8. Übung zur Vorlesung „Steuer- und Regelungstechnik“

Stabilität von Systemen, Sprungantworten, stationäre Genauigkeit

Felix Goßmann M.Sc.

Institut für Steuer- und Regelungstechnik
Fakultät für Luft- und Raumfahrttechnik
Universität der Bundeswehr München

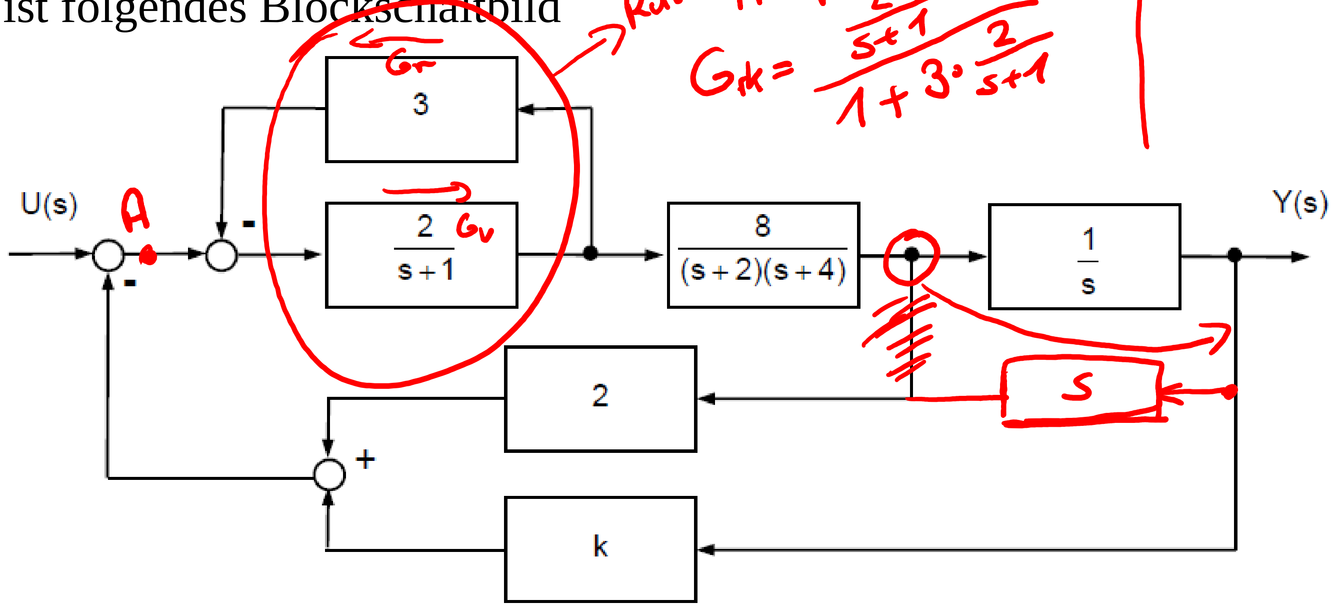
Aufgabe 1 - Stabilität

$A = [U(s) - 2sY(s) - kY(s)]$

Gegeben ist folgendes Blockschaltbild

Rückkopplung

$$G_{rk} = \frac{\frac{2}{s+1}}{1 + 3 \cdot \frac{2}{s+1}}$$



Aufgaben: a) Bestimmen sie die Übertragungsfunktion $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$ mit dem noch freien Parameter k

Aufgabe 1 - Stabilität

Aufgaben: a) Bestimmen sie die Übertragungsfunktion $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$ mit dem noch freien Parameter k

$$Y(s) = \frac{\frac{2}{s+1}}{1 + 3\,\frac{2}{s+1}} \cdot \frac{8}{(s+2)(s+4)} \cdot \frac{1}{s} \cdot A$$

$$Y(s) = \frac{\frac{2}{s+1}}{1 + 3 \cdot \frac{2}{s+1}} \cdot \frac{8}{s(s+2)(s+4)} \left[U(s) - (2s+k)\, Y(s) \right]$$

$$\vdots$$

$G(s)$

$$Y(s) = \frac{16}{s(s+2)(s+4)(s+7) + 16(2s+k)} \cdot U(s)$$

Aufgabe 1 - Stabilität

Aufgaben: b) Ermitteln sie mit dem Hurwitz-Kriterium den k-Bereich, für den das System asymptotisch stabil ist.

