9. Übung zur Vorlesung „Steuer- und Regelungstechnik“

Künstliche Stabilität, Reglerentwurf, Polkompensation

Felix Goßmann M.Sc.

Institut für Steuer- und Regelungstechnik
Fakultät für Luft- und Raumfahrttechnik
Universität der Bundeswehr München

Aufgabe 1: Reglerstrukturen

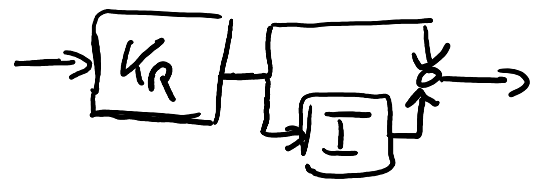
Gegeben ist das System aus der vorherigen Übung mit der Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{2}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$$

P-Regler → keine stationäre Genauigkeit

Es wird ein Standardregelkreis mit den beiden folgenden Regler-Strukturen betrachtet

- PI-Regler: $G(s) = K_R\left(1 + \frac{1}{T_I \cdot s}\right)$
- PID-Regler: $G(s) = K_R\left(1 + \frac{1}{T_I \cdot s} + T_D \cdot s\right)$



PD-Regler: $G(s) = K_R(1 + T_D \cdot s)$

Aufgabe 1: Reglerstrukturen

Gegeben ist das System aus der vorherigen Übung mit der Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{2}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$$

Es wird ein Standardregelkreis mit den beiden folgenden Regler-Strukturen betrachtet

- PI-Regler: $G(s) = K_R\left(1 + \frac{1}{T_I \cdot s}\right)$

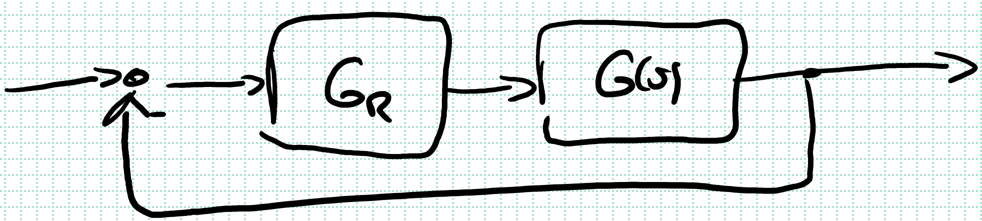
Aufgaben: a) Berechnen Sie die Übertragungsfunktion des geschlossenen Regelkreises mit einem PI-Regler. Untersuchen Sie den Einfluss der Reglerparameter K_R und T_I auf das Verhalten der Sprungantwort des geschlossenen Regelkreises.

Aufgabe 1: Reglerstrukturen

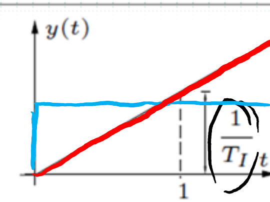
Aufgaben: a) Berechnen Sie die Übertragungsfunktion des geschlossenen Regelkreises mit einem PI-Regler. Untersuchen Sie den Einfluss der Reglerparameter K_R und T_I auf das Verhalten der Sprungantwort des geschlossenen Regelkreises.

$$G(s) = \frac{2}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$$

$$G_{R,PI}(s) = K_R\left(1 + \frac{1}{T_I \cdot s}\right)$$



$$= \frac{K_R(T_I s + 1)}{T_I \cdot s}$$

I	$y(t) = \frac{1}{T_I}\int u\,dt$ $\boxed{G(s) = \frac{1}{T_I\, s}}$	

Aufgabe 1: Reglerstrukturen

Aufgaben: a) Berechnen Sie die Übertragungsfunktion des geschlossenen Regelkreises mit einem PI-Regler. Untersuchen Sie den Einfluss der Reglerparameter K_R und T_I auf das Verhalten der Sprungantwort des geschlossenen Regelkreises.

$$G_v = \frac{2}{s^3+6s^2+11s+6} \cdot \frac{K_R(T_I \cdot s+1)}{T_I \cdot s} = \frac{2K_R(T_I s+1)}{T_I s(s^3+6s^2+11s+6)}$$

$$G_r = 1$$

$$G(s) = \frac{G_v}{1+G_vG_r} \quad G_0$$

$$1+G_0 = \frac{T_I s(s^3+6s^2+11s+6)+2K_R(T_I s+1)}{T_I s(s^3+6s^2+11s+6)}$$

zusätzliche Nullstelle

$$G(s) = \frac{2K_R(T_I s+1)}{T_I s(s^3+6s^2+11s+6)+2K_R(T_I s+1)}$$

zusätzliche Polstelle

Aufgabe 1: Reglerstrukturen

Aufgaben: a) Berechnen Sie die Übertragungsfunktion des geschlossenen Regelkreises mit einem PI-Regler. Untersuchen Sie den Einfluss der Reglerparameter K_R und T_I auf das Verhalten der Sprungantwort des geschlossenen Regelkreises.

stat. Endwert

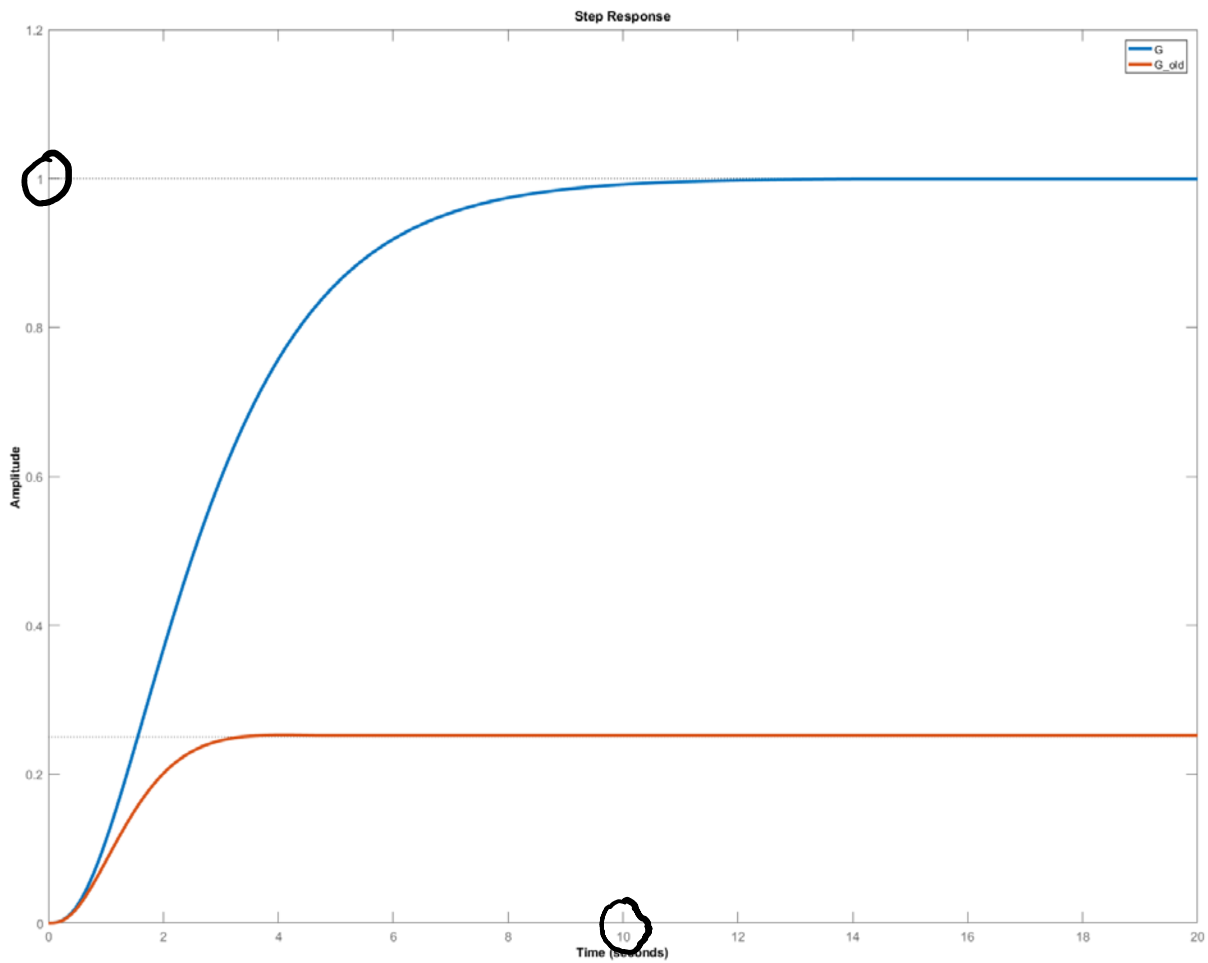
$$G(s) = \frac{2K_R T_I s + 2K_R}{T_I s^4 + 6T_I s^3 + 11 T_I s^2 + (6T_I + 2K_R T_I)s + 2K_R}$$

