7. Übung zur Vorlesung „Steuer- und Regelungstechnik“

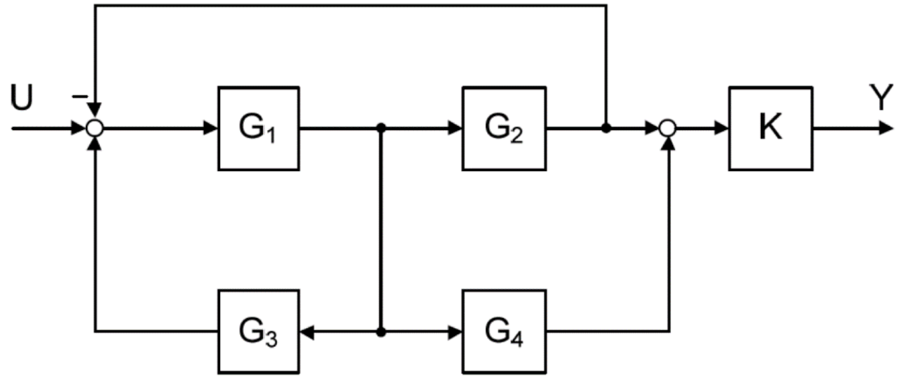
Stabilität, künstliche Stabilisierung

Felix Goßmann M.Sc.

Institut für Steuer- und Regelungstechnik
Fakultät für Luft- und Raumfahrttechnik
Universität der Bundeswehr München

Nachtrag aus Übung 6.

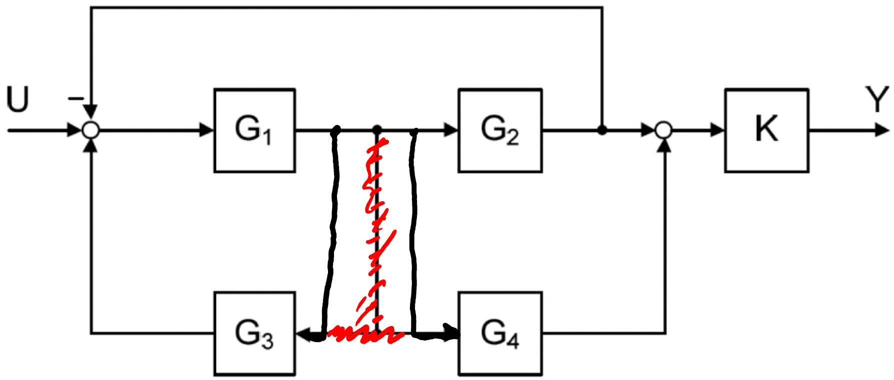
Gegeben ist das folgende Blockschaltbild

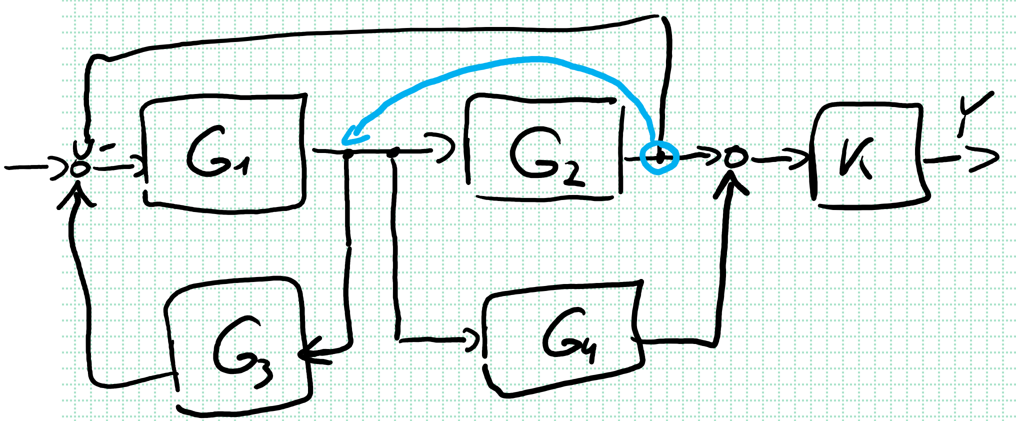


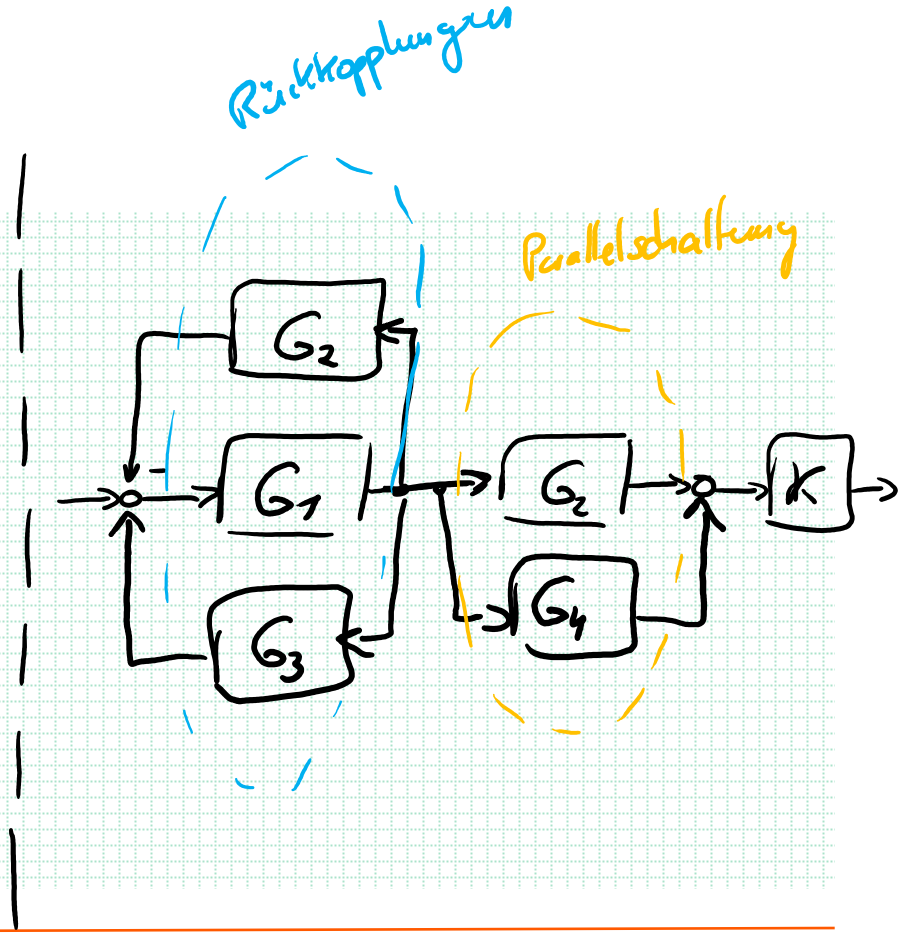
mit den allgemeinen Übertragungsfunktionen $G_1(s) - G_4(s)$ sowie $K(s)$

Aufgabe: Fassen Sie das oben aufgeführte System zu einer Übertragungsfunktion $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$ zusammen.

