4. Übung zur Vorlesung „Steuer- und Regelungstechnik“

Matrix-Exponentialfunktion, Zustandssignale

Felix Goßmann M.Sc.

Institut für Steuer- und Regelungstechnik
Fakultät für Luft- und Raumfahrttechnik
Universität der Bundeswehr München

Aufgabe 1: Berechnung der Matrixexponentialfunktion

Gegeben sind die folgenden beiden Matrizen:

a) $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

b) $A_2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

<u>Aufgabe:</u>

Berechnen Sie für die gegebenen Matrizen jeweils die Matrix-Exponentialfunktion e^{At}. Beachten Sie dabei die in der Vorlesung erwähnten Spezialfälle

$\varphi(t, x_0, u(t))$

$\dot{x} = Ax + Bu(t)$

$\varphi_0(t, x_0, u(t)=0) = \underbrace{e^{At} x_0}_{\text{homogene Lsg.}}$

Aufgabe 1: Berechnung der Matrixexponentialfunktion

b) $A_2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow e^{A_2 t}$ gesucht

Jordan-Normalform

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \longrightarrow e^{Jt} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_3 t} \end{pmatrix}$$

Diagonalmatrizen, gilt <u>nicht</u> allgemein

$$A = T J T^{-1}$$

$$e^{At} = T e^{Jt} T^{-1}$$

Aufgabe 1: Berechnung der Matrixexponentialfunktion

$I = id$

1. Eigenwerte von A_2

$$\det(\lambda I - A_2) = \det\begin{pmatrix} \lambda-4 & 0 & 0 \\ -3 & \lambda-2 & -1 \\ 3 & 0 & \lambda-1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \lambda-4 & 0 \\ -3 & \lambda-2 \\ 3 & 0 \end{matrix}$$

$$= (\lambda-4)(\lambda-2)(\lambda-1) + 0 + 0 - 0$$

$$= (\lambda-4)(\lambda-2)(\lambda-1) \longrightarrow \lambda_1 = 4,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 1$$

$$J = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ges. T ?

Aufgabe 1: Berechnung der Matrixexponentialfunktion

$$T = \begin{pmatrix} v_1 & , & v_2 & , & v_3 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = 4 \qquad \lambda_2 = 2 \qquad \lambda_3 = 1$$

$$(\lambda_i \cdot \underline{I} - A)\, v_i = 0$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Fall $\lambda_1 = 4$:

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_{1,1} \\ v_{1,2} \\ v_{1,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$-3v_{1,1} + 2v_{1,2} - v_{1,3} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2v_{1,2} = v_{1,3} + 3v_{1,1}$$

$$v_{1,2} = \frac{1}{2}\underbrace{(-1+3)}_{=2}$$

$$\Leftrightarrow v_{1,2} = 1$$

Wahl $v_{1,1} = 1$

$$3v_{1,1} + 3v_{1,3} = 0$$

$$v_{1,3} = -v_{1,1} = -1$$

Aufgabe 1: Berechnung der Matrixexponentialfunktion

Fall $\lambda_2 = 2$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{2,1} \\ v_{2,2} \\ v_{2,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$-2v_{2,1} = 0 \quad \Rightarrow v_{2,1} = 0$$

$$\cancel{-3v_{2,1}}^{\,0} - v_{2,3} = 0 \quad \Rightarrow v_{2,3} = 0$$

Wahl: $v_{2,2} = 1$

$$v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Auf gleichem Weg ergibt sich: $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 1: Berechnung der Matrixexponentialfunktion

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$e^{A_2 t} = T e^{Jt} T^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{4t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \underline{\underline{\begin{pmatrix} e^{4t} & 0 & 0 \\ -e^{t}+e^{4t} & e^{2t} & -e^{t}+e^{2t} \\ e^{t}-e^{4t} & 0 & e^{t} \end{pmatrix}}}$$

Aufgabe 1: Berechnung der Matrixexponentialfunktion

a) $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$\lambda_{1,2,3} = 2 - \lambda$

$$e^{A_1 t} = e^{\lambda t} \cdot e^{\overbrace{(A-\lambda I)}^{N} \cdot t}$$

n: Dimension von A

$$N = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{nilpotente Matrix}}$$

nilpotent: $e^{At} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{A^k t^k}{k!}$

$n = 3$

$$\boxed{e^{Nt} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{N^k t^k}{k!}}$$

Aufgabe 1: Berechnung der Matrixexponentialfunktion

$$e^{Nt} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{t^2}{2} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{A^2}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

$$e^{A_1 t} = e^{\overset{\lambda=2}{\lambda} t} e^{Nt} = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} e^{2t} & t \cdot e^{2t} & \frac{1}{2} t^2 e^{2t} \\ 0 & e^{2t} & t \cdot e^{2t} \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix}}}$$

Aufgabe 2: Berechnung von Zustandssignalen

Es wird ein harmonischer Oszillator (mit Anregung) betrachtet, dessen Dynamik durch

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\gamma & \omega \\ -\omega & -\gamma \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + u(t),$$

wobei $\gamma \geq 0$ und $\omega > 0$ gilt.