$$\lim_{s\to 0} s \cdot \underbrace{G(s)\cdot\frac{1}{s}}_{\text{Sprungantwort}} = \lim_{s\to 0} \frac{2K_R T_I s + 2K_R}{T_I s^4 + 6T_I s^3 + 11 T_I s^2 + (6T_I + 2K_R T_I)s + 2K_R} = \frac{2K_R}{2K_R} = 1$$

stationär genau

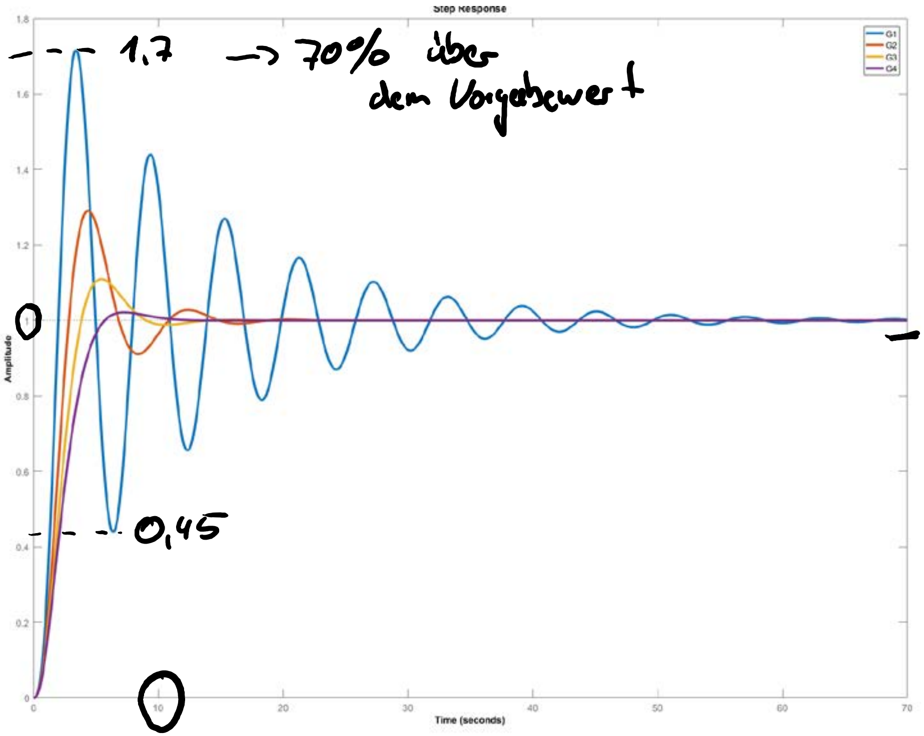
Aufgabe 1: Reglerstrukturen

- Vgl. mit P-Regler aus vorheriger Übung
- Durch I-Anteil wird stat. Genauigkeit erreicht
- $K_R = 1$

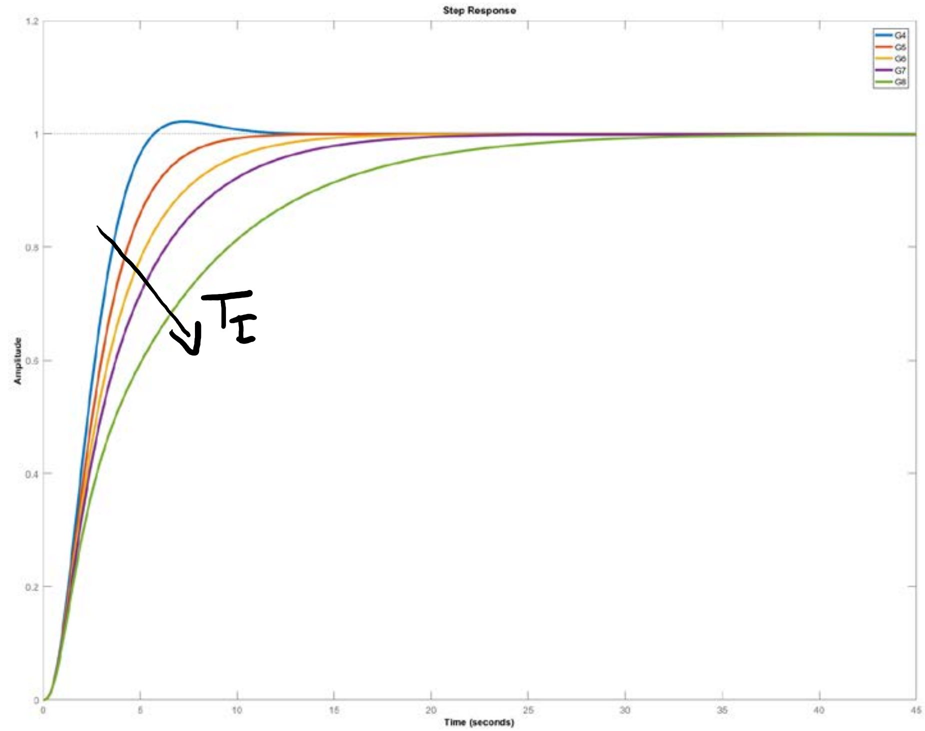


Aufgabe 1: Reglerstrukturen

Einfluss der Reglerparameter (hier T_I für $K_R = 1$)