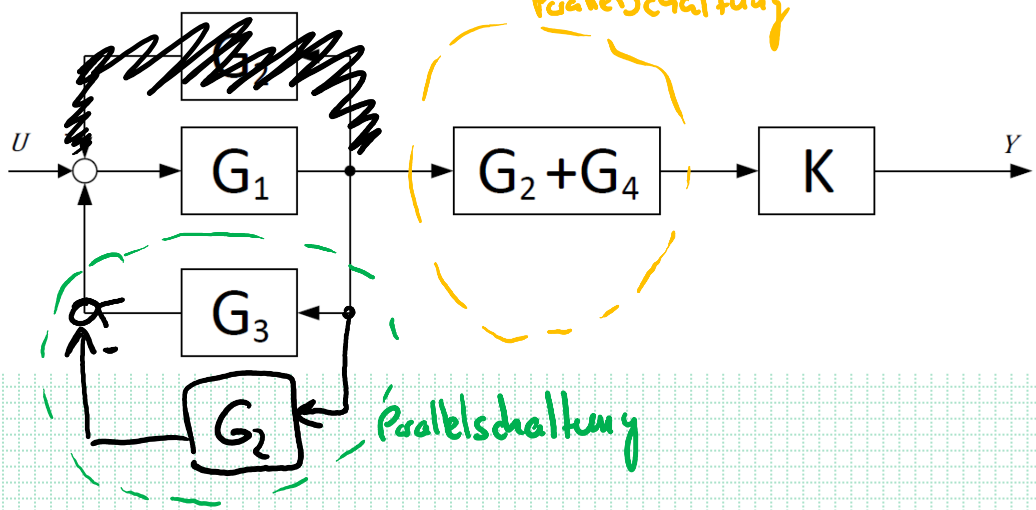
Aufgabe 4: Zusammenfassen von Blockschaltbildern







Aufgabe 4: Zusammenfassen von Blockschaltbildern

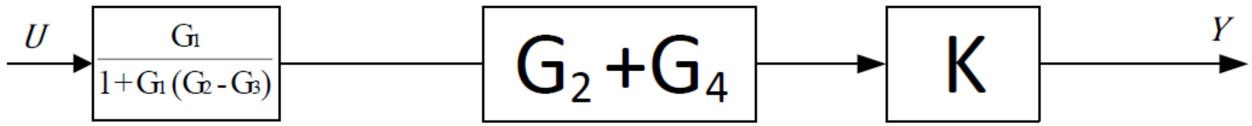


$$G_v = G_1$$

$$G_r = G_3 - G_2$$

$$G_{RK} = \frac{G_v}{1 - \underbrace{G_v G_r}_{G_0}} = \frac{G_1}{1 - G_1(G_3 - G_2)}$$

Aufgabe 4: Zusammenfassen von Blockschaltbildern



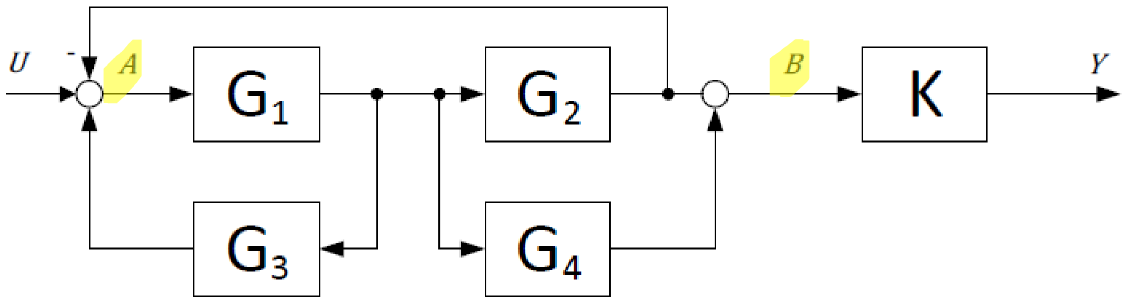
Rückkopplung G_{RK}

Parallelschaltung

$$G = \frac{Y}{U} = G_{RK}(G_2 + G_4) \cdot K$$

$$= \frac{G_1(G_2 + G_4)K}{1 - G_1(G_3 - G_2)}$$

Aufgabe 4: Zusammenfassen von Blockschaltbildern



$$Y = K \cdot B$$

$$B = A\, G_1 (G_2 + G_4)$$ nach B auflösen

$$A = U + A \cdot G_1 \cdot G_3 - A \cdot G_1 G_2$$ A auflösen

Aufgabe 1: Stabilität

Gegeben ist das folgende Zustandssystem

$$\dot{x} = A \cdot x + B \cdot u$$
$$y = C \cdot x$$

mit den Matrizen

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe: Zeigen Sie, dass das gegebene Zustandssystem asymptotisch stabil ist.