c) Bestimmen Sie den stat. Endwert für den Fall $u(t) = 1(t)$ und $\mathrm{k} = \frac{k_{max}}{4}$ mit dem in b) bzw. c) ermittelten k_{max}.
Was können sie bzg. des stat. Endwertes im Fall $k = 2k_{max}$ aussagen?

Aufgabe 1 - Stabilität

Aufgaben: b) Ermitteln sie mit dem Hurwitz-Kriterium den k-Bereich, für den das System asymptotisch stabil ist.

$$N(s) = s(s+2)(s+4)(s+7) + 16(2s+k)$$

$$= \underbrace{1}_{a_4} \cdot s^4 + \underbrace{13}_{a_3} s^3 + \underbrace{50}_{a_2} s^2 + \underbrace{88}_{a_1} s + \underbrace{16k}_{a_0}$$

not. Bed: - a_i existieren (✓) $n = 4$

-> $16k > 0$ $\longrightarrow$ $\boxed{k > 0}$

hin. Bed: $n = 4$ $\longrightarrow$ $\boxed{H_{n-1} = H_3}$

Aufgabe 1 - Stabilität

Aufgaben: b) Ermitteln sie mit dem Hurwitz-Kriterium den k-Bereich, für den das System asymptotisch stabil ist.

$$\det(H_1) = a_3 = 13 > 0 \quad (\checkmark)$$

$$\det(H_2) = \det\begin{pmatrix} a_3 & a_1 \\ a_4 & a_2 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 13 & 88 \\ 1 & 50 \end{pmatrix} = 13 \cdot 50 - 1 \cdot 88 = 562 > 0 \; (\checkmark)$$

$$\det(H_3) = \det\begin{pmatrix} a_3 & a_1 & 0 \\ a_4 & a_2 & a_0 \\ 0 & a_3 & a_1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 13 & 88 & 0 \\ 1 & 50 & 16k \\ 0 & 13 & 88 \end{pmatrix} \begin{matrix} 13 & 88 \\ 1 & 50 \\ 0 & 13 \end{matrix}$$

$$= 13 \cdot 50 \cdot 88 - 88 \cdot 88 \cdot 1 - 13 \cdot 13 \cdot 16k \overset{!}{>} 0$$

Stabilitätsbereich

$$\boxed{0 < k < 18{,}295}$$

$$\Rightarrow k < 18{,}295$$

Aufgabe 1 - Stabilität

Sprungantwort

$k_{max} = 18{,}295$

Aufgaben: e) Bestimmen Sie den stat. Endwert für den Fall $u(t) = 1(t)$ und $\boxed{k = \frac{k_{max}}{4}}$ mit dem in b) bzw. c) ermittelten k_{max}. Was können sie bzg. des stat. Endwertes im Fall $k = 2k_{max}$ aussagen?

Endwertsatz

stat. Endwert:

$$\boxed{y_\infty = \lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} s\cdot Y(s)}$$

Stabilität erforderlich

$$Y(s) = G(s)\cdot U(s)$$

$$\boxed{u(t) = 1(t) \;\downarrow\; U(s) = \frac{1}{s}}$$

$$y_\infty = \lim_{s\to 0} \underbrace{\cancel{s}\cdot G(s)\cdot \frac{1}{\cancel{s}}}_{Y(s)} = \lim_{s\to 0} G(s) = \lim_{s\to 0} \frac{16}{s^4+13s^3+50s^2+88s+16k}$$

gilt nur bei der Sprungantwort

$$\Rightarrow y_\infty = \frac{16}{16k} = \frac{1}{k}$$

$$y_\infty = \frac{4}{k_{max}} = \underline{0{,}219}$$

y_∞ für $k = 2k_{max}$ existiert nicht

Aufgabe 2: Sprungantwort eines Systems

Gegeben ist die folgende Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{2}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$$

Zusätzlich wurde eine Lösungen der charakteristischen Gleichung zu

↳ Nennerpolynom

$$s_1 = -1$$

bestimmt.