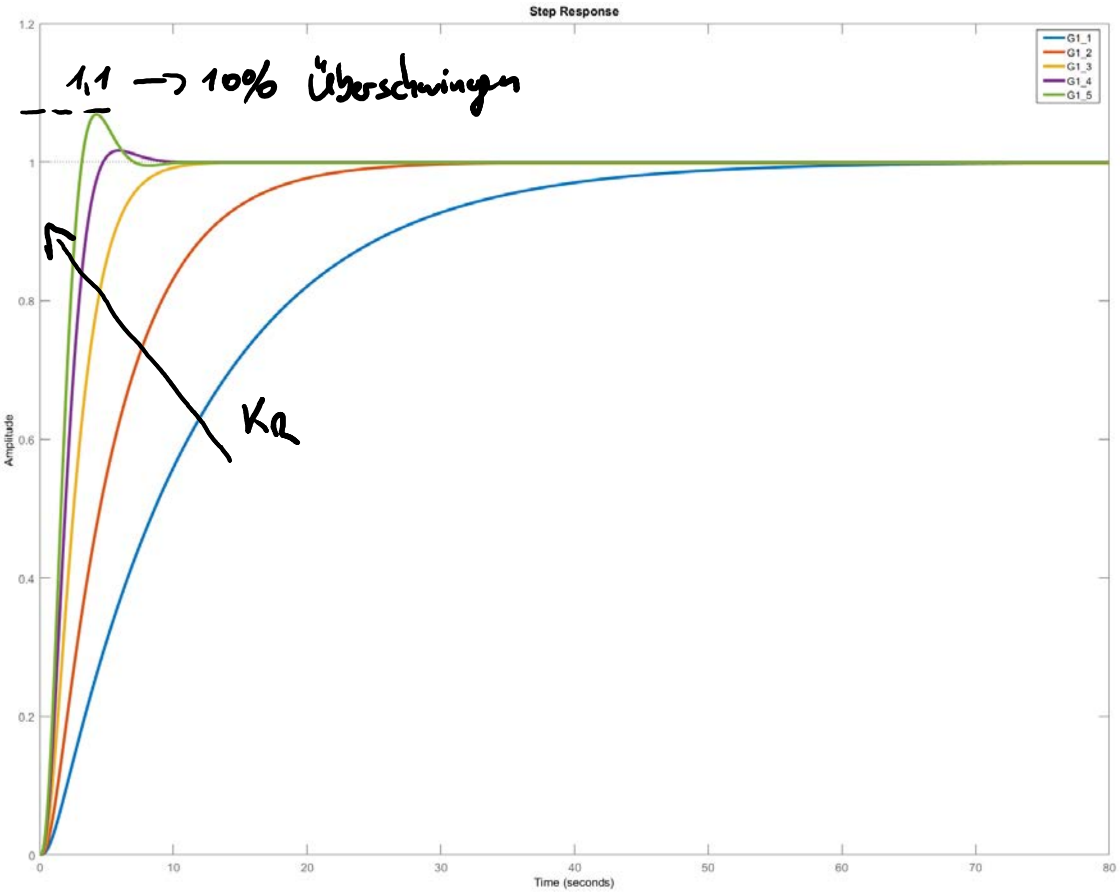
$0.2 \leq T_I \leq 0.8$



$0.8 \leq T_I \leq 2$

Aufgabe 1: Reglerstrukturen

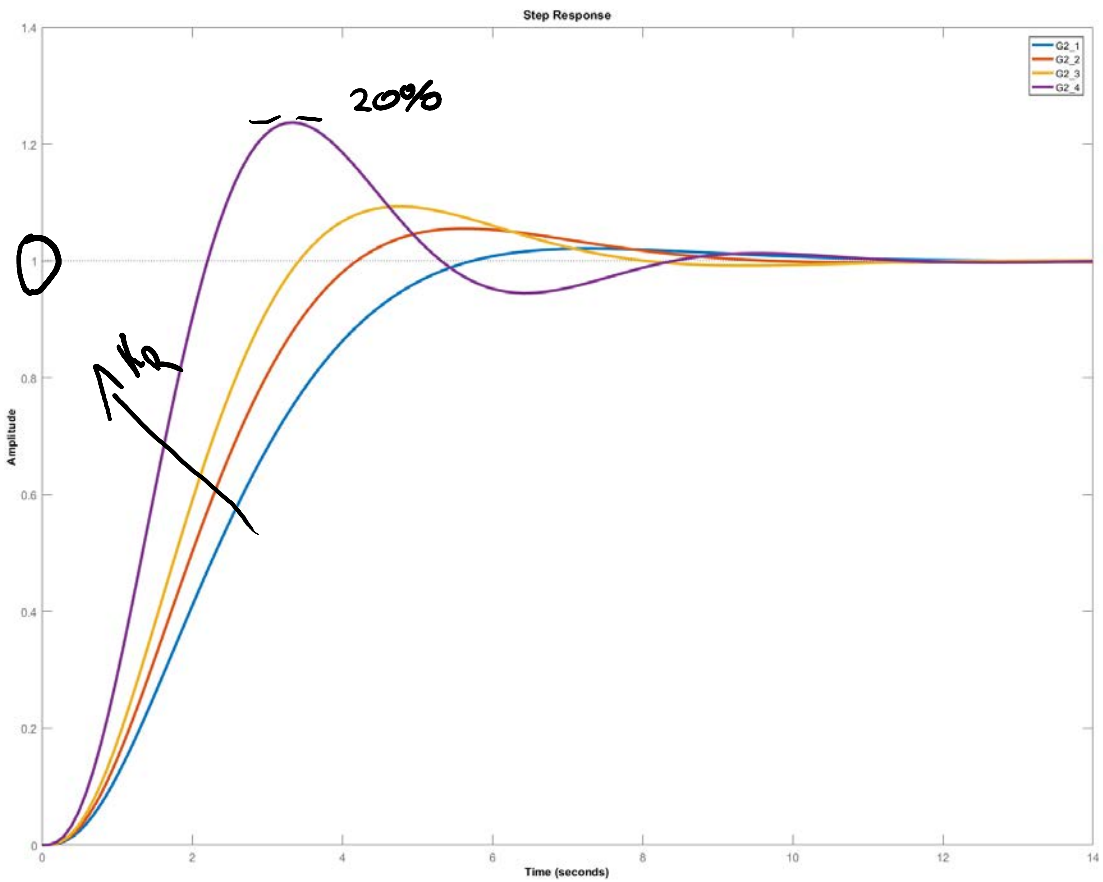
Einfluss der Reglerparameter (hier K_R für $T_I = 1$)



$$0.25 \leq K_R \leq 2$$

Aufgabe 1: Reglerstrukturen

Einfluss der Reglerparameter (hier K_R für $\mathrm{T_I} = 0.8$)



$$1 \leq K_R \leq 2.5$$

Auswahl der Reglerparameter nicht trivial

Aufgabe 1: Reglerstrukturen

Gegeben ist das System aus der vorherigen Übung mit der Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{2}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$$

Es wird ein Standardregelkreis mit den beiden folgenden Regler-Strukturen betrachtet

- PID-Regler: $G(s) = K_R\left(1 + \frac{1}{T_I \cdot s} + \underline{T_D \cdot s}\right)$

Aufgaben: b) Berechnen Sie die Übertragungsfunktion des geschlossenen Regelkreises mit einem PID-Regler. Wie äußert sich der Einfluss des zusätzlichen Reglerparameters T_D auf das Verhalten der Regelstrecke?

Aufgabe 1: Reglerstrukturen

Aufgaben: b) Berechnen Sie die Übertragungsfunktion des geschlossenen Regelkreises mit einem PID-Regler. Wie äußert sich der Einfluss des zusätzlichen Reglerparameters T_D auf das Verhalten der Regelstrecke?

$$G_R(s) = K_R\left(1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s\right) = \frac{K_R T_I T_D s^2 + T_I K_R s + K_R}{T_I s}$$

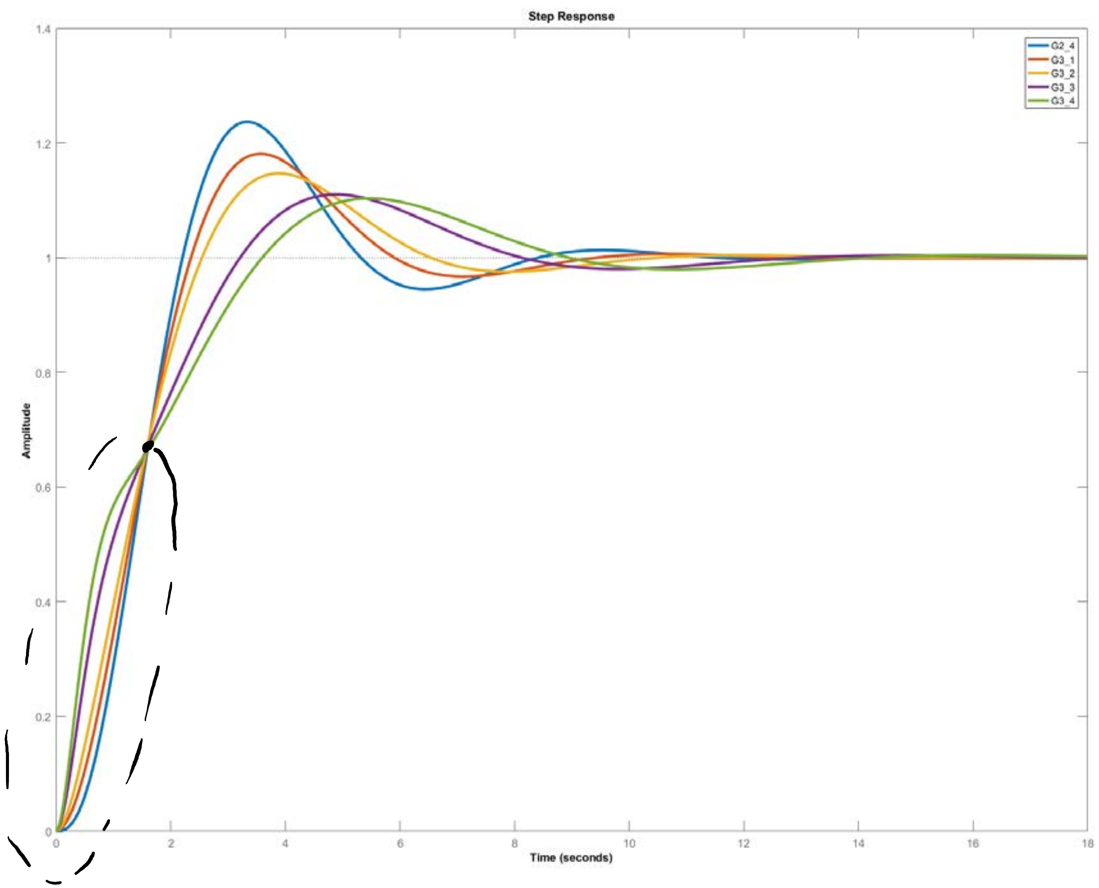
$$G_V(s) = \frac{K_R T_D T_I s^2 + T_I K_R s + K_R}{T_I s} \cdot \frac{2}{s^2 + 6s^2 + 11s + 6}$$

$$\vdots$$

$$G(s) = \frac{G_V}{1 + G_V \underbrace{G_r}_{=1}} = \frac{2K_R(T_D T_I s^2 + T_I s + 1)}{T_I s^4 + 6 T_I s^3 + (11 T_I + 2K_R T_D T_I) s^2 + (6 T_I + 2 T_I K_R) s + 2K_R}$$