Aufgabe 1: Stabilität

asymptotische Stabilität $\longrightarrow$ alle Eigenwerte von A besitzen negative Realteile

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \text{Eigenwerte}$$

$$\det(\lambda I - A) = \det\begin{pmatrix} \lambda+4 & 0 & 0 \\ -3 & \lambda+2 & -1 \\ 3 & 0 & \lambda+1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \lambda+4 & 0 \\ -3 & \lambda+2 \\ 3 & 0 \end{matrix}$$

$$= (\lambda+4)(\lambda+2)(\lambda+1) + 0 + 0 - 0$$

$$= (\lambda+4)(\lambda+2)(\lambda+1) \longleftarrow \text{char. Polynom}$$

Eigenwerte: $\boxed{\lambda_1 = -4 \quad \lambda_2 = -2 \quad \lambda_3 = -1}$ $\longrightarrow$ alle drei negativ $\nearrow$ Zustandssystem ist asymptotisch stabil

Aufgabe 2 – Stabilität von Übertragungsfunktionen

Gegeben sind die beiden Übertragungsfunktionen

$$G_1(s) = \frac{1}{s^2 + 5s + 6}$$

$$G_2(s) = \frac{1}{s^2 + s - 6}$$

Aufgaben:

a) Berechnen Sie die Polstellen der beiden Übertragungsfunktionen

b) Betrachten Sie beide Übertragungsfunktionen jeweils in einem Standardregelkreis mit einem P-Regler $G_R(s) = K_R$. Bestimmen Sie jeweils die Übertragungsfunktion des geschlossenen Regelkreises und deren Polstellen in Abhängigkeit von K_R.

c) Beschreiben Sie jeweils den Einfluss der Reglerverstärkung K_R auf die Lage der Polstellen und die Stabilität des geschlossenen Regelkreises.

Aufgabe 2 – Stabilität von Übertragungsfunktionen

Aufgaben: a) Berechnen Sie die Polstellen der beiden Übertragungsfunktionen

↳ Nullstellen des Nenners $\underline{\underline{N(s)}}$

$$G_1(s) = \frac{1}{s^2+5s+6}$$

$\underline{\underline{(sI-A)^{-1}}}$

$$N(s) = s^2 + 5s + 6$$

$$s = -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - 6}$$

$$= -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}}$$

$$s = -\frac{4}{2} = \underline{\underline{-2}}$$

$$s = -\frac{6}{2} = \underline{\underline{-3}}$$

negativ (Realteil)

↓

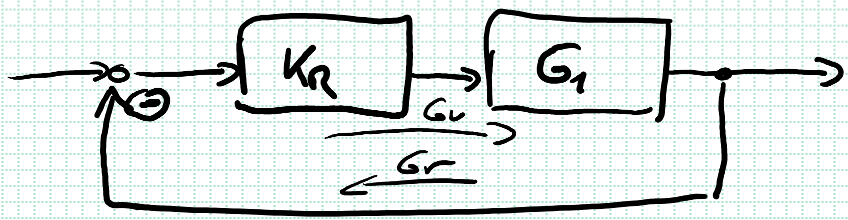
ÜF asympt. stabil

$$\boxed{\text{Polstellen der ÜF} \triangleq \text{Eigenwerten der DGL}}$$

Aufgabe 2 – Stabilität von Übertragungsfunktionen

Aufgaben: b) Betrachten Sie beide Übertragungsfunktionen jeweils in einem Standardregelkreis mit einem P-Regler $G_R(s) = K_R$. Bestimmen Sie jeweils die Übertragungsfunktion des geschlossenen Regelkreises und deren Polstellen in Abhängigkeit von K_R.

$$G_1(s) = \frac{1}{s^2+5s+6}$$



Standardregelkreis

$$G_v = K_R \cdot G_1 = \frac{K_R}{s^2+5s+6}$$

$$G_r = 1$$

$$G_0 = G_v G_r = \frac{K_R}{s^2+5s+6}$$

$$G = \frac{G_v}{1+G_0}$$

$$1 + G_0 = 1 + \frac{K_R}{s^2+5s+6} = \frac{s^2+5s+6+K_R}{s^2+5s+6}$$

$$G = \frac{K_R}{\cancel{s^2+5s+6}} \cdot \frac{\cancel{s^2+5s+6}}{s^2+5s+6+K_R}$$

$$\Leftrightarrow G = \frac{K_R}{s^2+5s+6+K_R}$$

Aufgabe 2 – Stabilität von Übertragungsfunktionen

Aufgaben: b) Betrachten Sie beide Übertragungsfunktionen jeweils in einem Standardregelkreis mit einem P-Regler $G_R(s) = K_R$. Bestimmen Sie jeweils die Übertragungsfunktion des geschlossenen Regelkreises und deren Polstellen in Abhängigkeit von K_R.