Aufgaben:

a) Ermitteln Sie die Sprungantwort des Systems ~~im eingeschwungenen Zustand~~ und transformieren Sie diese in den Zeitbereich.

b) Berechnen sie den stationären Endwert der in a) ermittelten Sprungantwort.

Aufgabe 2: Sprungantwort eines Systems

Aufgaben: a) Ermitteln Sie die Sprungantwort des Systems im eingeschwungenen Zustand und transformieren Sie diese in den Zeitbereich.

$$Y(s) = G(s) \cdot U(s)$$

Sprungantwort: $H(s) = G(s) \cdot \frac{1}{s}$

$U(s) = \frac{1}{s}$

$$H(s) = \frac{2}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6} \cdot \frac{1}{s} = \frac{2}{s(s^3 + 6s^2 + 11s + 6)}$$

Keine Korrespondenz

$$\frac{2}{s(s+a)(s+b)(s+c)} = \underbrace{\frac{A}{s}}_{\substack{\text{Integrator} \\ (\text{Nr. } 1)}} + \underbrace{\frac{B}{s+a} + \frac{C}{s+b} + \frac{D}{s+c}}_{PT_1\text{-Glieder } (\text{Nr. } 3)}$$

Aufgabe 2: Sprungantwort eines Systems

Aufgaben: a) Ermitteln Sie die Sprungantwort des Systems im eingeschwungenen Zustand und transformieren Sie diese in den Zeitbereich.

Nullstellen von $s^3+6s^2+11s^2+6$

Eine NS bekannt

$s=-1$

$$
\begin{array}{l}
s^3+6s^2+11s+6 = (s+1)(s^2+5s+6) \\
-(s^3+s^2) \\
\quad 5s^2+11s \\
\quad -(5s^2+5s) \\
\qquad 6s+6 \\
\qquad -(6s+6) \\
\qquad\quad 0
\end{array}
$$

$$s^2+5s+6=0$$

$$s=-\frac{5}{2}\pm\sqrt{\frac{25}{4}-\underbrace{\frac{24}{4}}_{=6}}$$

$$s=-\frac{5}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}}$$

$$s=-\underbrace{\frac{4}{2}}_{=2} \quad \vee \quad s=-\underbrace{\frac{6}{2}}_{=3}$$

Aufgabe 2: Sprungantwort eines Systems

Aufgaben: a) Ermitteln Sie die Sprungantwort des Systems im eingeschwungenen Zustand und transformieren Sie diese in den Zeitbereich.

$$H(s) = \frac{2}{s(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s+2} + \frac{D}{s+3}$$

$$= \frac{A(s+1)(s+2)(s+3) + Bs(s+2)(s+3) + Cs(s+1)(s+3) + Ds(s+1)(s+2)}{s(s+1)(s+2)(s+3)}$$

$s=0$: $\quad 2 = A \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \iff 2 = 6A \implies A = \frac{1}{3}$

$s=-1$: $\quad 2 = B(-1)\underbrace{(-1+2)}_{1}\underbrace{(-1+3)}_{2} \iff 2 = -2B \implies B = -1$

$s=-2$: $\quad 2 = C(-2)(-2+1)(-2+3) \iff 2 = 2C \implies C = 1$

$s=-3$: $\quad 2 = D(-3)(-3+1)(-3+2) \iff 2 = -6D \implies D = -\frac{1}{3}$

Aufgabe 2: Sprungantwort eines Systems

Aufgaben: a) Ermitteln Sie die Sprungantwort des Systems im eingeschwungenen Zustand und transformieren Sie diese in den Zeitbereich.

