0^2 \cdot \frac{m \cdot g}{k \cdot i_0^2} + 2 \cdot \frac{k}{m} \cdot i_0^2 \cdot \frac{m \cdot g}{k \cdot i_0^3} \cdot \sqrt{\frac{m \cdot g}{k}} \cdot \Delta x - 2 \cdot \frac{k}{m} \cdot i_0 \cdot \frac{m \cdot g}{k \cdot i_0^2} \cdot \Delta i, \\ \Delta \ddot{x} - 2 \cdot \frac{g}{i_0} \sqrt{\frac{m \cdot g}{k}} \cdot \Delta x &= -2 \frac{g}{i_0} \cdot \Delta i. \end{aligned}$$

Schlussendlich ergibt sich durch das Einsetzen von i_0 die folgende lineare DGL

$$\Delta \ddot{x} - \underbrace{2 \cdot \frac{gR}{u_0} \sqrt{\frac{mg}{k}}}_{k_x} \cdot \Delta x = - \underbrace{2 \cdot \frac{gR}{u_0}}_{k_{i,2}} \cdot \Delta i$$

b) Die erhaltenen Differentialgleichungen werden durch folgendes Blockschaltbild dargestellt.

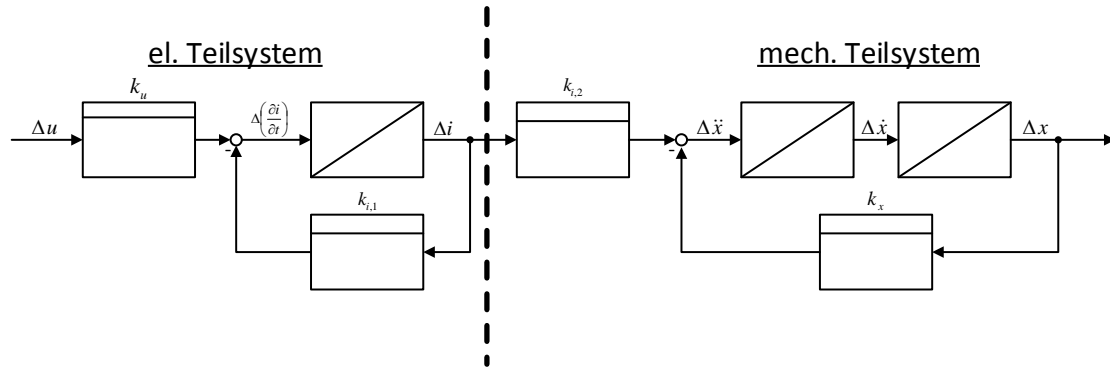


Abbildung 3: Blockschaltbild des linearisierten Systems