Aufgabe 1: Reglerstrukturen

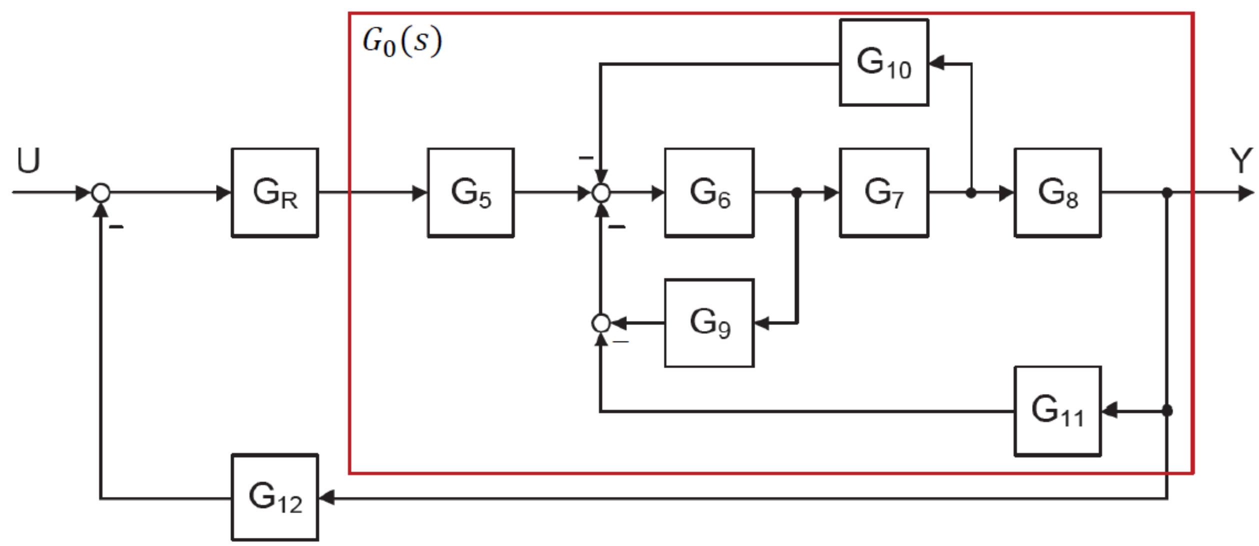
Einfluss der Reglerparameter (hier $K_R = 2.5$ für $T_I = 0.8$)



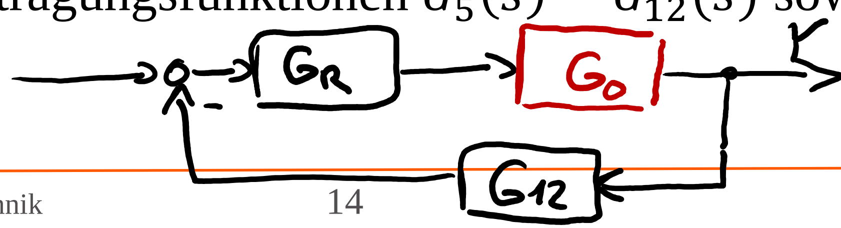
$0.5 \leq T_D \leq 3.5$

Aufgabe 2: Reglerentwurf nach Ziegler-Nichols

Gegeben ist das folgende System in Blockschaltbild-Form



mit den allgemeinen Übertragungsfunktionen $G_5(s) - G_{12}(s)$ sowie $G_R(s)$.



Aufgabe 2: Reglerentwurf nach Ziegler-Nichols

Für die Übertragungsfunktionen gilt:

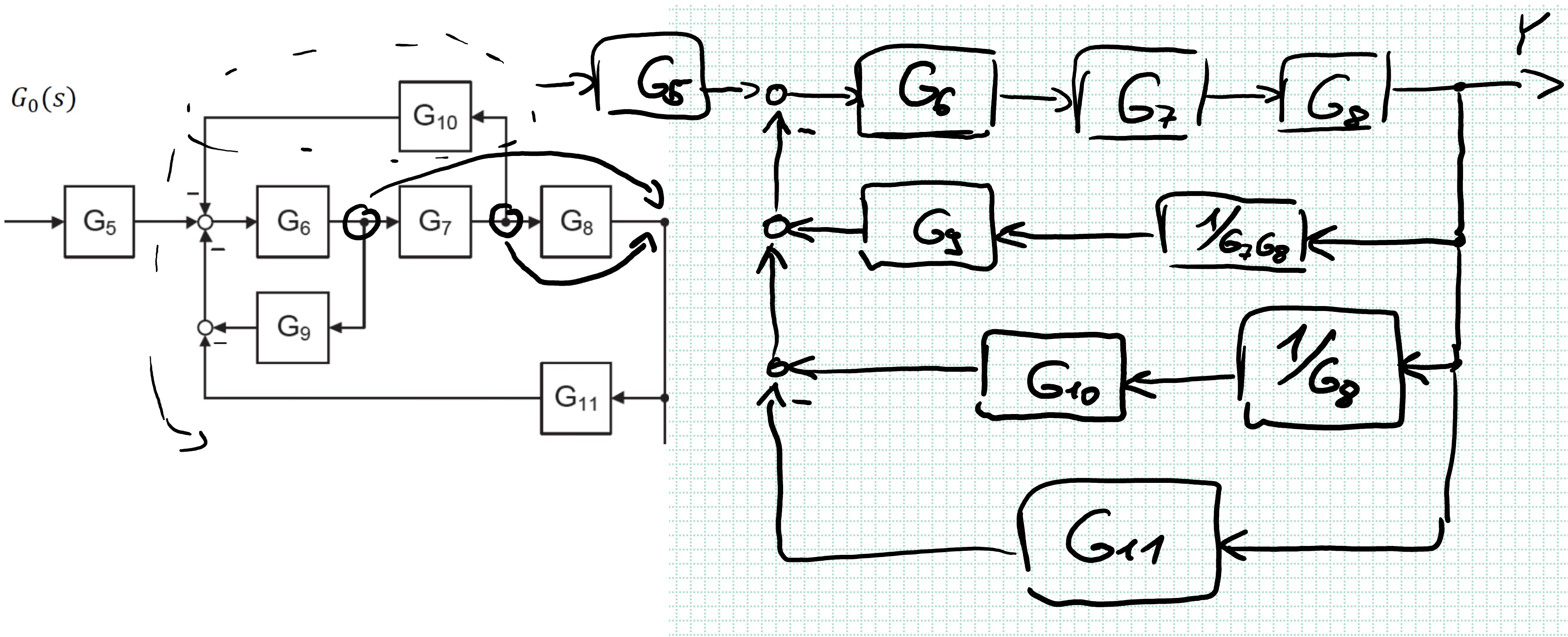
$$G_5 = K \;\; ; \;\; G_6 = \frac{2}{s+1} \;\; ; \;\; G_7 = G_8 = \frac{1}{s} \;\; ; \;\; G_9 = 2 \;\; ; \;\; G_{10} = 3 \;\; ;$$
$$G_{11} = G_{12} = \frac{1}{s+2}$$

Aufgaben: a) Fassen Sie das in dem roten Kasten dargestellte Übertragungssystem zu einer doppelbruchfreien Übertragungsfunktion $G_0(s)$ zusammen.

b) Prüfen Sie mit ob die Übertragungsfunktion $G_0(s)$ stabil ist.

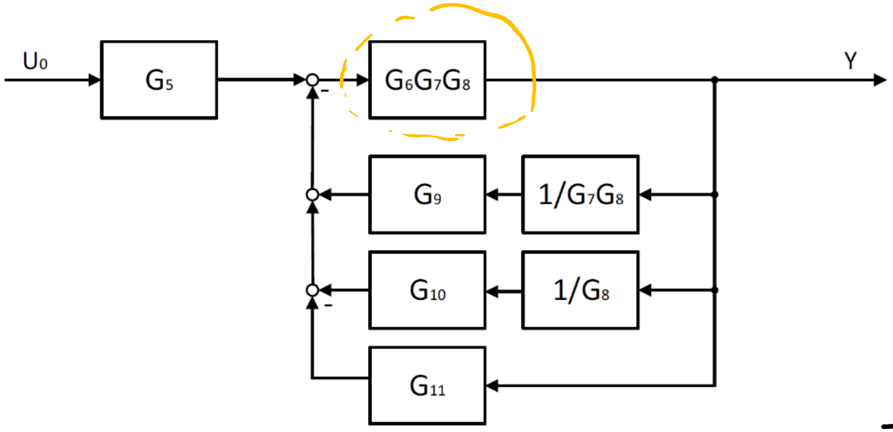
Aufgabe 2: Reglerentwurf nach Ziegler-Nichols

Aufgaben: a) Fassen Sie das in dem roten Kasten dargestellte Übertragungssystem zu einer doppelbruchfreien Übertragungsfunktion $G_0(s)$ zusammen.