$\varphi(t, x_0, u(t))$

<u>Aufgabe</u>

Berechnen Sie das allgemeine Zustandssignal φ für den Fall

a) $u(t) = (0,0)^T \; \forall \, t \in \mathbb{R}$ ⟵ $\varphi(t, x_0, u(t) = 0)$ → homogene Lsg.

b) $u(t) = \begin{pmatrix} e^{-\gamma t} \cdot \sin(2\omega t) \\ e^{-\gamma t} \cdot \cos(2\omega t) \end{pmatrix}$ ⟵ komplette Lsg ≙ homogene + partikuläre Lsg.

Aufgabe 2: Berechnung von Zustandssignalen

Berechnen Sie das allgemeine Zustandssignal φ für den Fall

a) $u(t) = (0,0)^T \; \forall \, t \in \mathbb{R}$

$$\varphi(t, x_0, u(t) = 0) = \underbrace{e^{At}}_{\Phi(t)} \cdot x_0$$

$$A = \begin{pmatrix} -\gamma & \omega \\ -\omega & -\gamma \end{pmatrix}$$

$$J = \begin{pmatrix} -\gamma - i\omega & 0 \\ 0 & -\gamma + i\omega \end{pmatrix}$$

Eigenwerte:

$$\det(\lambda I - A)$$

$$= \det\left(\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\gamma & \omega \\ -\omega & -\gamma \end{pmatrix}\right)$$

$$= (\lambda + \gamma)^2 + \omega^2$$

$$\boxed{\begin{aligned} \lambda_1 &= -\gamma - i\omega \\ \lambda_2 &= -\gamma + i\omega \end{aligned}}$$

Aufgabe 2: Berechnung von Zustandssignalen

Berechnen Sie das allgemeine Zustandssignal φ für den Fall

a) $u(t) = (0,0)^T \; \forall \, t \in \mathbb{R}$

Eigenvektoren: $(\lambda_i I - A) v_i = 0$ $\quad v_1 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$

$$T = \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad T^{-1} = \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} 1 & i \\ -1 & i \end{pmatrix}$$

$$e^{At} = T e^{Jt} T^{-1} = \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-\gamma t - i\omega t} & 0 \\ 0 & e^{-\gamma t + i\omega t} \end{pmatrix} \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} 1 & i \\ -1 & i \end{pmatrix}$$

$$= \frac{e^{-\gamma t}}{2i} \begin{pmatrix} i e^{i\omega t} + i e^{-i\omega t} & e^{i\omega t} - e^{-i\omega t} \\ -e^{i\omega t} + e^{-i\omega t} & i e^{i\omega t} + i e^{-i\omega t} \end{pmatrix} \underset{\uparrow}{=} e^{-\gamma t} \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & \sin(\omega t) \\ -\sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix}$$

Additionstheorem

Aufgabe 2: Berechnung von Zustandssignalen

Berechnen Sie das allgemeine Zustandssignal φ für den Fall

a) $u(t) = (0,0)^T \; \forall \, t \in \mathbb{R}$

$$\varphi(t, x_0, u(t)=0) = \underbrace{e^{-\gamma t} \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & \sin(\omega t) \\ -\sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix} x_0}$$

Aufgabe 2: Berechnung von Zustandssignalen

$\phi(t) = e^{At}$

Berechnen Sie das allgemeine Zustandssignal φ für den Fall

b) $u(t) = \begin{pmatrix} e^{-\gamma t} \cdot \sin(2\omega t) \\ e^{-\gamma t} \cdot \cos(2\omega t) \end{pmatrix}$ $\longrightarrow$ ext. Anregung des DGL-Systems $\Rightarrow$ inhomogen

$$\varphi(t, x_0, u(t)) = \phi(t) x_0 + \phi(t) \int_0^t \phi(-\tau) u(\tau)\, d\tau$$