$$\cancel{G_1(s) = \frac{1}{s^2+5s+6}}$$

$$N_G(s) = s^2 + 5s + 6 + K_R$$

$$s = -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - 6 - K_R}$$

$$= -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{1-4K_R}{4}}$$

$$= \frac{-5 \pm \sqrt{1-4K_R}}{2}$$

$$= 0$$

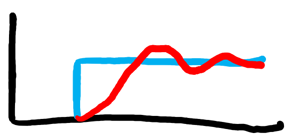
$$1 - 4K_R = 0$$

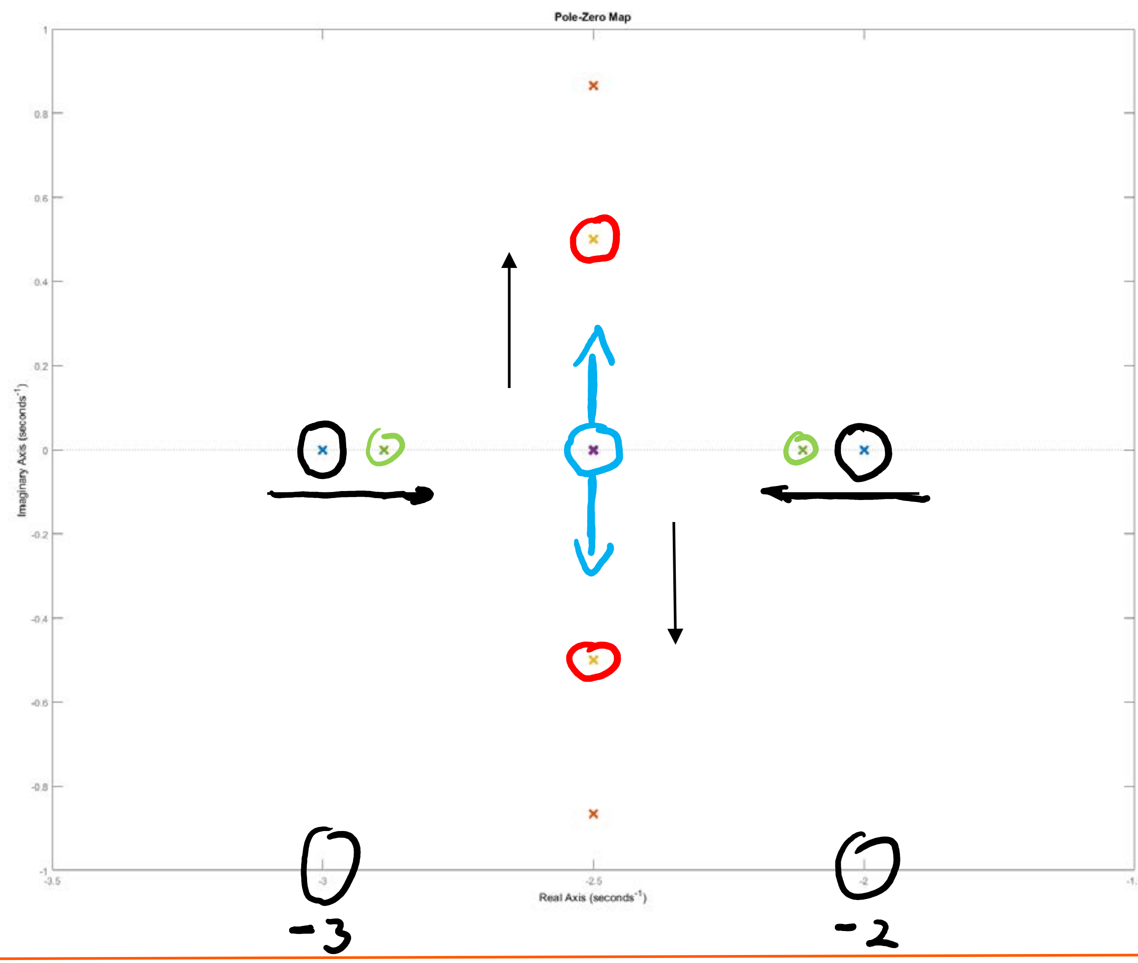
$$K_R = \frac{1}{4}$$

Aufgabe 2 – Stabilität von Übertragungsfunktionen

reellen Polstellen

komplexen Polstellen





Aufgabe 2 – Stabilität von Übertragungsfunktionen

Aufgaben: a) Berechnen Sie die Polstellen der beiden Übertragungsfunktionen

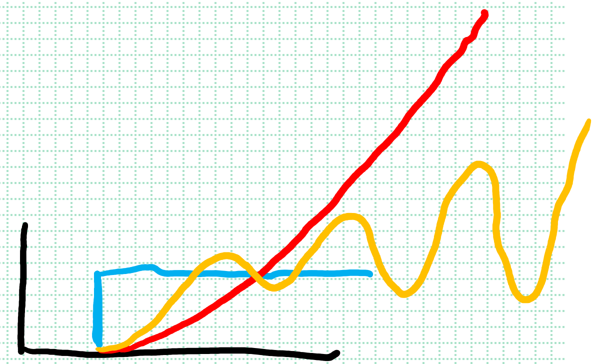
$$G_2(s) = \frac{1}{s^2+s-6}$$

$N(s) = s^2 + s - 6$

$s = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 6}$

$= -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}}$

$= -\frac{1}{2} \pm \frac{5}{2}$



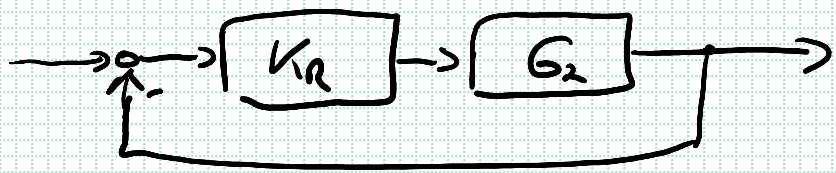
$s = 2 \quad \vee \quad s = -3$

↳ pos. Realteil ⟶ instabil

Aufgabe 2 – Stabilität von Übertragungsfunktionen

Aufgaben: b) Betrachten Sie beide Übertragungsfunktionen jeweils in einem Standardregelkreis mit einem P-Regler $G_R(s) = K_R$. Bestimmen Sie jeweils die Übertragungsfunktion des geschlossenen Regelkreises und deren Polstellen in Abhängigkeit von K_R.

$$G_2(s) = \frac{1}{s^2+s-6}$$



$$G = \frac{G_v}{1 + \underbrace{G_o}_{G_v}}$$

$$G_v = \frac{K_R}{s^2+s-6} \qquad G_r = 1$$

$$1 + G_o = 1 + \frac{K_R}{s^2+s-6} = \frac{s^2+s-6+K_R}{s^2+s-6}$$

$$G = \frac{K_R}{\cancel{s^2+s-6}} \cdot \frac{\cancel{s^2+s-6}}{s^2+s-6+K_R} = \frac{K_R}{s^2+s-6+K_R}$$

Aufgabe 2 – Stabilität von Übertragungsfunktionen

Aufgaben: b) Betrachten Sie beide Übertragungsfunktionen jeweils in einem Standardregelkreis mit einem P-Regler $G_R(s) = K_R$. Bestimmen Sie jeweils die Übertragungsfunktion des geschlossenen Regelkreises und deren Polstellen in Abhängigkeit von K_R.