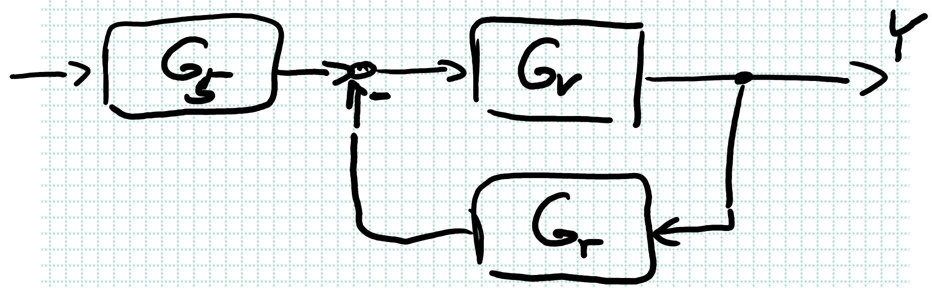
Aufgabe 2: Reglerentwurf nach Ziegler-Nichols

Aufgaben: a) Fassen Sie das in dem roten Kasten dargestellte Übertragungssystem zu einer doppelbruchfreien Übertragungsfunktion $G_0(s)$ zusammen.



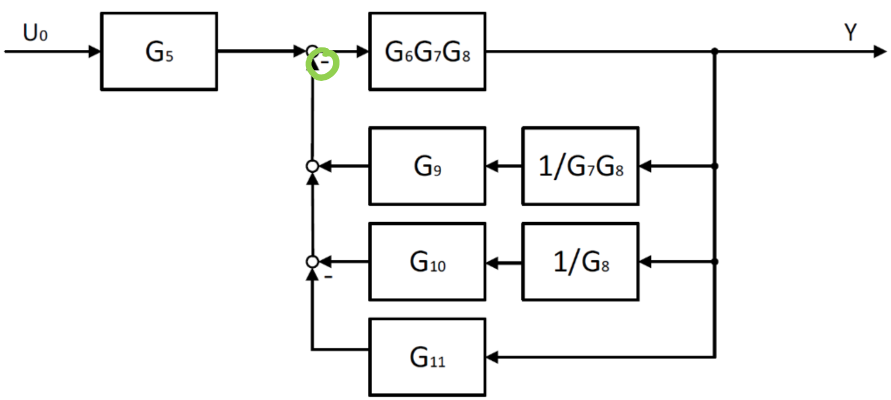
$$G_v = G_6 G_7 G_8$$

$$G_r = \frac{G_9}{G_7 G_8} + \frac{G_{10}}{G_8} - G_{11}$$



Aufgabe 2: Reglerentwurf nach Ziegler-Nichols

Aufgaben: a) Fassen Sie das in dem roten Kasten dargestellte Übertragungssystem zu einer doppelbruchfreien Übertragungsfunktion $G_0(s)$ zusammen.



$$G_0(s) = G_5 \cdot \frac{G_r}{1 + G_r}$$

$$= G_5 \cdot \frac{G_6 G_7 G_8}{1 + G_6 G_7 G_8 \left(\frac{G_9}{G_8 G_7} + \frac{G_{10}}{G_8} - G_{11} \right)}$$

$$= \frac{G_5 G_6 G_7 G_8}{1 + G_6 G_9 + G_6 G_7 G_{10} - G_6 G_7 G_8 G_{11}}$$

Aufgabe 2: Reglerentwurf nach Ziegler-Nichols

Aufgaben: b) Prüfen Sie mit ob die Übertragungsfunktion $G_0(s)$ stabil ist.

$$G_s(s) = \frac{K \cdot \frac{2}{s+1} \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s}}{1 + 2 \cdot \frac{2}{s+1} + 3 \cdot \frac{2}{s+1} \cdot \frac{1}{s} + \frac{2}{s+1} \cdot \frac{1}{s+2} \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s}}$$

$$\vdots$$

$$= \frac{2K(s+2)}{s^4 + 7s^3 + 16s^2 + 12s - 2}$$

$\rightarrow$ not. Bed. nach Hurwitz verletzt

$\rightarrow$ <u>instabil</u>

Aufgabe 2: Reglerentwurf nach Ziegler-Nichols

Das System $G_0(s)$ wird nun mit einem Regler $G_R(s)$ geregelt. Zusätzlich ist zur Betrachtung des Sensorverhaltens die Übertragungsfunktion $G_{12}(s)$ in der Rückführung enthalten.

$G_{12} = \frac{1}{s+2}$

Aufgaben: c) Stellen Sie die Gesamtübertragungsfunktion $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$ in doppelbruchfreier Form in Abhängigkeit von $G_R(s)$ auf

d) Ist das System mit einem P-Regler $G_R(s) = K_R$ für ein $K > 0$ stabilisierbar? Falls ja, bestimmen sie mit Hilfe des Hurwitz-Kriteriums den Bereich für K_R in Abhängigkeit von K, für den der geschlossene Regelkreis asymptotisch stabil ist.

Aufgabe 2: Reglerentwurf nach Ziegler-Nichols

Aufgaben: c) Stellen Sie die Gesamtübertragungsfunktion $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$ in doppelbruchfreier Form in Abhängigkeit von $G_R(s)$ auf

$$G_V(s) = G_0(s) \cdot G_R(s)$$

$$G_r(s) = G_{12}(s)$$

$$\longrightarrow G(s) = \frac{G_0 \cdot G_R}{1 + G_0 G_R G_{12}}$$

$$1 + G_0 G_R G_{12} = 1 + G_R \frac{2K\cancel{(s+2)}}{s^4+7s^3+16s^2+12s-2} \cdot \frac{1}{\cancel{s+2}}$$

$$= \frac{s^4+7s^3+16s^2+12s-2+2K\,G_R(s)}{s^4+7s^3+16s^2+12s-2}$$

Aufgabe 2: Reglerentwurf nach Ziegler-Nichols

Aufgaben: c) Stellen Sie die Gesamtübertragungsfunktion $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$ in doppelbruchfreier Form in Abhängigkeit von $G_R(s)$ auf

$$G(s) = \frac{2K(s+2)\,G_R(s)}{\cancel{s^4+7s^3+16s^2+12s-2}} \cdot \frac{\cancel{s^4+7s^3+16s^2+12s-2}}{s^4+7s^3+16s^2+12s-2K\,G_R(s)}$$

$$= \frac{2K\,G_R(s)(s+2)}{s^4+7s^3+16s^2+12s-2+2K\,G_R(s)}$$

Aufgabe 2: Reglerentwurf nach Ziegler-Nichols

Aufgaben: d) Ist das System mit einem P-Regler $G_R(s) = K_R$ für ein $K > 0$ stabilisierbar? Falls ja, bestimmen sie mit Hilfe des Hurwitz-Kriteriums den Bereich für K_R in Abhängigkeit von K, für den der geschlossene Regelkreis asymptotisch stabil ist.

$G_R(s) = K_R$

$$G(s) = \frac{2KK_R(s+2)}{s^4 + 7s^3 + 16s^2 + 12s \underbrace{-2 + 2KK_R}_{a_0}}$$

$$\overline{a_4 s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 K_R s - a_0 K_R}$$

notw. Bed

$a_0 > 0$

$-2 + 2KK_R > 0$

$$\boxed{K_R > \frac{1}{K}}$$

$K > 0$

Aufgabe 2: Reglerentwurf nach Ziegler-Nichols

Aufgaben: d) Ist das System mit einem P-Regler $G_R(s) = K_R$ für ein $K > 0$ stabilisierbar? Falls ja, bestimmen sie mit Hilfe des Hurwitz-Kriteriums den Bereich für K_R in Abhängigkeit von K, für den der geschlossene Regelkreis asymptotisch stabil ist.

hin. Bed:

$H_1 \overset{\text{det}}{=} a_3 = 7 > 0$

$H_2 = \det \begin{vmatrix} 7 & 12 \\ 1 & 16 \end{vmatrix} = 100 > 0$

$H_3 = \det \begin{vmatrix} 7 & 12 & 0 \\ 1 & 16 & -2+2KK_R \\ 0 & 7 & 12 \end{vmatrix} = 1344 - 144 + 98 - 98KK_R > 0$

$\Rightarrow K_R < \frac{13{,}25}{K}$

$\boxed{\frac{1}{K} < K_R < \frac{13{,}25}{K}}$

↳ System ist stabilisierbar

Aufgabe 2: Reglerentwurf nach Ziegler-Nichols

Aufgaben: e) Das System $G(s)$ wird nun mit einem $K_R = 12$ geregelt und mit einem Einheitssprung $u(t) = 1(t)$ beaufschlagt. Es stellt sich ein stationärer Endwert von $y_\infty = 12$ ein. Bestimmen Sie K.

$$y_\infty = \lim_{s\to 0} \cancel{s} \cdot G(s) \cdot \frac{1}{\cancel{s}} = \lim_{s\to 0} G(s)$$

$$G(s) = \frac{24K(s+2)}{s^4 + 7s^3 + 16s^2 + 12s - 2 + 24K}$$

$$12 = \frac{24K \cdot 2}{-2 + 24K} \Rightarrow \boxed{K = \frac{1}{10}}$$

$$\Rightarrow \boxed{10 < K_R < 132{,}5}$$

K_{krit}

Reglerentwurf nach Ziegler & Nichols

- Die dafür notwendige Reglerverstärkung wird $\boxed{K_{krit}}$ genannt
- Die Periodendauer der Dauerschwingung wird mit T_{krit} bezeichnet