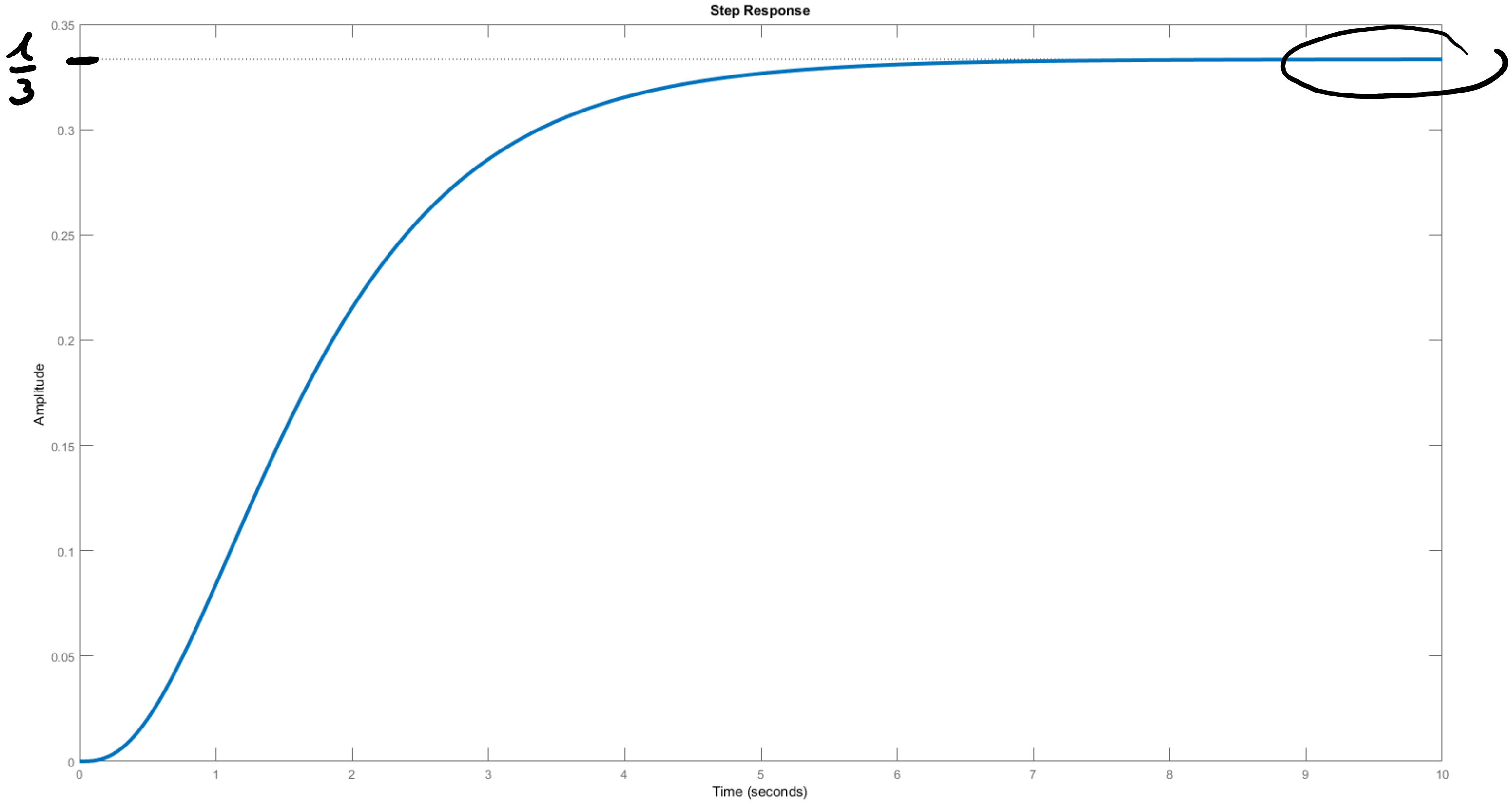
$$H(s) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{s+3}$$

$$\rightarrow \boxed{h(t) = \frac{1}{3} - e^{-t} + e^{-2t} - \frac{1}{3} e^{-3t}}$$