$$G_2(s) = \frac{1}{s^2+s-6}$$

$$N_G(s) = s^2 + s - 6 + K_R$$

$$s = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 6 - K_R}$$

$$= \dots$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{25 - 4K_R}}{2}$$

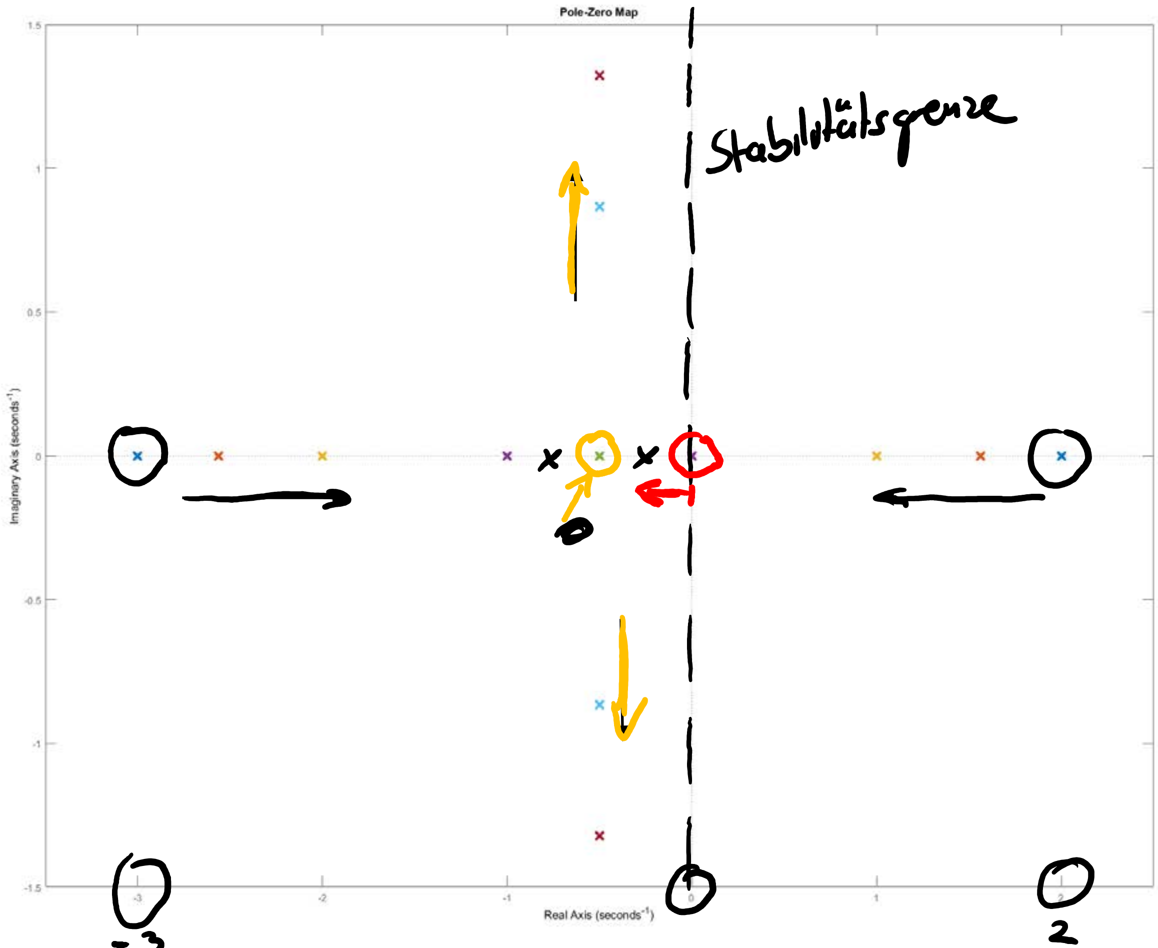
$$25 - 4K_R = 0$$

$$\underline{K_R = 6{,}25}$$

$\longrightarrow$ K_R so bestimmen, dass beide Polstellen negative Realteile besitzen

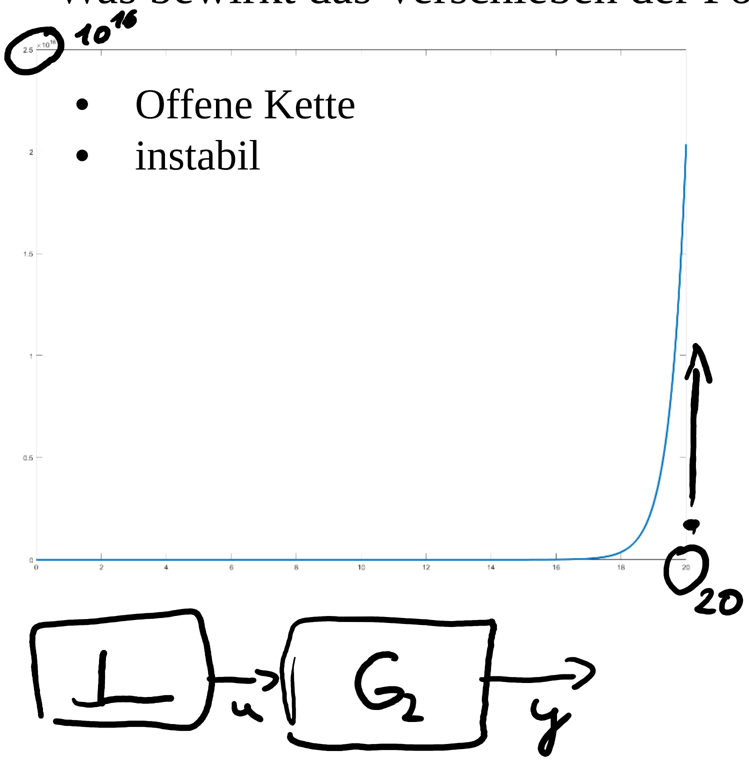
$\longrightarrow$ künstliche Stabilisierung

Aufgabe 2 – Stabilität von Übertragungsfunktionen

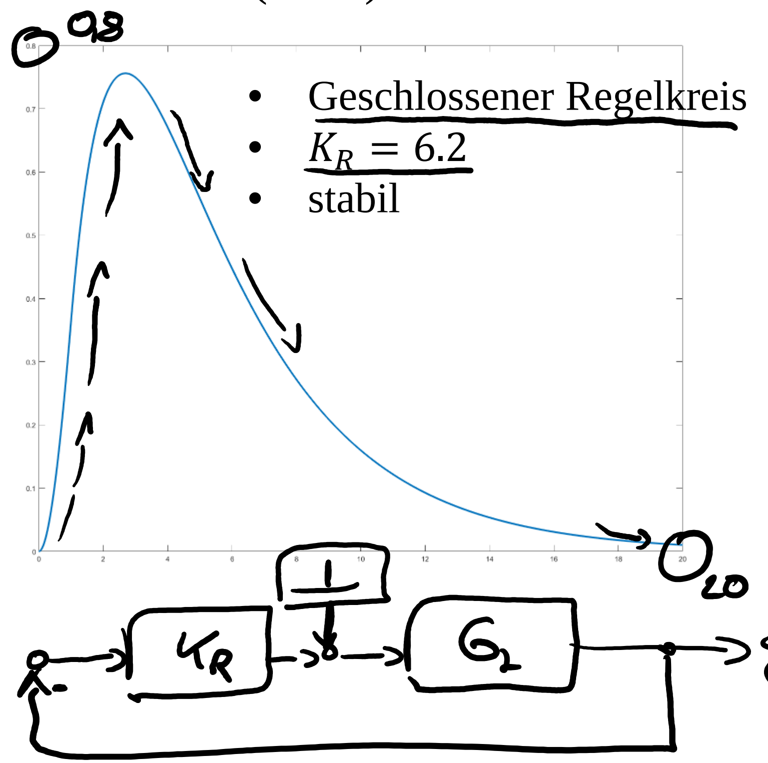


Aufgabe 2 – Stabilität von Übertragungsfunktionen

- Was bewirkt das Verschieben der Pole in einen stabilen Bereich (ÜF 2)