- Ermittlung der Reglerparameter aus folgender Tabelle:

	Reglertypen	Reglereinstellwerte K_R	T_I	T_D
Methode I	P	0,5 K_{Rkrit}	-	-
	PI	0,45 K_{Rkrit}	0,85 T_{krit}	-
	PID	0,6 K_{Rkrit}	0,5 T_{krit}	0,12 T_{krit}

Aufgabe 2: Reglerentwurf nach Ziegler-Nichols

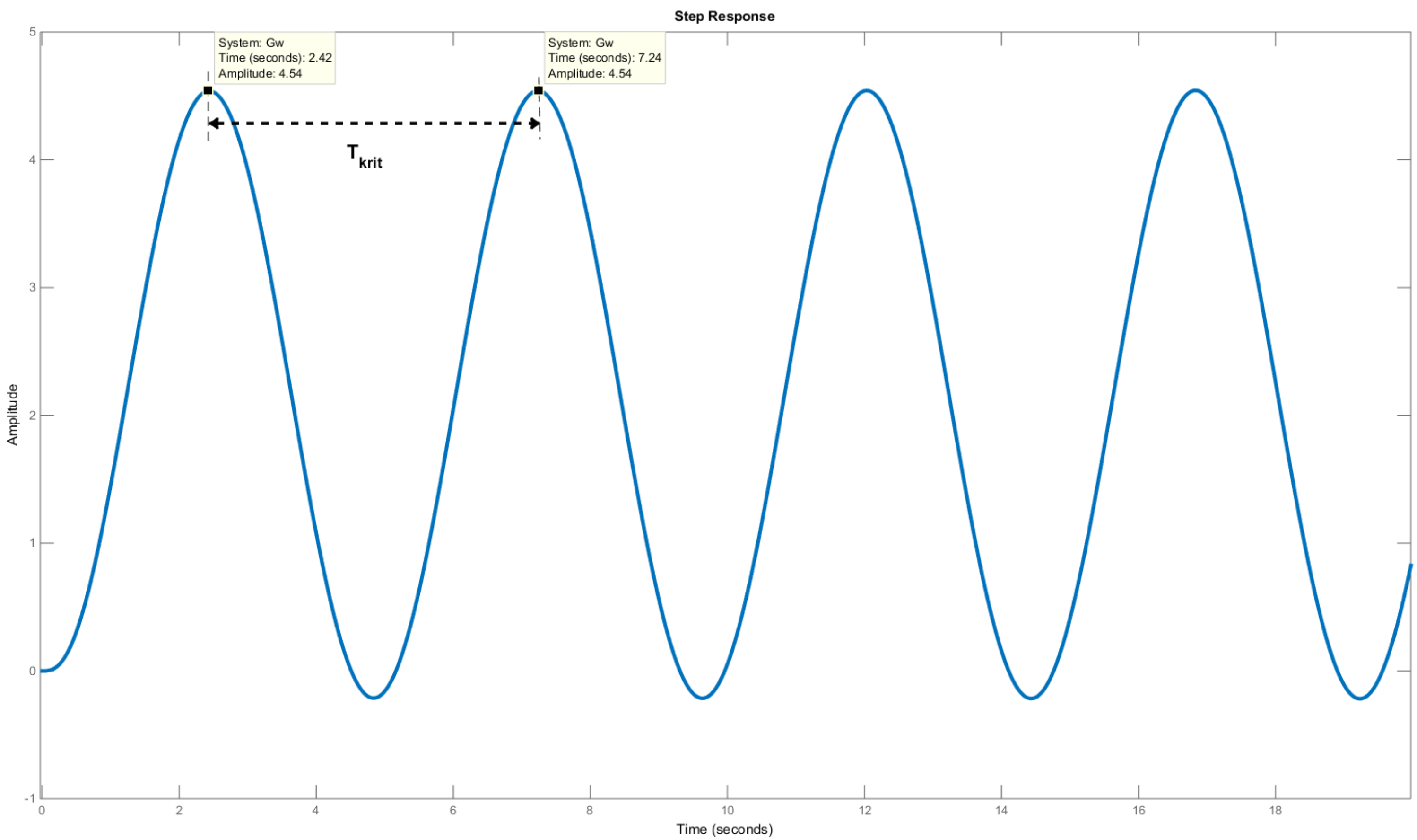
Aufgaben: f) Der Regler $G_R(s)$ soll nun mit dem Verfahren nach Ziegler-Nichols ausgelegt werden. Hierbei sollen sowohl ein P- als auch PI- Regler entworfen werden.

Bei einem Schwingversuch wurde an der oberen Stabilitätsgrenze eine Periodendauer von $\underline{T_{krit} = 5s}$ gemessen.

$K_{krit} = 132{,}5$

Aufgabe 2: Reglerentwurf nach Ziegler-Nichols

Bestimmung der kritischen Zeitkonstante/Periodendauer:



Aufgabe 2: Reglerentwurf nach Ziegler-Nichols

Aufgaben: f) Der Regler $G_R(s)$ soll nun mit dem Verfahren nach Ziegler-Nichols ausgelegt werden. Hierbei sollen sowohl ein P-,PI- und ein PID-Regler betrachtet werden.

Reglertypen	Regelparameter		
	K_R	T_N	T_V
P	$0.5 \cdot K_{krit}$	—	—

$K_R = 0{,}5 \cdot K_{krit} = 66{,}25$

$\boxed{G_R(s) = 66{,}25}$

Aufgabe 2: Reglerentwurf nach Ziegler-Nichols

Aufgaben: f) Der Regler $G_R(s)$ soll nun mit dem Verfahren nach Ziegler-Nichols ausgelegt werden. Hierbei sollen sowohl ein P-,PI- und ein PID-Regler betrachtet werden.

$T_{krit} = 5s$

Reglertypen	Regelparameter		
	K_R	T_N	T_V
P	$0.5 \cdot K_{krit}$	—	—
PI	$0.45 \cdot K_{krit}$	$0.85 \cdot T_{krit}$	—

$K_R = 0{,}45 \cdot K_{krit} = 59{,}625$

$T_N = T_I = 0{,}85 \cdot 5 = 4{,}25$

$G_R(s) = 59{,}625 \left(1 + \frac{1}{4{,}25 \cdot s}\right)$

Aufgabe 2: Reglerentwurf nach Ziegler-Nichols

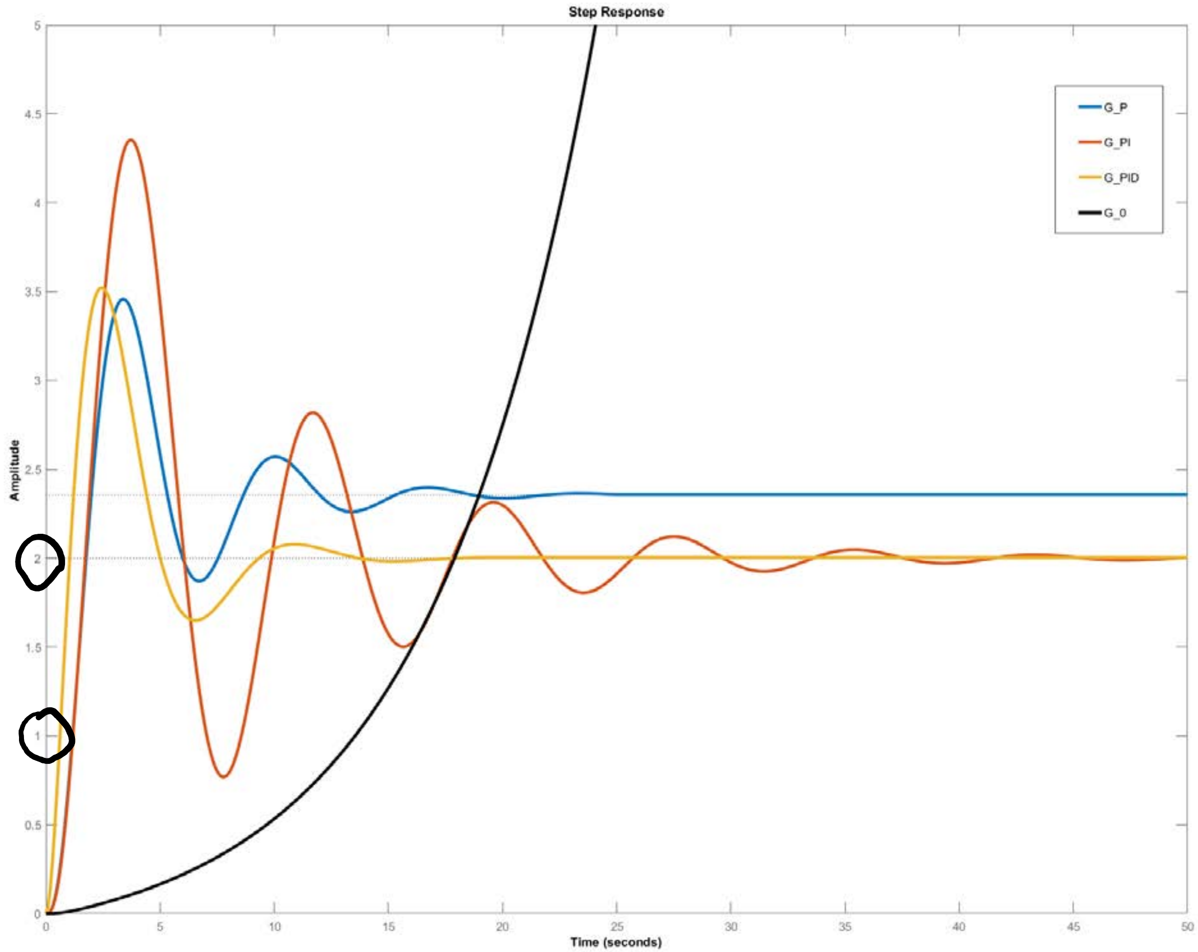
Aufgaben: f) Der Regler $G_R(s)$ soll nun mit dem Verfahren nach Ziegler-Nichols ausgelegt werden. Hierbei sollen sowohl ein P-,PI- und ein PID-Regler betrachtet werden.