1	$1(t)$	$\frac{1}{s}$
3	$e^{-at} \cdot 1(t)$	$\frac{1}{s+a}$

Aufgabe 2: Sprungantwort eines Systems

Sprungantwort:



Aufgabe 2: Sprungantwort eines Systems

Aufgabe: b) Berechnen sie den stationären Endwert der in a) ermittelten Sprungantwort.

$$h_\infty = \lim_{s \to 0} s \cdot H(s) = \lim_{s \to 0} \cancel{s} \cdot G(s) \frac{1}{\cancel{s}} = \lim_{s \to 0} G(s)$$

$$= \lim_{s \to 0} \frac{2}{\underset{\to 0}{s^3} + \underset{\to 0}{6s^2} + \underset{\to 0}{11s} + 6} = \frac{2}{6} = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$$

Aufgabe 2: Sprungantwort eines Systems

Gegeben ist die folgende Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{2}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$$

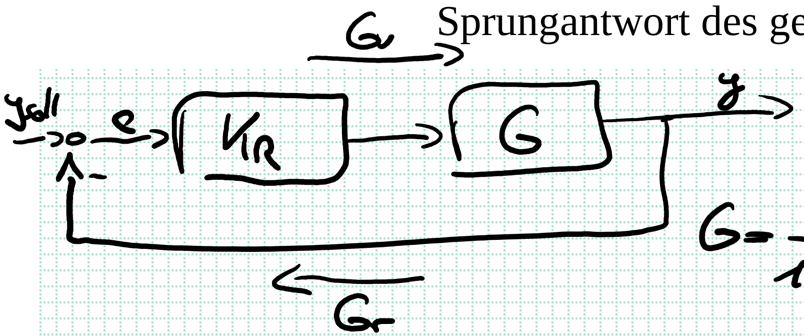
Aufgaben:

c) Betrachten Sie für die Übertragungsfunktion des Systems einen Standardregelkreis mit einem P-Regler $G_R(s) = K_R$. Ermitteln Sie die Sprungantwort des geschlossenen Regelkreises in Abhängigkeit von K_R.

d) Berechnen Sie den stationären Endwert des geschlossenen Regelkreises in Abhängigkeit von K_R und bewerten Sie das Ergebnis im Hinblick auf die stationäre Genauigkeit eines Regelkreises.

Aufgabe 2: Sprungantwort eines Systems

Aufgaben: c) Betrachten Sie für die Übertragungsfunktion des Systems einen Standardregelkreis mit einem P-Regler $G_R(s) = K_R$. Ermitteln Sie die Sprungantwort des geschlossenen Regelkreises in Abhängigkeit von K_R.



$$G = \frac{G_v}{1 + \underbrace{G G_r}_{G_0}}$$

$$G_v = \frac{2K_R}{s^3+6s^2+11s+6}$$

$$G_r = 1$$

$$1 + G_0 = 1 + \frac{2K_R}{s^3+6s^2+11s+6} = \frac{s^3+6s^2+11s+6+2K_R}{s^3+6s^2+11s+6}$$