$$\phi(t) \int_0^t \phi(-\tau) u(\tau)\, d\tau = \underbrace{e^{-\gamma t} \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & \sin(\omega t) \\ -\sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix}}_{\text{aus a)}} \int_0^t \underbrace{e^{\gamma \tau}}_{=1} \begin{pmatrix} \overbrace{\cos(-\omega\tau)}^{\cos(\omega\tau)} & \overbrace{\sin(-\omega\tau)}^{-\sin(\omega\tau)} \\ \underbrace{-\sin(-\omega\tau)}_{\sin(\omega\tau)} & \underbrace{\cos(-\omega\tau)}_{\cos(\omega\tau)} \end{pmatrix} \underbrace{e^{-\gamma\tau}}_{=1} \begin{pmatrix} \sin(2\omega\tau) \\ \cos(2\omega\tau) \end{pmatrix} d\tau$$

$$= e^{-\gamma t} \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & \sin(\omega t) \\ -\sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix} \int_0^t \begin{pmatrix} \cos(\omega\tau)\sin(2\omega\tau) - \sin(\omega\tau)\cos(2\omega\tau) \\ \sin(\omega\tau)\sin(2\omega\tau) + \cos(\omega\tau)\cos(2\omega\tau) \end{pmatrix} d\tau$$

Aufgabe 2: Berechnung von Zustandssignalen

Berechnen Sie das allgemeine Zustandssignal φ für den Fall

$$\text{b) } u(t) = \begin{pmatrix} e^{-\gamma t} \cdot \sin(2\omega t) \\ e^{-\gamma t} \cdot \cos(2\omega t) \end{pmatrix}$$

Additionstheoreme

$$\sin(x-y) = \sin(x)\cos(y) - \cos(x)\sin(y)$$

$$\cos(x-y) = \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y)$$

$$c = \cos(\omega t)$$

$$s = \sin(\omega t)$$

$$= e^{-\gamma t} \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & \sin(\omega t) \\ -\sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix} \int_0^t \underbrace{\begin{pmatrix} \sin(2\omega\tau - \omega\tau) \\ \cos(2\omega\tau - \omega\tau) \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} \sin(\omega\tau) \\ \cos(\omega\tau) \end{pmatrix}} d\tau$$

$$= e^{-\gamma t} \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & \sin(\omega t) \\ -\sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{\omega}\cos(\omega\tau) \\ \frac{1}{\omega}\sin(\omega\tau) \end{bmatrix}_0^t = e^{-\gamma t} \begin{pmatrix} c & s \\ -s & c \end{pmatrix} \frac{1}{\omega} \begin{pmatrix} 1-c \\ s \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2: Berechnung von Zustandssignalen

Berechnen Sie das allgemeine Zustandssignal φ für den Fall

$$\text{b) } u(t) = \begin{pmatrix} e^{-\gamma t} \cdot \sin(2\omega t) \\ e^{-\gamma t} \cdot \cos(2\omega t) \end{pmatrix}$$

$$= e^{-\gamma t} \frac{1}{\omega} \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & \sin(\omega t) \\ -\sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \end{pmatrix}$$

Additionstheorem

$$= e^{-\gamma t} \frac{1}{\omega} \begin{pmatrix} \cos(\omega t) - \cos(\omega t)^2 + \sin(\omega t)^2 \\ -\sin(\omega t) + \sin(\omega t)\cos(\omega t) + \sin(\omega t)\cos(\omega t) \end{pmatrix}$$

Additionstheorem

$$= e^{-\gamma t} \frac{1}{\omega} \begin{pmatrix} \cos(\omega t) - \cos(2\omega t) \\ \sin(2\omega t) - \sin(\omega t) \end{pmatrix}$$

partikuläre Lösung

$$\varphi(t, x_0, u(t)) = e^{-\gamma t} \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & \sin(\omega t) \\ -\sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix} x_0 + e^{-\gamma t} \frac{1}{\omega} \begin{pmatrix} \cos(\omega t) - \cos(2\omega t) \\ \sin(2\omega t) - \sin(\omega t) \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2: Berechnung von Zustandssignalen

Berechnen Sie das allgemeine Zustandssignal φ für den Fall

b) $u(t) = \begin{pmatrix} e^{-\gamma t} \cdot \sin(2\omega t) \\ e^{-\gamma t} \cdot \cos(2\omega t) \end{pmatrix}$

$B = I$

Bei $B \neq I$

$$\phi(t) \int_0^{\tau} \phi(-\tau)\, B u(\tau)\, d\tau$$

$$\varphi(t, x_0, u(t)) = \phi(t)\, x_0 + \phi(t) \int_0^{t} \phi(-\tau)\, B u(\tau)\, d\tau$$