Reglertypen	Regelparameter		
	K_R	T_N	T_V
P	$0.5 \cdot K_{krit}$	$-$	$-$
PI	$0.45 \cdot K_{krit}$	$0.85 \cdot T_{krit}$	$-$
PID	$0.6 \cdot K_{krit}$	$0.5 \cdot T_{krit}$	$0.12 \cdot T_{krit}$

Aufgabe 2: Reglerentwurf nach Ziegler-Nichols

- Sprungantworten von $G_0(s)$ und $G(s)$ mit den drei bestimmten Reglern

nicht stationär genau



Aufgabe 2: Reglerentwurf nach Ziegler-Nichols

Anmerkungen zur stationären Genauigkeit

- Wie in dargestellten Sprungantworten ersichtlich, liefert auch ein Regler mit I-Anteil in diesem Fall keine stationäre Genauigkeit
- Ursache?

$$G_r = \frac{1}{s+2}$$

$$h_\infty = \lim_{s \to 0} \frac{1}{s+2} = \frac{1}{2}$$

das sieht der Regler

Messung nicht genau

- freies I-Glied in offener Kette (✓)
- stationär genaue Messung (X)

Aufgabe 3: Polkompensation → stable Polstellen

Gegeben ist das System

$$G(s) = \frac{4}{(s+2)(s+7)(s+8)}$$

Das System $G(s)$ soll im Folgenden mit einem PI-Regler

$$G_R(s) = K_R\left(1 + \frac{1}{T_I}\right)$$

geregelt werden.

Aufgaben:

a) Bestimmen Sie die Nachstellzeit T_I des Reglers so, dass die Polstelle $s = -8$ der Regelstrecke kompensiert wird.

b) Bestimmen Sie den Bereich für K_R für den der geschlossene Regelkreis stabil ist.

c) Wie wirken sich die Polkompensation und die Wahl der Reglerverstärkung K_R auf die Sprungantwort des geschlossenen Regelkreises aus?

Aufgabe 3: Polkompensation

Aufgaben: a) Bestimmen Sie die Nachstellzeit T_I des Reglers so, dass die Polstelle $s = -8$ der Regelstrecke kompensiert wird.

$$G_R(s) = K_R\left(1 + \frac{1}{T_I s}\right) = K_R\left(\frac{T_I s + 1}{T_I s}\right) = K_R\left(\frac{s + \frac{1}{T_I}}{s}\right)$$

$$\boxed{T_I = \frac{1}{8} = 0{,}125}$$

$$G_0(s) = \frac{4}{(s+2)(s+7)(s+8)} \cdot \frac{K_R\left(s + \frac{1}{T_I}\right)}{s} = \frac{4K_R\cancel{(s+8)}}{(s+2)(s+7)\cancel{(s+8)}}$$

$$= \frac{4K_R}{s(s+2)(s+7)}$$

$$\boxed{T_I = \frac{1}{8}}$$

Aufgabe 3: Polkompensation

Aufgaben: b) Bestimmen Sie den Bereich für K_R für den der geschlossene Regelkreis stabil ist.

$$1 + G_0(s) = 1 + \frac{4K_R}{s(s+2)(s+7)} = \frac{s(s+2)(s+7) + 4K_R}{s(s+2)(s+7)}$$

$$G(s) = \frac{G_0}{1+G_0} = \frac{4K_R}{\cancel{s(s+2)(s+7)}} \cdot \frac{\cancel{s(s+2)(s+7)}}{s(s+2)(s+7)+4K_R} = \frac{4K_R}{s^3+9s^2+14s+4K_R}$$