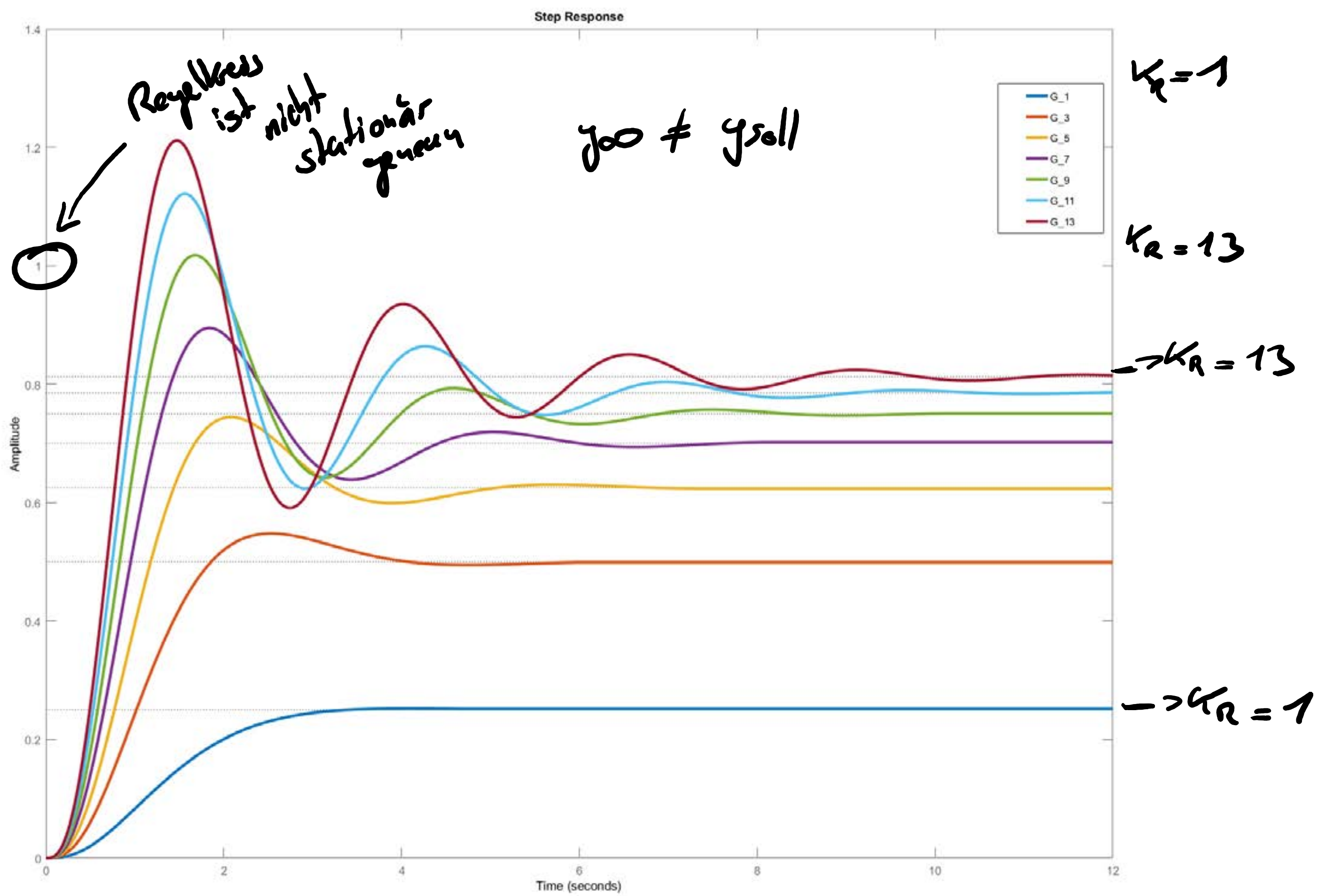
$$G(s) = \frac{2K_R}{\cancel{s^3+6s^2+11s+6}} \cdot \frac{\cancel{s^3+6s^2+11s+6}}{s^3+6s^2+11s+6+2K_R} = \underline{\underline{\frac{2K_R}{s^3+6s^2+11s+6+2K_R}}}$$

Aufgabe 2: Sprungantwort eines Systems

Aufgaben: c) Betrachten Sie für die Übertragungsfunktion des Systems einen Standardregelkreis mit einem P-Regler $G_R(s) = K_R$. Ermitteln Sie die Sprungantwort des geschlossenen Regelkreises in Abhängigkeit von K_R.

$$H(s) = G(s) \cdot \frac{1}{s} = \frac{2K_R}{s(s^3 + 6s^2 + 11s + 6 + 2K_R)}$$

Aufgabe 2: Sprungantwort eines Systems



Aufgabe 2: Sprungantwort eines Systems

Aufgaben: d) Berechnen Sie den stationären Endwert des geschlossenen Regelkreises in Abhängigkeit von K_R und bewerten Sie das Ergebnis im Hinblick auf die stationäre Genauigkeit eines Regelkreises.