- Offene Kette
- instabil

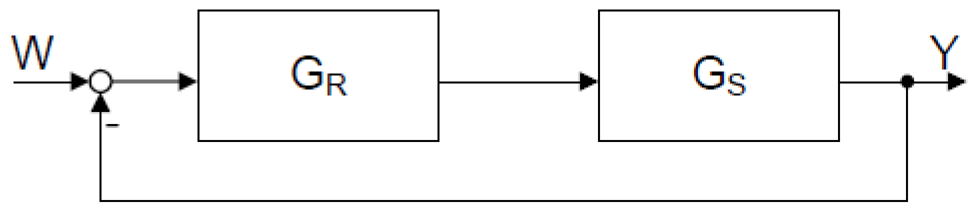


- Geschlossener Regelkreis
- $K_R = 6.2$
- stabil

Aufgabe 3 – Algebraische Stabilitätskriterien

Hurwitz-Kriterium

Gegeben ist folgendes Blockschaltbild



mit den Streckenübertragungsfunktionen

$$1.\ \ G_s(s) = \frac{10}{(s+1)\cdot(s+2)\cdot(s+3)} \qquad 2.\ G_s(s) = \frac{10\cdot(s+5)}{(s+1)\cdot(s+2)\cdot(s+3)}$$

Polstellen

↑ Polynom 3. Ordnung

Aufgabe: Der Regelkreis wird mit einem P-Regler $G_R(s) = K_R$ geschlossen. Überprüfen Sie für beide Übertragungsfunktionen mit dem Hurwitz-Kriterium für welche K_R der Regelkreis stabil ist.

Aufgabe 3 – Algebraische Stabilitätskriterien

Aufgabe: Der Regelkreis wird mit einem P-Regler $G_R(s) = K_R$ geschlossen. Überprüfen Sie für beide Übertragungsfunktionen mit dem Hurwitz-Kriterium für welche K_R der Regelkreis stabil ist.

1. $G_s(s) = \frac{10}{(s+1)\cdot(s+2)\cdot(s+3)}$

$$G_v = G_o = \frac{10K_R}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

$$1 + G_o = \frac{(s+1)(s+2)(s+3) + 10K_R}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

$$G = \frac{10K_R}{(s+1)(s+2)\cancel{(s+3)}} \quad \frac{\cancel{(s+1)(s+2)(s+3)}}{(s+1)(s+2)(s+3) + 10K_R} = \frac{10K_R}{\underbrace{(s+1)(s+2)(s+3) + 10K_R}_{N(s)}}$$

Aufgabe 3 – Algebraische Stabilitätskriterien

Aufgabe: Der Regelkreis wird mit einem P-Regler $G_R(s) = K_R$ geschlossen. Überprüfen Sie für beide Übertragungsfunktionen mit dem Hurwitz-Kriterium für welche K_R der Regelkreis stabil ist.

$$N(s) = (s+1)(s+2)(s+3) + 10K_R = \underbrace{1}_{a_3} \cdot s^3 + \underbrace{6}_{a_2} \cdot s^2 + \underbrace{11}_{a_1} \cdot s + \underbrace{(6+10K_R)}_{a_0}$$

notw. Bed.: $a_i > 0$, alle vorhanden

$$6 + 10K_R > 0$$

$$K_R > -\frac{6}{10}$$

$$\boxed{K_R > -0{,}6}$$

Aufgabe 3 – Algebraische Stabilitätskriterien

Aufgabe: Der Regelkreis wird mit einem P-Regler $G_R(s) = K_R$ geschlossen. Überprüfen Sie für beide Übertragungsfunktionen mit dem Hurwitz-Kriterium für welche K_R der Regelkreis stabil ist.

hin. Bed.

Hurwitz - Determinanten

H_{n-1} $\qquad n = 3$

$$\begin{array}{ccc} H_1 & H_2 & H_3 \\ a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} \; \dots \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} \\ \vdots & & \vdots \end{array}$$