not Bed.: $4K_R > 0 \longrightarrow K_R > 0$

hin Bed.: $H_1 = \det a_2 = 9 > 0$

$$H_2 = \det \begin{vmatrix} 9 & 4K_R \\ 1 & 14 \end{vmatrix} = 126 - 4K_R > 0$$

$\Leftrightarrow 126 > 4K_R$

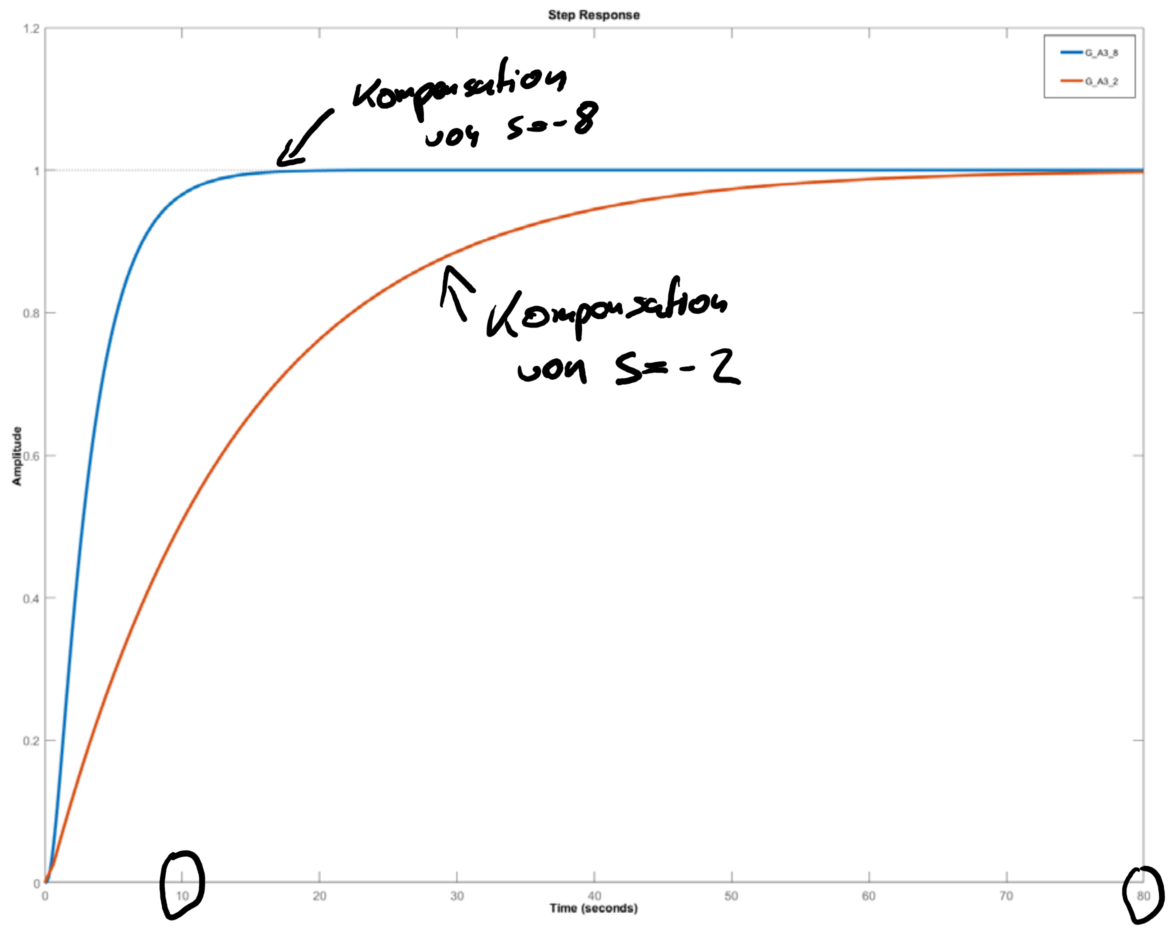
$\Leftrightarrow 31{,}5 > K_R$

$$\boxed{0 < K_R < 31{,}5}$$

Aufgabe 3: Polkompensation

Einfluss der Polkompensation

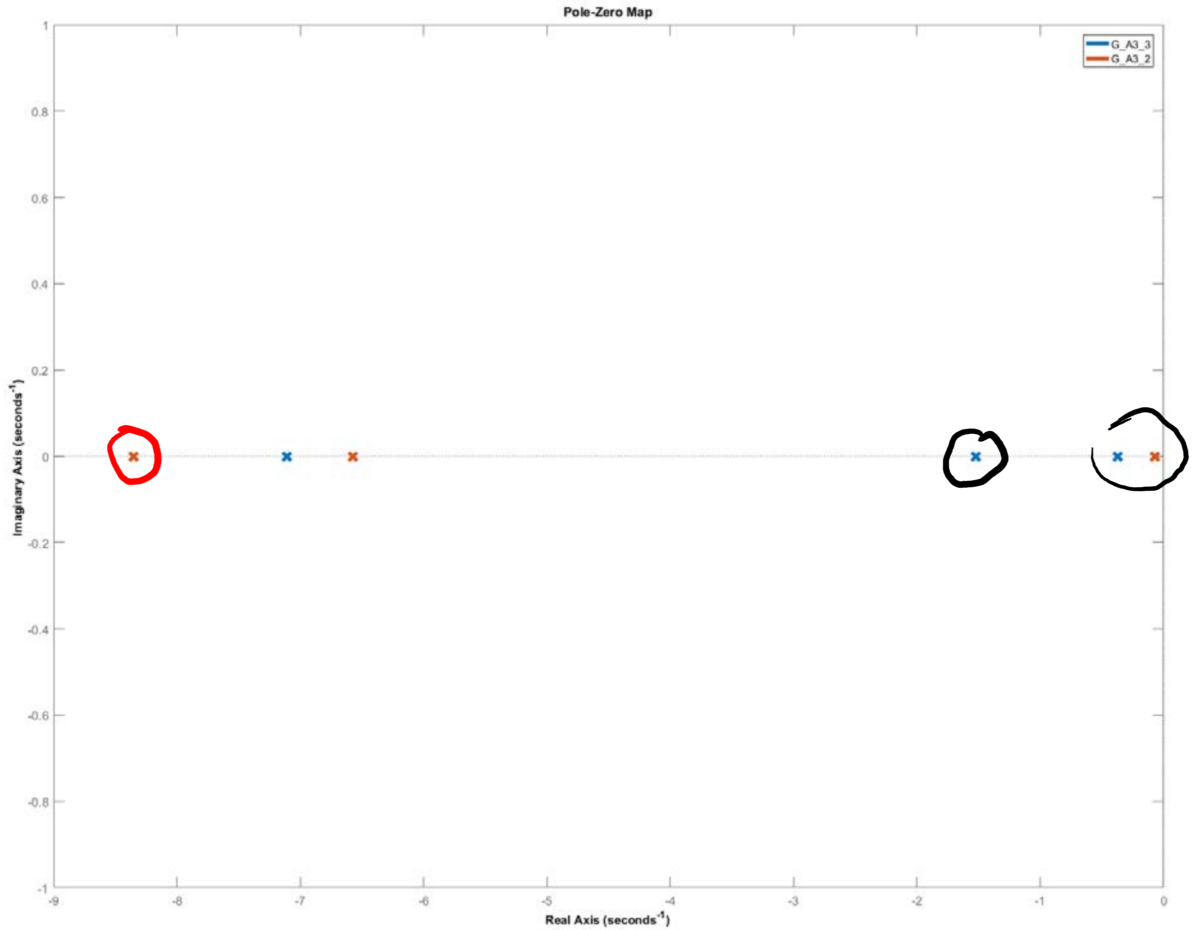
- Vergleich mit Kompensation von $s = -2$
- $K_R = 1$ in beiden Fällen



Aufgabe 3: Polkompensation

Einfluss der Polkompensation

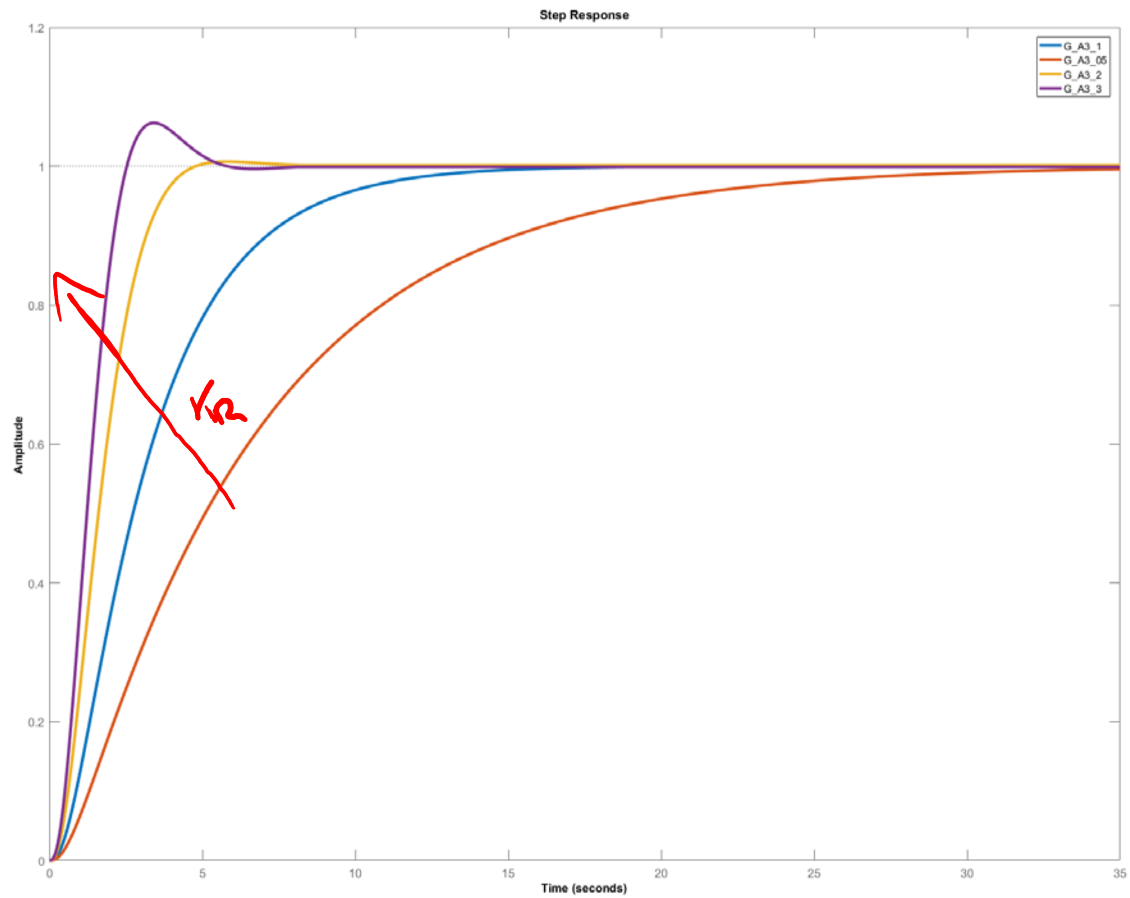
- Vergleich mit Kompensation von $s = -2$
- $K_R = 1$ in beiden Fällen
- Wanderung der Polstellen



Aufgabe 3: Polkompensation

Einfluss von K_R

- Kompensation von $s = -8$ in allen Fällen
- $0{,}5 \leq K_R \leq 3$



Klausurinfos

- Zweigeteilte Klausur: Mess- und **Regelungstechnik**
  - Zwei unabhängige Klausuren, hintereinander geschrieben
  - Gemeinsame Bewertung (oder anders: Es müssen nicht beide Teil „bestanden“ werden)

gemeinsame Bestehensgrenze

- Klausurteil SRT besteht wiederum aus **zwei** Teilen:
  - Fragenteil (ohne Hilfsmittel), bezieht sich auf die Vorlesung
  - Rechenteil mit drei Aufgaben, alle schriftlichen Hilfsmittel zugelassen
    - Orientiert sich inhaltlich an der Übung
  - Auswahlklausur: ~70% für eine 1,0 im SRT-Teil, 4,0 bei ~30%

→ Fragen: Email: felix.gossmann@unibw.de