$$\lim_{s\to 0} s \cdot H(s) = \lim_{s\to 0} \cancel{s} \cdot G(s) \frac{1}{\cancel{s}} = \lim_{s\to 0} \frac{2K_R}{\underbrace{s^3}_{\to 0} + \underbrace{6s^2}_{\to 0} + \underbrace{11s}_{\to 0} + 6 + 2K_R}$$

$$= \frac{2K_R}{6 + 2K_R} = \frac{K_R}{3 + K_R}$$

$y_{soll} = 1 \longrightarrow y_\infty < 1 \Rightarrow e \neq 0$ egal welches K_R

$\Rightarrow$ stationäre Genauigkeit nicht vorhanden

Aufgabe 3: Stationäre Genauigkeit

vorher

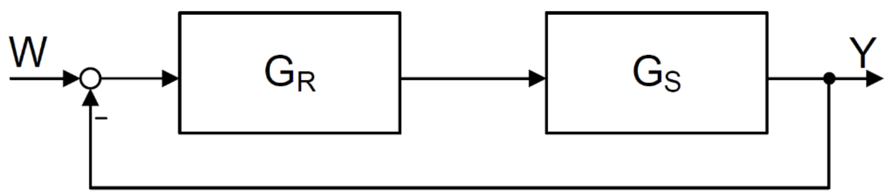
$$G(s) = \frac{2}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$$

keinen Integrator

Gegeben ist ein IT_1-System mit der Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)} = \underbrace{\frac{1}{s}}_{I} \cdot \underbrace{\frac{1}{s+1}}_{PT_1}$$

Es wird ein Standardregelkreis der Form



betrachtet, wobei Regler ein P-Regler $G_R(s) = K_R$ eingesetzt wird.

Aufgabe: Berechnen Sie die Übertragungsfunktion des geschlossenen Regelkreises und den stationären Endwert der Sprungantwort. Welche Aussage lässt sich aufgrund des Ergebnisses im Hinblick auf die stationäre Genauigkeit treffen?

Aufgabe 3: Stationäre Genauigkeit

Aufgabe: Berechnen Sie die Übertragungsfunktion des geschlossenen Regelkreises und den stationären Endwert der Sprungantwort. Welche Aussage lässt sich aufgrund des Ergebnisses im Hinblick auf die stationäre Genauigkeit treffen?

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)} \qquad \underline{G_R = K_R}$$

$$G_v(s) = G_R\, G(s) = \frac{K_R}{s(s+1)} \qquad G = \frac{G_v}{1 + G_v G_r}$$

$$G_r = 1$$

$$1 + \underbrace{G_v G_r}_{G_0} = 1 + \frac{K_R}{s(s+1)} = \frac{s(s+1) + K_R}{s(s+1)}$$

Aufgabe 3: Stationäre Genauigkeit

Aufgabe: Berechnen Sie die Übertragungsfunktion des geschlossenen Regelkreises und den stationären Endwert der Sprungantwort. Welche Aussage lässt sich aufgrund des Ergebnisses im Hinblick auf die stationäre Genauigkeit treffen?

$$G(s) = \frac{K_R}{\cancel{s(s+1)}} \cdot \frac{\cancel{s(s+1)}}{s(s+1)+K_R} = \frac{K_R}{s^2+s+K_R}$$

$$H(s) = G(s) \cdot \frac{1}{s}$$

$$y_{soll} = 1$$

$$\lim_{s\to 0} \cancel{s} \cdot \overbrace{G(s)\cdot\frac{1}{\cancel{s}}}^{H(s)} = \lim_{s\to 0} \frac{K_R}{s^2+s+K_R} = \frac{K_R}{K_R} = 1 = y_\infty$$

Regelfehler: $e = 0$ $\rightarrow$ stationär genau, unabhängig von K_R

offenen Kette G_0 : Integrator enthalten $\rightarrow$ stationär genau