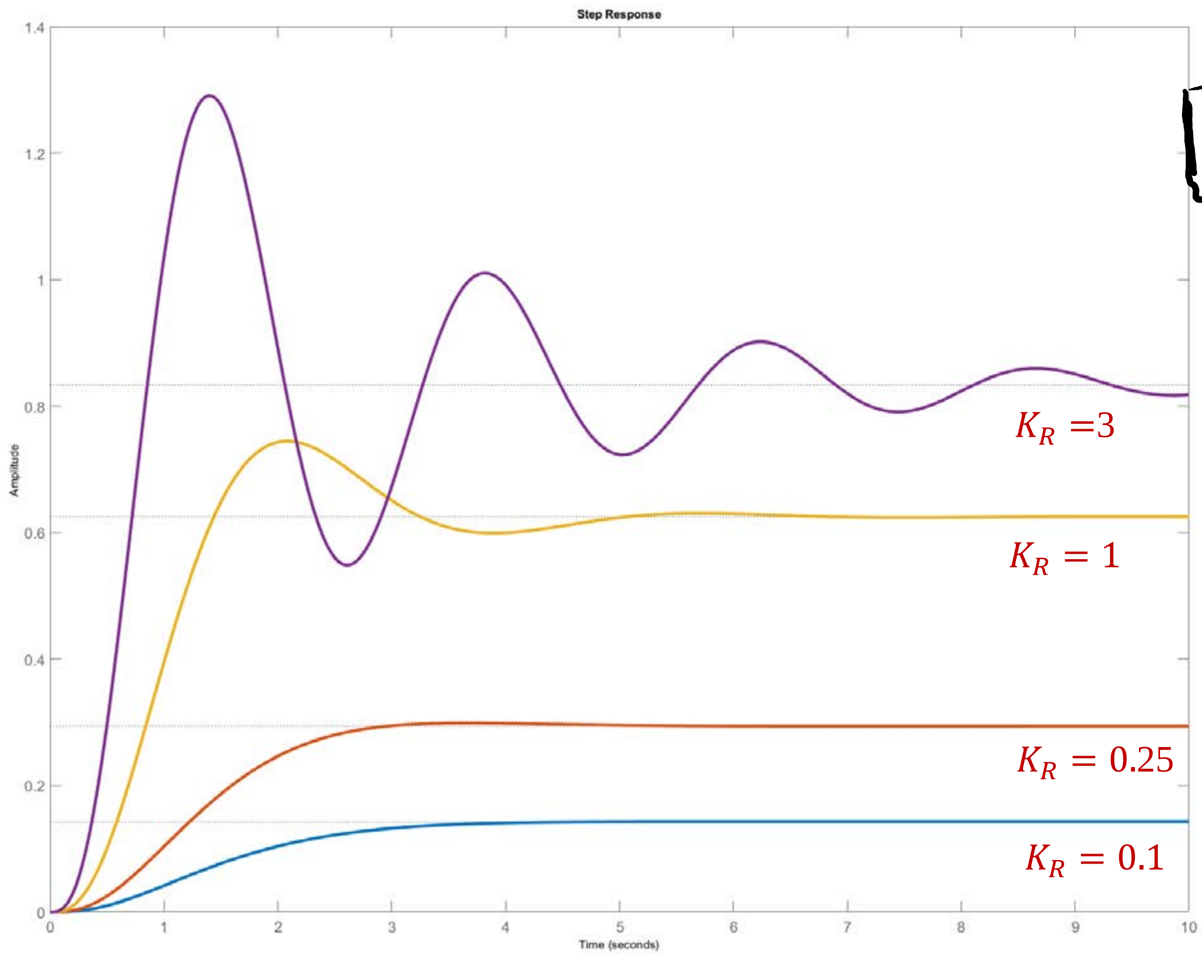
$$H_1 = a_{n-1} = a_2 = 6 > 0$$

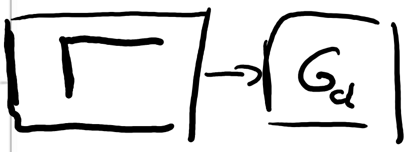
$$H_2 = \det\begin{pmatrix} a_2 & a_0 \\ a_3 & a_1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 6 & 6+10K_R \\ 1 & 11 \end{pmatrix}$$

$$= 60 - 10K_R \overset{!}{>} 0$$

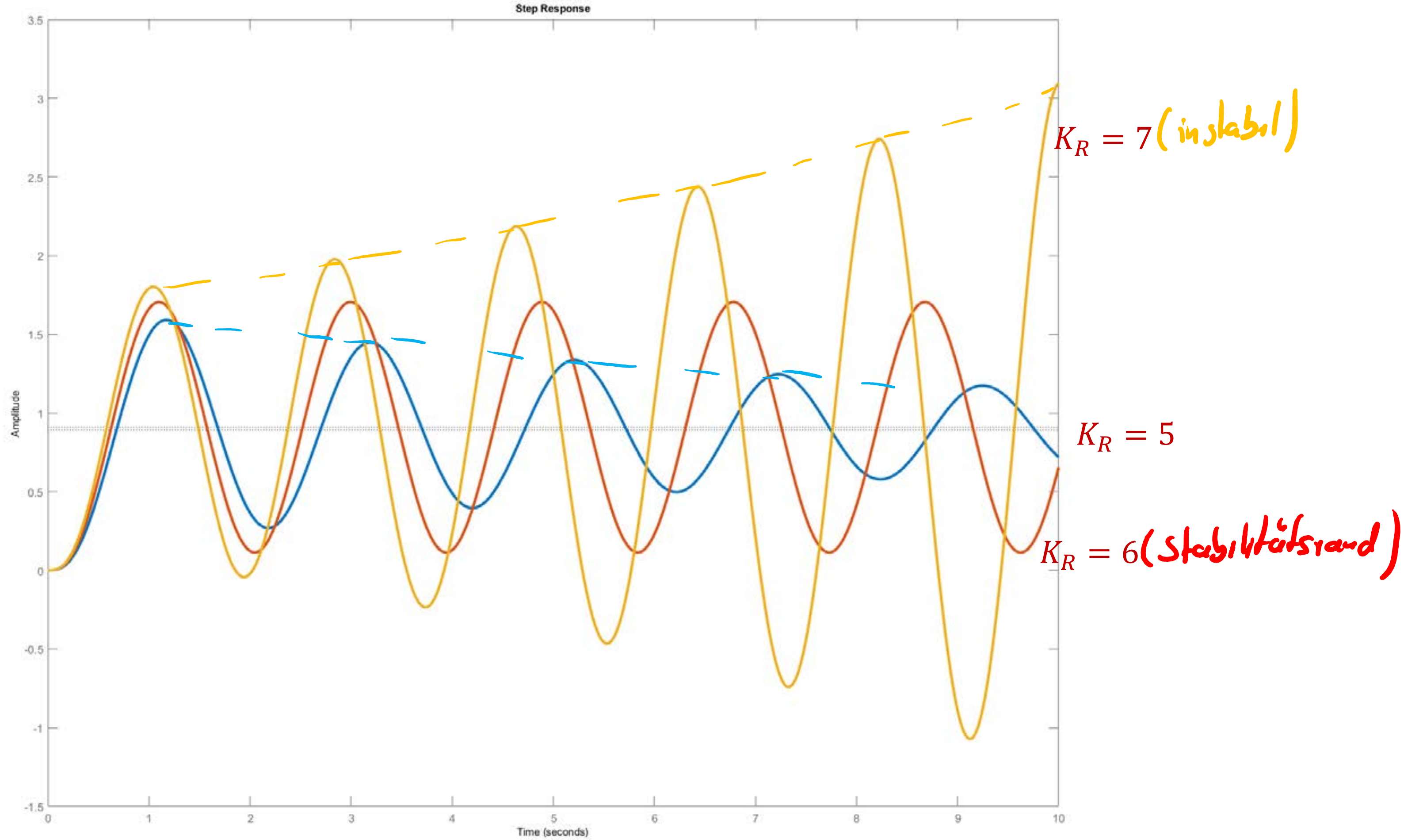
$$\Leftrightarrow \quad 60 > 10K_R \quad \longrightarrow \quad \underline{K_R < 6}$$

Aufgabe 3 – Algebraische Stabilitätskriterien





Aufgabe 3 – Algebraische Stabilitätskriterien



Aufgabe 3 – Algebraische Stabilitätskriterien

Aufgabe: Der Regelkreis wird mit einem P-Regler $G_R(s) = K_R$ geschlossen. Überprüfen Sie für beide Übertragungsfunktionen mit dem Hurwitz-Kriterium für welche K_R der Regelkreis stabil ist.

2. $G_s(s) = \dfrac{10\cdot(s+5)}{(s+1)\cdot(s+2)\cdot(s+3)}$

$$G_o = \frac{10K_R(s+5)}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

$$G_r = 1$$

$$G = \frac{10K_R(s+5)}{(s+1)(s+2)(s+3) + 10K_R(s+5)}$$

Durch Nullstelle Einfluss auf zus. Koeff.

$$N(s) = 1\cdot s^3 + 6\cdot s^2 + (11+10K_R)s + (6+50K_R)$$

Aufgabe 3 – Algebraische Stabilitätskriterien

Aufgabe: Der Regelkreis wird mit einem P-Regler $G_R(s) = K_R$ geschlossen. Überprüfen Sie für beide Übertragungsfunktionen mit dem Hurwitz-Kriterium für welche K_R der Regelkreis stabil ist.

notw. Bed.: $a_3, a_2 > 0$ (✓)

$a_1 = 11 + 10K_R > 0 \longrightarrow K_R > -\frac{11}{10} = \underline{-1{,}1}$

$a_2 = 6 + 50K_R > 0 \longrightarrow K_R > -\frac{6}{50} = \underline{-0{,}12}$

hin. Bed.: $H_1 = a_2 > 0$ (✓)

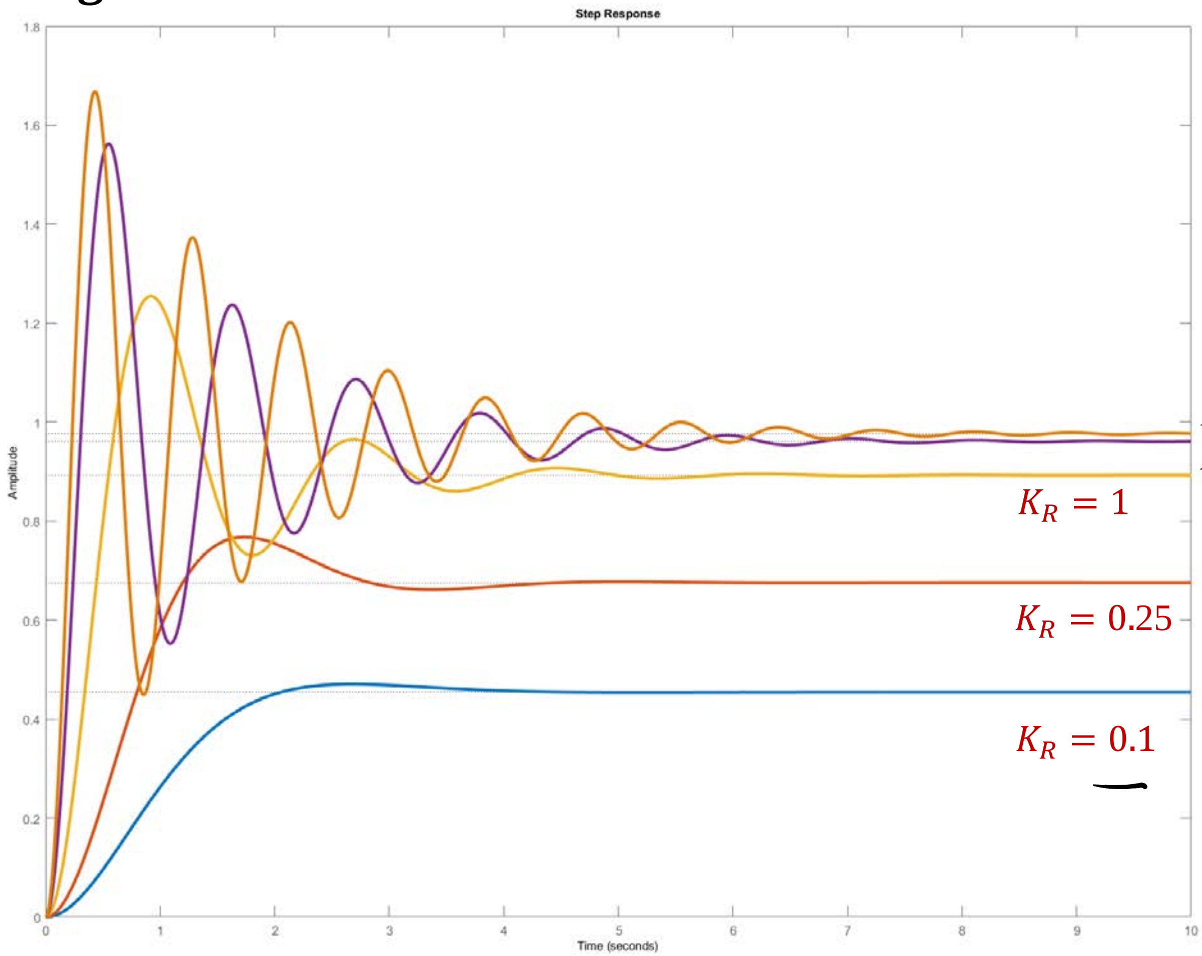
$H_2 = \det \begin{pmatrix} 6 & 6+50K_R \\ 1 & 11+10K_R \end{pmatrix} = 60 + 10K_R > 0$

$\underline{K_R > -6}$

untere Grenzen von $\underline{K_R > -0{,}12}$

$\boxed{-0{,}12 < K_R < \infty}$

Aufgabe 3 – Algebraische Stabilitätskriterien



$K_R = 5$

$K_R = 3$

$K_R = 1$

$K_R = 0.25$

$K_R = 0.1$